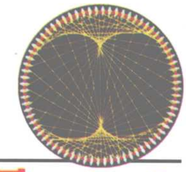
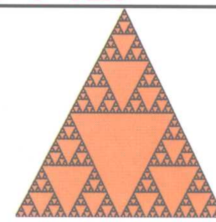
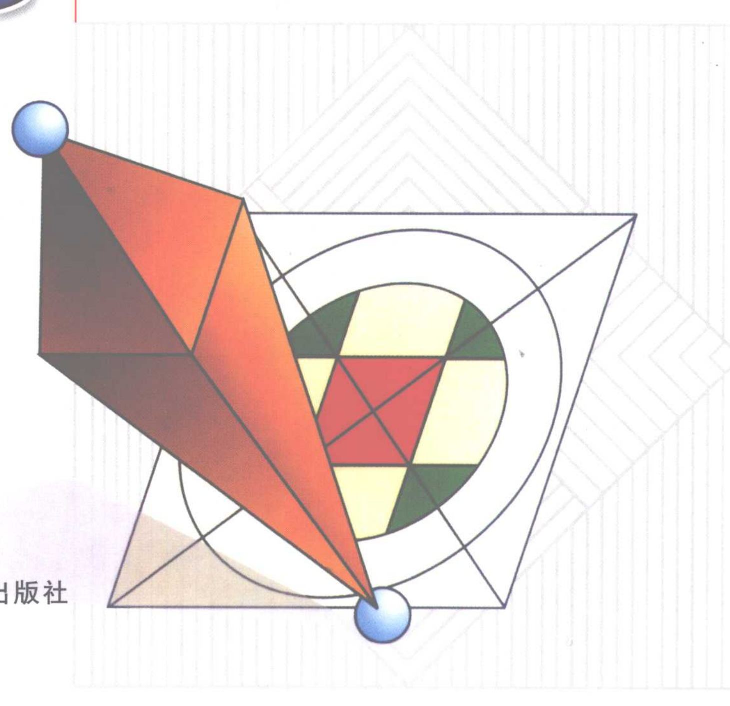


新编中学数学解题方法全书

初中版 上卷



刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社

初中版 上卷

新编中学数学
解题方法全书

刘培杰 主编

一切西学皆从算学出，西人十岁外无不习算。今欲采西学，自不可不学算。或师西人，或师内地人之知算者俱可。由是而历算之术，而格致之理，而制器尚象之法，兼综条贯，轮船火器之外，正非一端。

——《采西学议》

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

本书共包括两部分:第一编代数,第二编几何。本书以专题的形式对初中数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合初中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:初中版.上卷/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.1(2008.10 重印)

ISBN 978-7-5603-2409-8

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-初中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 001794 号

策划编辑 刘培杰 责任编辑 唐蕾 李广鑫
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.25 字数 578 千字
版 次 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 10 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2409-8
印 数 3001~6000 册
定 价 28.00 元

《新编中学数学解题方法全书》(初中版)上卷编委会

主　编　刘培杰

编　者　(按姓氏笔画排序)

