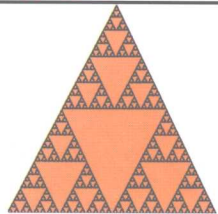


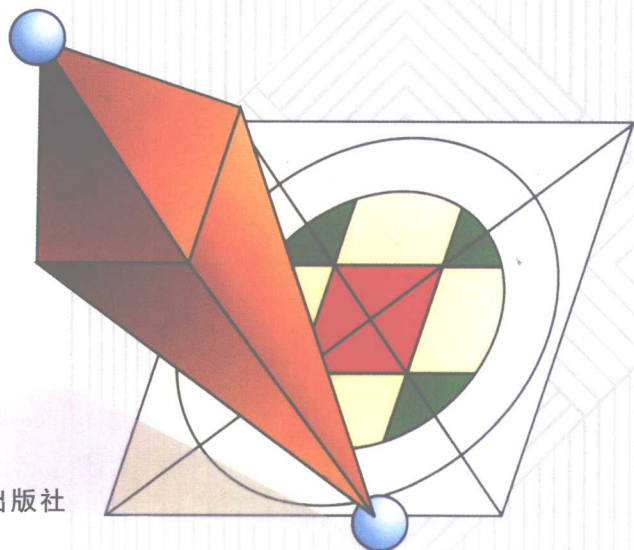
初中版 上卷



新编中学数学

解题方法全书

刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社



新编中学数学 解题方法全书

刘培杰 主编



一切西学皆从算学出，西人十岁外无不习算。今欲采西学，自不可不学算。或师西人，或师内地人之知算者俱可。由是而历算之术，而格致之理，而制器尚象之法，兼综条贯，轮船火器之外，正非一端。

——《采西学议》

哈尔滨工业大学出版社

内容提要

本书共包括两部分:第一编代数,第二编几何。本书以专题的形式对初中数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合初中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:初中版.上卷/刘培杰
主编. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.1(2008.10重印)
ISBN 978-7-5603-2409-8

I.新… II.刘… III.数学课—初中—解题 IV.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 001794 号

策划编辑 刘培杰 责任编辑 唐蕾 李广鑫

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 23.25 字数 578 千字

版 次 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 10 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2409-8

印 数 300 1 ~ 6 000 册

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

《新编中学数学解题方法全书》(初中版)上卷编委会

主 编 刘培杰

编 者 (按姓氏笔画排序)

习禾生 刘名禄 刘香根 陈友才 余凤冈 吴行民 周以宏
郑祖先 林城皋 洪凤翔 郭 明 郭艳萍 郭梦书 钱国繁
喻俊鹏 熊光议

由于本书编辑出版时间较长,有个别作者工作单位发生改变,请
见书后与刘培杰数学工作室联系。

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号

哈尔滨工业大学出版社第四编辑室

第一编 代数

怎样用实数绝对值的性质解题	3
怎样用韦达定理法计算根式的值	6
怎样证明条件等式	8
怎样用共轭因式解题	12
怎样用特殊方法证明代数条件恒等式	14
怎样进行通分	19
怎样用简易方法分解二元二次多项式的因式	23
怎样用“十字相乘法”分解四次式	25
怎样用二元二次待定系数分解法进行因式分解	28
怎样分解系数较大的整系数二次三项式	29
怎样进行根式化简	32
怎样用统一方法列方程解应用题	36
怎样用辅助未知数解应用题(I)	45
怎样用辅助未知数解应用题(II)	47
怎样解“相遇再行”应用题	49
怎样用倒推法解数学应用题	51
怎样巧解应用题	52
怎样解有关复利问题	56
怎样列方程解代数应用题	58
怎样列方程解应用题	62
怎样用图示法解溶液“倒出加满”应用题	67
怎样用“扩根”与“缩根”法解一元二次方程	69
怎样讨论一元二次方程的根	71
怎样求实系数的一元二次方程的实根在指定区间内的条件	74
怎样运用韦达定理的逆定理构造一元二次方程解题	76
怎样解关于两个一元二次方程有公共根的问题	80
怎样确定一元二次方程两根范围	82
怎样用韦达定理理解有关两根之差的问题	85
怎样妙用韦达定理	88
怎样解与二元一次绝对值方程的曲线有关的问题	90
怎样解形如 $ f_1(x) \pm f_2(x) = g(x)$ 的方程	92

