丛书策划　华育文化传播公司

高中生学习指导

[人教B版]

GAOZHONGSHENGXUEXIZHIDAO

数学 4

必修

辽宁师范大学出版社

高中生学习指导

[人教B版]

GAOZHONGSHENGXUEXIZHIDAO

丛书主编　杜贵忠
本册主编　苏文捷
本册副主编　刘子军　邢长艳
本册编者　王　勇　王成栋　刘新风

数学 4

必修

辽宁师范大学出版社
·大　连·

图书在版编目(CIP)数据

高中生学习指导:人教 B 版.数学.必修 4/杜贵忠主编.—大连:辽宁师范大学出版社,2007.11
ISBN 978-7-81103-707-4

Ⅰ.高... Ⅱ.杜... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 183762 号

出 版 人:程培杰
责任编辑:赵 娜 王 琦
责任校对:吕英辉
封面设计:李小曼

出 版 者:辽宁师范大学出版社
地 址:大连市黄河路 850 号
邮 编:116029
营销电话:(0411)84206854 84215261 84259913(教材)
印 刷 者:沈阳全成广告印务有限公司
发 行 者:辽宁时代华育书业发展有限公司

幅面尺寸:210mm×285mm
印 张:8
字 数:240 千字

出版时间:2007 年 12 月第 1 版
印刷时间:2007 年 12 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-81103-707-4

定 价:11.50 元

编写说明

为了适应普通高中课程改革和使用新教材的需要，切实提高高中教学质量，并努力实现减轻学生的课业负担，我们组织辽宁省部分示范性高中、重点高中的知名教师，按学科编写了高中教学辅助用书《高中生学习指导》丛书。目前，完成了语文、数学、英语（两个版本）、物理、化学、生物、思想政治、历史、地理等9个学科必修教材的配套用书，共37册，供高中教师、学生选用。

丛书体例：

《高中生学习指导》按教材的章节（或单元）顺序编排，包括以下几个部分：

目标导航和知识提要：对本章节的知识结构及要点进行归纳，让学生对本章节的知识结构有个清晰的了解。

典例探源：选择典型习题或示例，并对其进行规范的分析与解答，使学生掌握正确的解题思路。

学习提点：引导学生主动探究，给予学生正确的学习方法。

学海探骊：结合本课学习内容，有针对性地精选习题，体现习题的基础性、层次性、选择性。

章末检测：对本章内容进行测试，检验学生对本章知识的掌握情况。

模块测试：对本模块教学内容进行综合测试，考查学生对模块教学内容的掌握情况。

参考答案：对全书的学海探骊、章末检测及模块测试中的习题给出正确答案，对易错题进行思路点拨。

丛书特点：

与新教材紧密配合，与课程计划同步；体现课改理念，符合课程标准要求；体现教辅用书的科学性、基础性、层次性、选择性；引导学生主动探究学科知识，指导学生掌握正确的学习方法；精选习题，注意减轻学生的学习负担；充分体现名校、名师的教学经验，实现资源共享。

本册由**东北育才学校**编写，由**苏文捷**任本册主编，**刘子军**、**邢长艳**任本册副主编。

本套丛书的编写力求贴近学生学习的实际需要，有效提高学生自主学习的能力和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。希望老师和同学们能在使用过程中，提出宝贵的补充意见和修改建议，以使本套丛书在修订后更臻完善。

杜贵忠

目录

第一章　基本初等函数(Ⅱ)

第二章　平面向量

第三章 三角恒等变换

第一章　基本初等函数(Ⅱ)

【目标导航】

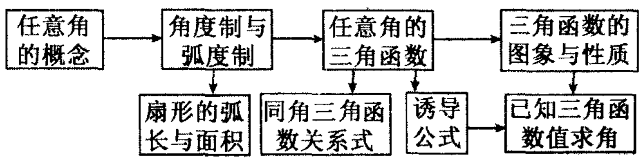
本章地位:三角函数是高中数学的重要内容之一,跨学科应用是它的鲜明特点.在解答立体几何、解析几何问题时,三角函数是常用工具,更是物理学科的基本工具.