习禾生　刘名禄　刘香根　陈友才　余凤冈　吴行民　周以宏

郑祖先　林城皋　洪凤翔　郭　明　郭艳萍　郭梦书　钱国繁

喻俊鹏　熊光议

由于本书编辑出版时间较长,有个别作者工作单位发生改变,请见书后与刘培杰数学工作室联系。

联系电话:0451－86281378　13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号

哈尔滨工业大学出版社第四编辑室

第一编　代数

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

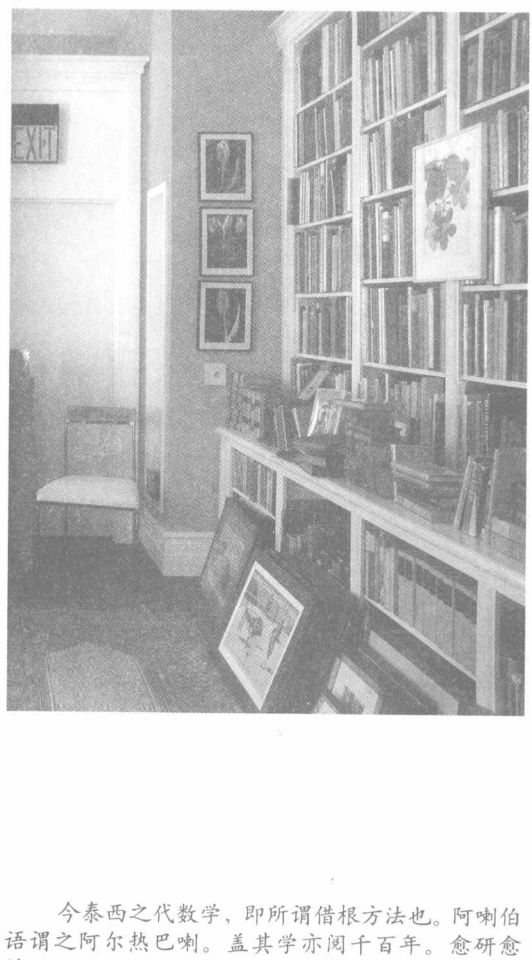
第二编 几何

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

第一编

代 数



今泰西之代数学，即所谓借根方法也。阿喇伯语谓之阿尔热巴喇。盖其学亦阅千百年。愈研愈精，始臻此诣，非一时一人之智力所能为也。

——薛福成《出使英法义比四国日记》

心得 体会 拓广 疑问

怎样用实数绝对值的性质解题

实数的绝对值是一个极为重要的数学概念，有关实数绝对值的运算富有鲜明的特色.本节首先介绍实数绝对值的一个重要性质，然后从一些竞赛题入手，阐述该性质的广泛应用.

性质

(1) 如果 $|f_1(x)|+|f_2(x)|=\begin{cases}|f_1(x)+f_2(x)|\\|f_1(x)-f_2(x)|\end{cases}$，则 $f_1(x)\cdot f_2(x)\begin{cases}\geqslant 0\\\leqslant 0\end{cases}$.

(2) 如果 $f_1(x)\cdot f_2(x)\begin{cases}\geqslant 0\\\leqslant 0\end{cases}$，则 $|f_1(x)|+|f_2(x)|=\begin{cases}|f_1(x)+f_2(x)|\\|f_1(x)-f_2(x)|\end{cases}$.

证明 因为

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|=|f_1(x)+f_2(x)|$$

所以 $[|f_1(x)|+|f_2(x)|]^2=|f_1(x)+f_2(x)|^2=[f_1(x)+f_2(x)]^2$

所以 $|f_1(x)|^2+2|f_1(x)|\cdot|f_2(x)|+|f_2(x)|^2=$

$$f_1^2(x)+2f_1(x)\cdot f_2(x)+f_2^2(x)$$

即
$$|f_1(x)|\cdot|f_2(x)|=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

所以
$$|f_1(x)\cdot f_2(x)|=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

由绝对值的定义知 $f_1(x)\cdot f_2(x)\geqslant 0$.

上面证明过程步步可逆，因此知，如果 $f_1(x)\cdot f_2(x)\geqslant 0$，则

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|=|f_1(x)+f_2(x)|$$

同理可证，如果 $|f_1(x)|+|f_2(x)|=|f_1(x)-f_2(x)|$，则

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\leqslant 0$$

如果 $f_1(x)\cdot f_2(x)\leqslant 0$，则

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|=|f_1(x)-f_2(x)|$$

下面举例说明性质的应用.

例1 方程 $|2x-1|+|x-2|=|x+1|$ 实数解的个数是( ).

(A)1 (B)2 (C)2 (D)3 (E)无穷多

解 原方程可变形为

$$|2x-1|+|x-2|=|(2x-1)-(x-2)|$$

由性质(1)有 $(2x-1)(x-2)\leqslant 0$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

从而，原方程有无穷多个解，故选(E).

例2 方程 $|x-2|+|x-3|=1$ 实数解的个数为( ).

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)多于3个

解 因为原方程可变形为

$$|x-2|+|x-3|=|(x-2)-(x-3)|$$

由性质(1)有 $(x-2)(x-3)\leqslant 0$，解得 $2\leqslant x\leqslant 3$，故选(E).

例3 解方程 $|2x-1|-|x+3|=4$.

解 原方程可变形为

$$4+|x+3|=|2x-1| \quad ①$$

心得 体会 拓广 疑问

根据性质(2)有

(1) 如果 $4(x+3)\geqslant 0$,即当 $x\geqslant -3$ 时,方程 ① 可化为

$$|4+(x+3)|=|2x-1|$$

即 $x+7=\pm(2x-1)$,解得 $x=8$,或 $x=-2$,都是原方程的根.