目 录

CONTENTS

目 录
CONTENTS

怎样解形如 $ f(x) - g(x) = \varphi(x)$ 的方程	95
怎样用平方差公式解无理方程 $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = m$	96
怎样解无理方程 $\sqrt[n]{A(x)} \pm \sqrt[n]{B(x)} = C$	98
怎样用设辅助未知数法解无理方程	100
怎样利用平均值代换解无理方程	103
怎样使用判别式	105
怎样解一类特殊方程组	110
怎样用数形类比法解方程组	112
怎样用非负数性质解方程(组)	114
怎样用换元法解方程	116
怎样用平均值代换法解方程(组)	118
怎样解对称性方程组	120
怎样妙用齐次方程求比值	123
怎样用方程法解非方程类型问题	124
怎样求线性函数的最值	127
怎样用二次函数图象讨论二次方程根的范围	128
怎样求二次函数在各种区间上的最值	132
怎样解二次函数综合题	135
怎样解在约束条件下函数的最值问题	138
怎样用函数图象解初中代数题	142
怎样用整体思想解初一代数题	145
怎样解答四个“二次”综合题	147
怎样快速求含绝对值的二次函数最值	151
怎样用多种方法计算 $\sin 75^\circ$	153
怎样利用黄金分割数求三角函数值	155
怎样用三角板求特殊角的三角函数值	157
怎样用不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 解方程(组)	159
怎样对一类无理不等式进行倾向性证明	163
怎样判断 $\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}$ 与 $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_4}$ 的大小	165
怎样比较两数的大小	168
怎样用增量方法解代数题(I)	170
怎样用增量方法解代数题(II)	172
怎样用非负数的性质解题	174
怎样利用非负性解题	179
怎样用反证法证初中代数问题	181
怎样用最优美的方法解答数学应用题	184
怎样用几何法求参数变化范围	188
怎样用算术平均值代换法解题	189
怎样用线性代换法解初中代数题	192
怎样解初中代数综合题	195



第二编 几何

怎样用平行线证题	201
怎样用平行线的一个重要性质解题	204
怎样论证线段比例式或等积式	208
怎样利用基本图形证明平面几何问题	210
怎样用平行线截线段成比例定理证明 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$ 问题	212
怎样利用平行截割定理证明	215
怎样巧证“三线共点”问题	218
怎样巧证“三点共线”问题	220
怎样证形如 $a \cdot b = c \cdot d \pm e \cdot f$ 一类平面几何题	222
怎样证形如 $a \cdot b \pm c \cdot d = e \cdot f$ 一类平面几何题	225
怎样证一类关于线段中点的问题	228
怎样用调和分割的性质证几何题	231
怎样解释与应用 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	233
怎样证明形如 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 的等式	235
怎样解初中的面积问题	238
怎样利用面积比等于线段比证题	240
怎样应用三角形面积公式	242
怎样用三角形面积公式证明几何题	244
怎样利用梯形中三角形面积的一些关系式证题	246
怎样在平面几何中联结辅助线	248
怎样用“想原形”法巧添辅助线	250
怎样在几何中使用补设未知线段法	252
怎样运用轴对称法添置辅助线	254
怎样用补全图形法巧添辅助线	256
怎样用辅助图形证平面几何题	258
怎样引设辅助圆	260
怎样证有关圆的切线问题	262
怎样应用圆幂定理证题	265
怎样证明有关半圆的内切圆问题	268
怎样应用正弦、余弦定理	270
怎样应用 $\angle A = 60^\circ$ 时的余弦定理	272
怎样用代数法和三角法解几何定值问题	274
怎样应用三角法证明线段的平方或积的和差关系	276
怎样用共边三角形的一个性质证明几何题	277
怎样用解三角形的方法证明平面几何题	280
怎样应用三角形内角平分线的性质	282
怎样解直线斜截三角形问题	284
怎样用三角形的边角规律证题	287