本章内容:本章主要内容包括:三角函数的概念,用同角三角函数间的关系式和诱导公式求任意角的三角函数值,弧度制,三角函数的性质.

学习目标:1.初步掌握三角函数式的变形,化简,求值.

2.灵活运用三角函数的图象性质解答问题.

知识框架:



1.1　任意角的概念与弧度制

1.1.1　角的概念的推广

知识提要

1.角的定义

一条射线绕着它的端点 O,从起始位置 OA 旋转到终止位置 OB,形成一个角 α,点 O 是角的顶点,射线 OA、OB 分别是角 α 的始边、终边.

说明:在不引起混淆的前提下,"角 α"或"$\angle\alpha$"可以简记为 α.掌握角的概念要注意角的三要素:顶点、始边、终边,角的大小可以是任意的.

2.角的分类

(1)正角:按照逆时针方向旋转而成的角叫做正角;

(2)负角:按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角;

(3)零角:当射线没有旋转时,我们也把它看成一个角,叫做零角.

说明:(1)零角的始边和终边重合;

(2)旋转生成的角,又叫做转角;

(3)各角和的旋转量等于各角旋转量的和.

3.象限角

在直角坐标系中,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负轴重合,则

(1)象限角:角的终边(端点除外)在第几象限,就把这个角叫做第几象限角.

例如:30°,390°,-330°角都是第一象限角;300°,-60°角是第四象限角.

(2)非象限角(也称象限间角、轴线角):角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限.

例如：90°、180°、270°角都是非象限角.

说明：角的始边“与 x 轴的非负半轴重合”不能说成是“与 x 轴的正半轴重合”. 因为 x 轴的正半轴不包括原点，就不完全包括角的始边，角的始边是以角的顶点为端点的射线.

4. 终边相同的角的集合

所有与角 α 终边相同的角以及 α 本身组成一个集合，这个集合可记为

$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，

即任意一个与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与周角的整数倍的和.

说明：终边相同的角不一定相等，相等的角终边一定相同.

典例探源

例 1 在 $-720°\sim720°$ 之间，写出与 60° 终边相同的角的集合 S.

【解】 与 60° 终边相同的角以及 60° 本身组成的集合为

$\{\beta|\beta=60°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$.

令 $-720°<60°+k\cdot 360°<720°$，

得 $k=-2,-1,0,1$，

相应的 β 为 $-660°,-300°,60°,420°$.

从而 $S=\{-660°,-300°,60°,420°\}$.

感悟：与角 α 终边相同的角以及 α 本身可记为 $\beta=\alpha+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$，其中：

(1) $k\in \mathbf{Z}$；

(2) α 是任意角；

(3) $k\cdot 360°$ 与 α 之间用“+”连接，如 $k\cdot 360°-30°$ 应看做 $(-30°)+k\cdot 360°$；

(4)终边相同的角不一定相等，但相等的角终边必相同，终边相同的角有无数个，它们彼此相差 360° 的整数倍；

(5)检查两角 α_1、α_2 终边是否相同，只需看 $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{360°}$ 是否为整数.

变式 1—1 把 1 230°，−3 290° 写成 $k\cdot 360°+\alpha$（其中 $0°\leqslant\alpha<360°$，$k\in \mathbf{Z}$）的形式.

【分析】 用所给角除以 360°，将余数作 α.

【解】 ∵1 230÷360=3 余 150，

∴1 230°=3×360°+150°.

∵−3 290÷360=−10 余 310，

∴−3 290°=−10×360°+310°.

注意：当负角除以 360° 时，为保证余数为正角，试商时应使得到的负角的绝对值大于已知负角的绝对值.

变式 1—2 在 $0°\sim360°$ 中，求出与下列各角终边相同的角，并判定它们分别是第几象限的角.