(2) 如果 $4(x+3)\leqslant 0$,即当 $x\leqslant -3$ 时,方程 ① 可化为

$$|4-(x+3)|=|2x-1|$$

即 $1-x=\pm(2x-1)$,解得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$,都不是原方程的解.

故原方程的解为 $x=8$ 或 $x=-2$.

例 4　x 是何实数时,方程 $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$ 成立?

解　原方程两边同乘以 $\sqrt{2}$,并变形得

$$\sqrt{(2x-1)+2\sqrt{2x-1}+1}+\sqrt{(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1}=2$$

所以 $$\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}=2$$

即 $$|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|=2$$

又因为 $$|(\sqrt{2x-1}+1)-(\sqrt{2x-1}-1)|=2$$

所以 $|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|=|(\sqrt{2x-1}+1)-(\sqrt{2x-1}-1)|$

由性质(1)有

$$(\sqrt{2x-1}+1)(\sqrt{2x-1}-1)\leqslant 0$$

即 $\sqrt{2x-1}\leqslant 1$,所以 $x\leqslant 1$.

又因为 $2x-1\geqslant 0$,所以 $x\geqslant\frac{1}{2}$.

故当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,原方程成立.

例 5　求满足 $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1$ 的实数 x 的一切值.

解　因为

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}=|\sqrt{x+1}-2|$$

$$\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-3)^2}=|\sqrt{x+1}-3|$$

又因为 $$|(\sqrt{x+1}-2)-(\sqrt{x+1}-3)|=1$$

所以原方程可化为

$$|\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}-3|=|(\sqrt{x+1}-2)-(\sqrt{x+1}-3)|$$

由性质(1)有

$$(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-3)\leqslant 0$$

解得 $$2\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 3$$

即 $$3\leqslant x\leqslant 8$$

故满足等式的实数 x 的一切值为 $3\leqslant x\leqslant 8$.

例 6　设 $y=|x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1}$,试求 y 值恒等于常数时 x 的取值范围.

解　已知等式可化为 $y=|x-1|+|x-3|+|2x+1|$,要使 y 值恒等于常数,有且只有两种可能: $\pm[(x-1)+(x-3)-(2x+1)]=\mp 5$. 由于 $y\geqslant 0$,因此 y 只可能等于常数 5.

心得 体会 拓广 疑问

由性质(1),如果等式 $y=|x-1|+|x-3|+|2x+1|=|(x-1)+(x-3)|+|2x+1|=|2x-4|+|2x+1|=|(2x-4)-(2x+1)|=5$(常数)成立,那必有

$$\begin{cases}(x-1)(x-3)\geqslant 0\\(2x-4)(2x+1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\text{ 或 }x\geqslant 3\\-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$$

故当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,y 恒等于常数 5.

例 7 已知 $\pi<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$,化简 $\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}$.

解 $\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}=\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}+\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}=$

$$|\cos x+\sin x|+|\cos x-\sin x|$$

因为 $(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

又因为 $\pi<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$,即 $2\pi<2x\leqslant 3\pi$.

所以根据性质(1)得:

i 当 $\cos 2x\geqslant 0$,即当 $2\pi<2x\leqslant\frac{5\pi}{2}$,也就是当 $\pi<x\leqslant\frac{5\pi}{4}$ 时,有

$$\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}=|(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)|=|2\cos x|=-2\cos x$$

ii 当 $\cos 2x<0$,即 $\frac{5\pi}{2}<2x\leqslant 3\pi$,也就是当 $\frac{5\pi}{4}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时

$$\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}=|(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)|=|2\sin x|=-2\sin x$$

故
$$\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}=\begin{cases}-2\cos x,\pi<x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}\\-2\sin x,\dfrac{5\pi}{4}<x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

应用性质(1)、(2)可以简捷地解答下列一组练习.

1.解方程:$|x-5|+\sqrt{(4-x)^2}=1$.(答案:$4\leqslant x\leqslant 5$)

2.方程 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$ 的解是________.(答案:$x=5$)

3.方程 $|2x-1|+|x-2|=|x+1|$ 实数解的个数是( ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)不同于上述的其他答案

(答案:(D))

心得 体会 拓广 疑问

怎样用韦达定理法计算根式的值

切实掌握实数概念和熟练的计算技能,有效地研究代数方程和分析方法,是根式计算的重要前提,在这里我们研究若干个具有代表性且颇有趣味的练习,注意:我们研究的是在什么情况下,它们可以完全地使用韦达定理(包括逆定理),且能使有关根式的计算方法灵活而简单.