目录

CONTENTS

目 录
CONTENTS

怎样解三角形	291
怎样利用三角法证明线段相等	296
怎样运用三角法证线段之比的和差关系	299
怎样求三角形内一类线段的比(I)	303
怎样求三角形内一类线段的比(II)	307
怎样求三角形内一类线段的比(III)	310
怎样用几何法求条件极小值问题	312
怎样用纯几何法解几何极值问题	313
怎样求平面几何中的最值	316
怎样利用运动的相对性解一类平面几何最值题	319
怎样利用切点求最值	322
怎样用反证法证明初中几何问题	324
怎样巧用 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 证明几何题	327
怎样用参数法解平面几何问题	330
怎样用对称观点解初中几何问题	335
怎样用中心对称变换证几何题	338
怎样用旋转变换证明几何题	340
怎样推广几何问题中的结果	342
怎样用仿射变换证平面几何题	346
怎样解折纸几何题	348
怎样证明平面几何中的四点共圆问题	351
怎样巧用重心解平面几何问题	353
怎样解平面几何开放型问题	354
怎样构造几何图形解题	356
怎样用几何法证明三角不等式	357
怎样应用一个四边形面积定理	359
怎样确定平面几何的解题策略	361

第一编

代 数



今泰西之代数学，即所谓借根方法也。阿喇伯语谓之阿尔热巴喇。盖其学亦阅千百年。愈研愈精，始臻此诣，非一时一人之智力所能为也。

——薛福成《出使英法比四国日记》

怎样用实数绝对值的性质解题

实数的绝对值是一个极为重要的数学概念,有关实数绝对值的运算富有鲜明的特色.本节首先介绍实数绝对值的一个重要性质,然后从一些竞赛题入手,阐述该性质的广泛应用.

性质

$$(1) \text{ 如果 } |f_1(x)| + |f_2(x)| = \begin{cases} |f_1(x) + f_2(x)| \\ |f_1(x) - f_2(x)| \end{cases}, \text{ 则 } f_1(x) \cdot f_2(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}.$$

$$(2) \text{ 如果 } f_1(x) \cdot f_2(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } |f_1(x)| + |f_2(x)| = \begin{cases} |f_1(x) + f_2(x)| \\ |f_1(x) - f_2(x)| \end{cases}.$$

证明 因为

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| = |f_1(x) + f_2(x)|$$

$$\text{所以 } [|f_1(x)| + |f_2(x)|]^2 = |f_1(x) + f_2(x)|^2 = [f_1(x) + f_2(x)]^2$$

$$\text{所以 } |f_1(x)|^2 + 2|f_1(x)| \cdot |f_2(x)| + |f_2(x)|^2 =$$

$$f_1^2(x) + 2f_1(x) \cdot f_2(x) + f_2^2(x)$$

即

$$|f_1(x)| \cdot |f_2(x)| = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

所以

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

由绝对值的定义知 $f_1(x) \cdot f_2(x) \geq 0$.

上面证明过程步步可逆,因此知,如果 $f_1(x) \cdot f_2(x) \geq 0$,则

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| = |f_1(x) + f_2(x)|$$

同理可证,如果 $|f_1(x)| + |f_2(x)| = |f_1(x) - f_2(x)|$,则

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \leq 0$$

如果 $f_1(x) \cdot f_2(x) \leq 0$,则

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| = |f_1(x) - f_2(x)|$$

下面举例说明性质的应用.

例1 方程 $|2x - 1| + |x - 2| = |x + 1|$ 实数解的个数是().

(A)1 (B)2 (C)2 (D)3 (E)无穷多

解 原方程可变形为

$$|2x - 1| + |x - 2| = |(2x - 1) - (x - 2)|$$

由性质(1)有 $(2x - 1)(x - 2) \leq 0$,解得 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

从而,原方程有无穷多个解,故选(E).

例2 方程 $|x - 2| + |x - 3| = 1$ 实数解的个数为().

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)多于3个

解 因为原方程可变形为

$$|x - 2| + |x - 3| = |(x - 2) - (x - 3)|$$

由性质(1)有 $(x - 2)(x - 3) \leq 0$,解得 $2 \leq x \leq 3$,故选(E).

例3 解方程 $|2x - 1| - |x + 3| = 4$.

解 原方程可变形为

$$4 + |x + 3| = |2x - 1|$$

①

根据性质(2)有

(1) 如果 $4(x+3) \geq 0$, 即当 $x \geq -3$ 时, 方程①可化为

$$|4 + (x+3)| = |2x - 1|$$

即 $x + 7 = \pm(2x - 1)$, 解得 $x = 8$, 或 $x = -2$, 都是原方程的根.

(2) 如果 $4(x+3) \leq 0$, 即当 $x \leq -3$ 时, 方程①可化为

$$|4 - (x+3)| = |2x - 1|$$

即 $1 - x = \pm(2x - 1)$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}$, 都不是原方程的解.