(1) 909°；(2) $-503°36'$.

【分析】 求解本题，其关键在于正确得到 $\alpha+k\cdot 360°(0°\leqslant\alpha<360°, k\in \mathbf{Z})$ 中 k 的值，即用给出的角去除以 360° 所得到的整数部分.

【解】 (1) ∵909°=189°+2×360°，

∴189° 即为所求的角，它是第三象限角，故 909° 也是第三象限角.

(2) ∵$-503°36'=216°24'-2\times360°$，

∴$216°24'$ 即为所求的角，它是第三象限角，故 $-503°36'$ 也是第三象限角.

说明：在 $0°\sim360°$ 中，求终边与给定的角终边相同的角时，若题中给定的角是负角，在用式子 $\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$ 表示时，k 的值要比正常除法所得整数小一个单位才能使余数在 $0°\sim360°$ 之间，故这里的 k 只能取 −2，而不能取 −1，若取 −1，则 $-503°36'=-143°36'-360°$，这种形式对解本题并无作用，因为 $-143°36'$ 不在 $0°\sim360°$ 之间.

例 2 用集合表示：

(1)第三象限角的集合；

(2)终边落在 y 轴右侧的角的集合.

【解】 (1)在 $0°\sim360°$ 中，第三象限角的范围为 $180°<\alpha<270°$，而与每个角 α 终边相同的角可记为 $\alpha+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$，故该范围中的每个角满足 $k\cdot 360°+180°<\beta<k\cdot 360°+270°, k\in \mathbf{Z}$，故第三象限角的集合为

$\{\beta|k\cdot 360°+180°<\beta<k\cdot 360°+270°, k\in \mathbf{Z}\}$.

拓展：第一、二、四象限角的集合的表示法：

$M=\{\beta|k\cdot 360°<\beta<90°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$；

$P=\{\beta|90°+k\cdot 360°<\beta<180°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$；

$Q=\{\beta|270°+k\cdot 360°<\beta<360°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$.

说明：区间角的集合的表示不唯一.

(2)在 $-180°\sim180°$ 中，y 轴右侧的角可记为 $-90°<\alpha<90°$，同样把该范围“旋转”$k\cdot 360°$ 后，得 $-90°+k\cdot 360°<\beta<90°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$，故 y 轴右侧角的集合为

$\{\beta|k\cdot 360°-90°<\beta<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$.

说明：一个角按顺、逆时针旋转 $k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$ 后与原来角终边重合，同样一个“区间”内的角按

顺、逆时针旋转 $k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$后，所得“区间”仍与原区间重叠.

变式 2—1　分别写出：

(1)终边落在 y 轴负半轴上的角的集合；

(2)终边落在 x 轴上的角的集合；

(3)终边落在第一、三象限角平分线上的角的集合；

(4)终边落在第二、四象限角平分线上的角的集合.

【解】　(1)$\{\alpha|\alpha=-90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2)$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(3)$\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(4)$\{\alpha|\alpha=-45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

变式 2—2　请用集合表示下列各角.

(1)0°～90°间的角；(2)第一象限角；(3)锐角；(4)小于 90°的角.

【解】　(1)$\{\alpha|0°\leqslant\alpha<90°\}$.

(2)$\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)$\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$.

(4)$\{\alpha|\alpha<90°\}$.

感悟：第一象限角未必是锐角，小于 90°的角不一定是锐角，0°～90°间的角，根据课本约定它包括 0°，但不包含 90°.

变式 2—3　写出 $y=\pm x(x\geqslant0)$所夹区域内的角的集合.