首先把韦达定理公式化.

如果数 m 和 n 满足方程组 $\begin{cases} m+n=-p \\ m\cdot n=q \end{cases}$,则 m,n 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.

我们利用这个结论来证明或计算下面的例题.

例 1 证明:$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

证明 在研究等式左边部分相加的两数时,这两数可分别用 m,n 来表示,很容易地计算出

$$m\cdot n=(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}})(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})=\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{8}=2$$

因此,假设证明的等式正确,根据韦达定理的逆定理,则 m,n 应该是二次方程 $x^2-4x+2=0$ 的根,也就是说,应该有

$$m=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$$

$$n=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$$

由 $(2+\sqrt{2})^3=20+14\sqrt{2}$,$(2-\sqrt{2})^3=20-14\sqrt{2}$ 知上述两等式成立,故所证等式成立.

例 2 化简:$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

解 利用数学用表(开立方表、开平方表)计算出这个表示式的近似值,得

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\approx\sqrt[3]{2+2.236}+\sqrt[3]{2-2.236}=$$
$$\sqrt[3]{4.236}-\sqrt[3]{0.236}\approx$$
$$1.618-0.618=1$$

现在假设 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

我们想办法来证明上述这个假设是正确的,或者推翻这个假设.

设 $m=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$,$n=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$,这里容易看出

$$m\cdot n=(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})=\sqrt[3]{2^2-(\sqrt{5})^2}=-1$$

此时,根据韦达定理的逆定理可知:m 和 n 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根,即

$$m=x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},n=x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由此可知下面的式子可能成立

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ①$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad ②$$

心得 体会 拓广 疑问

验证等式 ① 和 ②,为此求等式右边部分的立方数

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}=2+\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8}=2-\sqrt{5}$$

因此,等式 ① 和 ② 是正确的,① 和 ② 相加得

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

所以,假设是正确的.

注 这样的练习,可能得到与这解法相同的可能解和另外的方法,例如变换根式的表示法,引入二次式的立方数等,如例 3.

例 3 证明:$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

证明 我们设法用某个二次不尽根式的立方数来表示 $5\sqrt{2}+7$,即

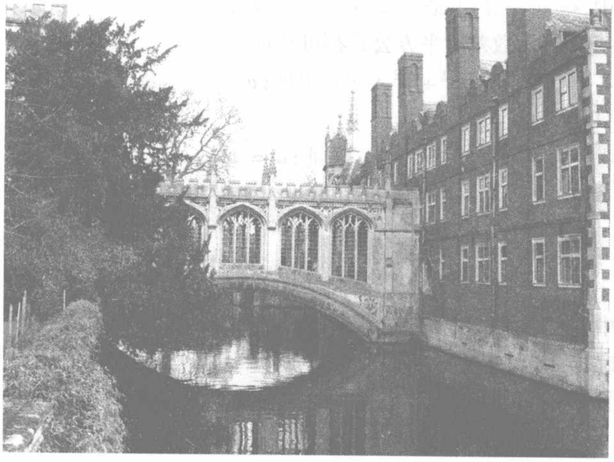
$$5\sqrt{2}+7=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6+1=$$
$$(\sqrt{2})^3+3\sqrt{2}+3(\sqrt{2})^2+1=(\sqrt{2}+1)^3$$

由此可得 $$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt{2}+1$$

同样 $$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt{2}-1$$

这样两个等式相减,可得到要求的结果,即

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$$



心得 体会 拓广 疑问

怎样证明条件等式

一、求差法

在有关量相等的证明中,经常用到求差的方法,即将所要证的式子的两边的差进行推演,一直推演到为零的形式;也就是说,当在某条件下,欲证 $A = B$,只须证得 $A - B = 0$ 即可.

例1 若 a,b,c 为互不相等的实数,试证

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

证明 因为

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-c)(b-c)} = \frac{(a-c)-(b-c)-(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

又

$$(a-c)-(b-c)-(a-b)=0$$

所以

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

例2 若 a,b,c,d 都是正实数,且 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,试证:$a=b=c=d$.