故原方程的解为 $x = 8$ 或 $x = -2$.

例4 x 是何实数时, 方程 $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$ 成立?

解 原方程两边同乘以 $\sqrt{2}$, 并变形得

$$\sqrt{(2x-1) + 2\sqrt{2x-1} + 1} + \sqrt{(2x-1) - 2\sqrt{2x-1} + 1} = 2$$

所以 $\sqrt{(\sqrt{2x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-1} - 1)^2} = 2$

即 $|\sqrt{2x-1} + 1| + |\sqrt{2x-1} - 1| = 2$

又因为 $|\sqrt{2x-1} + 1| - |\sqrt{2x-1} - 1| = 2$

所以 $|\sqrt{2x-1} + 1| + |\sqrt{2x-1} - 1| = |(\sqrt{2x-1} + 1) - (\sqrt{2x-1} - 1)|$

由性质(1)有

$$(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{2x-1} - 1) \leq 0$$

即 $\sqrt{2x-1} \leq 1$, 所以 $x \leq 1$.

又因为 $2x-1 \geq 0$, 所以 $x \geq \frac{1}{2}$.

故当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时, 原方程成立.

例5 求满足 $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}} = 1$ 的实数 x 的一切值.

解 因为

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2} = |\sqrt{x+1}-2|$$

$$\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-3)^2} = |\sqrt{x+1}-3|$$

又因为 $|(\sqrt{x+1}-2) - (\sqrt{x+1}-3)| = 1$

所以原方程可化为

$$|\sqrt{x+1}-2| + |\sqrt{x+1}-3| = |(\sqrt{x+1}-2) - (\sqrt{x+1}-3)|$$

由性质(1)有

$$(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-3) \leq 0$$

解得

$$2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$$

即

$$3 \leq x \leq 8$$

故满足等式的实数 x 的一切值为 $3 \leq x \leq 8$.

例6 设 $y = |x-1| + |x-3| + \sqrt{4x^2+4x+1}$, 试求 y 值恒等于常数时 x 的取值范围.

解 已知等式可化为 $y = |x-1| + |x-3| + |2x+1|$, 要使 y 值恒等于常数, 有且只有两种可能: $\pm[(x-1) + (x-3) - (2x+1)] = \mp 5$. 由于 $y \geq 0$, 因此 y 只可能等于常数 5.

心得体会 拓广疑问

由性质(1),如果等式 $y = |x-1| + |x-3| + |2x+1| = |(x-1) + (x-3)| + |2x+1| = |2x-4| + |2x+1| = |(2x-4) - (2x+1)| = 5$ (常数) 成立,那必有

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ (2x-4)(2x+1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3 \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

故当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时, y 恒等于常数 5.

例7 已知 $\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$, 化简 $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} &= \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} + \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = \\ &= |\cos x + \sin x| + |\cos x - \sin x| \end{aligned}$$

因为 $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

又因为 $\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$, 即 $2\pi < 2x \leq 3\pi$.

所以根据性质(1)得:

i 当 $\cos 2x \geq 0$, 即当 $2\pi < 2x \leq \frac{5\pi}{2}$, 也就是当 $\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} &= |(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)| = \\ &= |2\cos x| = -2\cos x \end{aligned}$$

ii 当 $\cos 2x < 0$, 即 $\frac{5\pi}{2} < 2x \leq 3\pi$, 也就是当 $\frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} &= |(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)| = \\ &= |2\sin x| = -2\sin x \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = \begin{cases} -2\cos x, & \pi < x \leq \frac{5\pi}{4} \\ -2\sin x, & \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

应用性质(1)、(2) 可以简捷地解答下列一组练习.

1. 解方程: $|x-5| + \sqrt{(4-x)^2} = 1$. (答案: $4 \leq x \leq 5$)

2. 方程 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$ 的解是_____. (答案: $x=5$)

3. 方程 $|2x-1| + |x-2| = |x+1|$ 实数解的个数是().

(A)1 (B)2 (C)3 (D) 不同于上述的其他答案

(答案:(D))

心得体会 拓广 疑问

怎样用韦达定理法计算根式的值

切实掌握实数概念和熟练的计算技能,有效地研究代数方程和分析方法,是根式计算的重要前提,在这里我们研究若干个具有代表性且颇有趣味的练习,注意:我们研究的是在什么情况下,它们可以完全地使用韦达定理(包括逆定理),且能使有关根式的计算方法灵活而简单.

首先把韦达定理公式化.

如果数 m 和 n 满足方程组 $\begin{cases} m+n=-p \\ m \cdot n=q \end{cases}$, 则 m, n 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.

我们利用这个结论来证明或计算下面的例题.

例 1 证明: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

证明 在研究等式左边部分相加的两数时,这两数可分别用 m, n 来表示,很容易地计算出

$$m \cdot n = (\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}})(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}) = \sqrt[3]{20^2 - (14\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

因此,假设证明的等式正确,根据韦达定理的逆定理,则 m, n 应该是二次方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的根,也就是说,应该有

$$m = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

$$n = \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

由 $(2+\sqrt{2})^3 = 20+14\sqrt{2}$, $(2-\sqrt{2})^3 = 20-14\sqrt{2}$ 知上述两等式成立,故所证等式成立.

例 2 化简: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

解 利用数学用表(开立方表、开平方表)计算出这个表示式的近似值,得

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} &\approx \sqrt[3]{2+2.236}+\sqrt[3]{2-2.236} = \\ &\sqrt[3]{4.236}-\sqrt[3]{0.236} \approx \\ &1.618-0.618 = 1 \end{aligned}$$

现在假设 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

我们想办法来证明上述这个假设是正确的,或者推翻这个假设.

设 $m = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $n = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, 这里容易看出

$$m \cdot n = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}) = \sqrt[3]{2^2 - (\sqrt{5})^2} = -1$$

此时,根据韦达定理的逆定理可知: m 和 n 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根,即

$$m = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, n = x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由此可知下面的式子可能成立

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{①}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{②}$$

验证等式①和②,为此求等式右边部分的立方数

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8} = 2-\sqrt{5}$$

因此,等式①和②是正确的,①和②相加得

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

所以,假设是正确的.

注 这样的练习,可能得到与这解法相同的可能解和另外的方法,例如变换根式的表示法,引入二次式的立方数等,如例3.

例3 证明: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

证明 我们设法用某个二次不尽根式的立方数来表示 $5\sqrt{2}+7$,即

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2}+7 &= 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6+1 = \\ &(\sqrt{2})^3+3\sqrt{2}+3(\sqrt{2})^2+1 = (\sqrt{2}+1)^3 \end{aligned}$$

由此可得

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} = \sqrt{2}+1$$

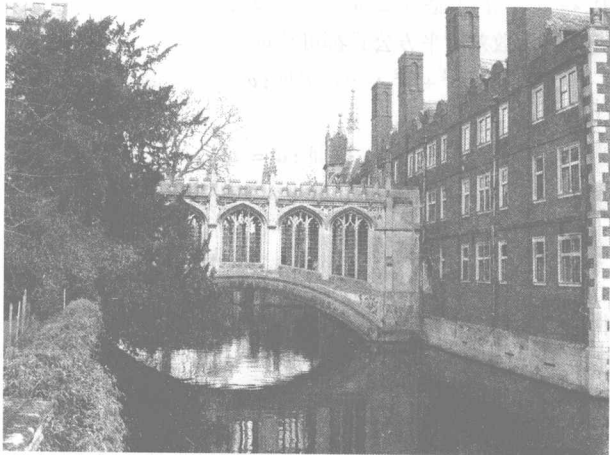
同样

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt{2}-1$$

这样两个等式相减,可得到要求的结果,即

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$$

心得 体会 拓广 疑问



怎样证明条件等式

一、求差法

在有关量相等的证明中,经常用到求差的方法,即将所要证的式子的两边的差进行推演,一直推演到为零的形式;也就是说,当在某条件下,欲证 $A = B$, 只须证得 $A - B = 0$ 即可.

例 1 若 a, b, c 为互不相等的实数,试证

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

证明 因为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-c)(b-c)} = \\ & \frac{(a-c) - (b-c) - (a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \end{aligned}$$

又 $(a-c) - (b-c) - (a-b) = 0$

所以 $\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$

例 2 若 a, b, c, d 都是正实数,且 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, 试证: $a = b = c = d$.