分析 欲证 $a=b=c=d$,只须推出 $a-b=b-c=c-d=0$ 即可,考察条件中量的最高次幂为4,故希望能推出形如 $(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-d^2)^2+(d^2-a^2)^2=0$ 的式子.为此,在所给条件 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ 中,用配方法使左端成为两数差的平方和,即

$$a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4=-2(a^2b^2-2abcd+c^2d^2)$$

由于 a,b,c,d 皆为正实数,且 $(a^2-b^2)^2,(c^2-d^2)^2,2(ab-cd)^2$ 的和为零,故有 $a^2=b^2,c^2=d^2,ab=cd$.

由 $a^2=b^2$,得 $a=b$;由 $c^2=d^2$,得 $c=d$.

将 $a=b,c=d$ 代入 $ab=cd$ 中,得 $b=d$,于是 $a=b=c=d$ 得证.

类似地,对于下列命题用求差法并结合两数差的平方公式都可获证.

(1) 若实数 a,b,c 满足条件 $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$,求证:$a=b=c$.

(2) 若实数 a,b,c 满足条件 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,求证:$a=b=c$.

(3) 若实数 a,b,c,d 满足 $a^4+b^4+c^4+d^4=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$,求证:$|a|=|b|=|c|=|d|$.

二、综合法与分析法

综合法与分析法都是直接证法中经常采用的方法.就证明的进程来讲,综合法是一种从已知条件到结论的逻辑推理方法,即从题设中的已知条件或已知事实出发,推出有关事实,直至得到所要求证的命题结论,是一种由因索果的证明方法.

分析法是一种从结论到题设(从未知到已知)的逻辑推理方法,简言之,是一种执果索因的证明方法.对欲证命题"若 A 则 B",先从所要证明的结论 B 出

心得 体会 拓广 疑问

发,寻找能使得 B 成立的充分条件 B_1;再以 B_1 为结果,寻找能使得 B_1 成立的充分条件 B_2,……,这样一步一步地去寻求,直至能找到使得某一结论 B_k 成立的充分条件是 A,从而使命题得证. 按分析法论证"若 A 则 B",其模式就是:$B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow B_k \Leftarrow A$.

例 3 设 $x > 0, y > 0$,且 $\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = 3\sqrt{y}(3\sqrt{y}+2)$,求证:$x - 9y - 10\sqrt{x} + 18\sqrt{y} + 16 = 0$.

证法 1 (综合法)因为

$$\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = 3\sqrt{y}(3\sqrt{y}+2)$$

即

$$x - 9y - 2\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 0 \qquad ①$$

即

$$(\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2)(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 0$$

由于

$$x > 0, y > 0$$

故

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{y} \neq 0$$

所以

$$\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2 = 0$$

即

$$\sqrt{x} = 3\sqrt{y} + 2 \qquad ②$$

由 ①,② 立得

$$x - 9y - 10\sqrt{x} + 18\sqrt{y} + 16 =$$
$$x - 9y - 2\sqrt{x} - 6\sqrt{y} - 8[x - (3\sqrt{y} + 2)] = 0$$

证法 2 (分析法)欲证

$$x - 9y - 10\sqrt{x} + 18\sqrt{y} + 16 = 0$$

只须

$$x - 10\sqrt{x} + 25 = 9y - 18\sqrt{y} + 9 \qquad ①$$

只须

$$(\sqrt{x} - 5)^2 = (3\sqrt{y} - 3)^2 \qquad ②$$

只须

$$\sqrt{x} - 5 = 3\sqrt{y} - 3 \qquad ③$$

只须

$$\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2 = 0 \qquad ④$$

由于

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{y} \neq 0 \qquad ⑤$$

只须

$$(\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2)\cdot(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 0$$

即

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 3\sqrt{y}(3\sqrt{y} + 2)$$

最后一式已知为真,故原欲证之式成立.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边,$\angle C = 60°$,试证:$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$.

证明 (分析法)欲证

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

因为 $a+c, b+c, a+b+c$ 皆不为零,只须证明

$$(a+b+c)(a+b+2c) = 3(a+c)(b+c)$$

即

$$a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ab + 3ac + 3bc = 3ab + 3ac + 3bc + 3c^2$$

即

$$a^2 + b^2 - ab = c^2$$