分析 欲证 $a = b = c = d$, 只须推出 $a - b = b - c = c - d = 0$ 即可, 考察条件中量的最高次幂为 4, 故希望能推出形如 $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + (d^2 - a^2)^2 = 0$ 的式子. 为此, 在所给条件 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ 中, 用配方法使左端成为两数差的平方和, 即

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 = -2(a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2)$$

由于 a, b, c, d 皆为正实数, 且 $(a^2 - b^2)^2, (c^2 - d^2)^2, 2(ab - cd)^2$ 的和为零, 故有 $a^2 = b^2, c^2 = d^2, ab = cd$.

由 $a^2 = b^2$, 得 $a = b$; 由 $c^2 = d^2$, 得 $c = d$.

将 $a = b, c = d$ 代入 $ab = cd$ 中, 得 $b = d$, 于是 $a = b = c = d$ 得证.

类似地, 对于下列命题用求差法并结合两数差的平方公式都可获证.

(1) 若实数 a, b, c 满足条件 $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$, 求证: $a = b = c$.

(2) 若实数 a, b, c 满足条件 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, 求证: $a = b = c$.

(3) 若实数 a, b, c, d 满足 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$, 求证: $|a| = |b| = |c| = |d|$.

二、综合法与分析法

综合法与分析法都是直接证法中经常采用的方法. 就证明的进程来讲, 综合法是一种从已知条件到结论的逻辑推理方法, 即从题设中的已知条件或已知事实出发, 推出有关事实, 直至得到所要求证的命题结论, 是一种由因果的证明方法.

分析法是一种从结论到题设(从未知到已知)的逻辑推理方法, 简言之, 是一种执果索因的证明方法. 对欲证命题“若 A 则 B ”, 先从所要证明的结论 B 出

发,寻找能使得 B 成立的充分条件 B_1 ;再以 B_1 为结果,寻找能使得 B_1 成立的充分条件 B_2, \dots ,这样一步一步地去寻求,直至能找到使得某一结论 B_k 成立的充分条件是 A ,从而使命题得证.按分析法论证“若 A 则 B ”,其模式就是:
 $B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow B_k \Leftarrow A$.

心得 体会 拓广 疑问

例 3 设 $x > 0, y > 0$, 且 $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 3\sqrt{y}(3\sqrt{y} + 2)$, 求证: $x - 9y - 10\sqrt{x} + 18\sqrt{y} + 16 = 0$.

证法 1 (综合法) 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) &= 3\sqrt{y}(3\sqrt{y} + 2) \\ \text{即} \quad x - 9y - 2\sqrt{x} - 6\sqrt{y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{即} \quad (\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2)(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 0$$

$$\text{由于} \quad x > 0, y > 0$$

$$\text{故} \quad \sqrt{x} + 3\sqrt{y} \neq 0$$

$$\text{所以} \quad \sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2 = 0$$

$$\text{即} \quad \sqrt{x} = 3\sqrt{y} + 2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{由 (1), (2) 立得} \quad x - 9y - 10\sqrt{x} + 18\sqrt{y} + 16 &= \\ x - 9y - 2\sqrt{x} - 6\sqrt{y} - 8[x - (3\sqrt{y} + 2)] &= 0 \end{aligned}$$

证法 2 (分析法) 欲证

$$x - 9y - 10\sqrt{x} + 18\sqrt{y} + 16 = 0$$

只须

$$x - 10\sqrt{x} + 25 = 9y - 18\sqrt{y} + 9 \quad (1)$$

$$\text{只须} \quad (\sqrt{x} - 5)^2 = (3\sqrt{y} - 3)^2 \quad (2)$$

$$\text{只须} \quad \sqrt{x} - 5 = 3\sqrt{y} - 3 \quad (3)$$

$$\text{只须} \quad \sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{由于} \quad \sqrt{x} + 3\sqrt{y} \neq 0 \quad (5)$$

$$\text{只须} \quad (\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 0$$

$$\text{即} \quad \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 3\sqrt{y}(3\sqrt{y} + 2)$$

最后一式已知为真,故原欲证之式成立.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, $\angle C = 60^\circ$, 试证:

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

证明 (分析法) 欲证

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

因为 $a+c, b+c, a+b+c$ 皆不为零, 只须证明

$$(a+b+c)(a+b+c) = 3(a+c)(b+c)$$

$$\text{即} \quad a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ab + 3ac + 3bc = 3ab + 3ac + 3bc + 3c^2$$

$$\text{即} \quad a^2 + b^2 - ab = c^2$$