【解】　当 α 终边落在 $y=x(x\geqslant0)$上时，角的集合为$\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$；

当 α 终边落在 $y=-x(x\geqslant0)$上时，角的集合为$\{\alpha|\alpha=-45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$；

所以，按逆时针方向旋转所求集合为

$S=\{\alpha|-45°+k\cdot360°<\alpha<45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

例 3　若 α 是第二象限角，则 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$分别是第几象限角？

【解】　(1)∵α 是第二象限角

∴$k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$

则 $k\cdot720°+180°<2\alpha<k\cdot720°+360°$,

故 2α 是第三或第四象限角，或角的终边在 y 轴的负半轴上.

(2)∵$k\cdot180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+90°(k\in\mathbf{Z})$,

当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+90°$，则$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角.

当 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°$，则$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角.

∴$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角.

(3)∵$k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°$,

当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°$，则$\frac{\alpha}{3}$是第一象限角.

当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°$，则$\frac{\alpha}{3}$是第二象限角.

当 $k=3n+2$ 时，$n\cdot360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°$，则$\frac{\alpha}{3}$是第四象限角.

综上所述，$\frac{\alpha}{3}$是第一或第二或第四象限角.

拓展：依照(2)中的方法，可得到以下规律：当 α 分别是第一、二、三、四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$顺次是第一或三、一或三、二或四、二或四象限角. 仿此，还可进一步考虑$\frac{\alpha}{3}$的情形，有兴趣的读者不妨一试. 另外，应注意，在(1)中，不可把 2α 角答成是第三或第四象限角，因为终边在 y 轴负半轴上的角 $270°+k\cdot720°(k\in\mathbf{Z})$也是它的一个解，而此角不属于任何象限.

变式 3　(2005 全国卷Ⅲ理第 1 题，文第 1 题)已知 α 为第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是　(　)

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

C. 第二或第四象限

【解】　D

学习提点

判断一个角 α 是第几象限角时，只要把 α 改写成 $\alpha'+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\alpha'<360°$的形式，那么 α'在第几象限，α 就是第几象限角. 若角 α 与角 β 满足 $\alpha-\beta=(2k)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$，则 α、β 终边相同；若角 α 与 β 满足 $\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$,

则 α、β 终边互为反向延长线.判断一个角所在象限或不同角之间的终边关系时,可首先把它们化为 $\alpha'+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}(0°\leqslant\alpha'<360°)$ 这种形式,然后只要考查 α' 的相关问题即可.另外,数形结合思想、运动变化观点都是学习本课内容的重要思想方法.

学海探骊

基础达标

1. 时针走过 3 小时 20 分,则分针所转过的角的度数为________,时针所转过的角的度数为________.

2. α 是 $180°\sim360°$ 之间的一个角,若 5α 与 α 有相同始边,且又有相同终边,则 $\alpha=$________.

3. 与 $-1\,778°$ 的终边相同且绝对值最小的角是________.

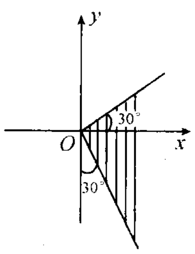
4. 若角 α 与角 β 的终边重合,则 α 与 β 的关系是____________;若角 α 与角 β 的终边在一条直线上,则 α 与 β 的关系是____________.

5. 设 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+45°, k\in\mathbf{Z}\}$,
$B=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+225°, k\in\mathbf{Z}\}$,
$C=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+455°, k\in\mathbf{Z}\}$,
$D=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-135°, k\in\mathbf{Z}\}$,
$E=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+45°$ 或 $\alpha=k\cdot360°+225°, k\in\mathbf{Z}\}$.
则相等的角的集合有____________.

6. 若 α 是第四象限角,则 $\pi-\alpha$ 是 ( )

A. 第一象限角　　B. 第二象限角
C. 第三象限角　　D. 第四象限角

7. 如图,终边落在阴影处(包括边界)的角的集合为 ( )



(第 7 题)

A. $\{\alpha|-60°\leqslant\alpha\leqslant60°\}$
B. $\{\alpha|k\cdot180°-60°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+30°, k\in\mathbf{Z}\}$
C. $\{\alpha|k\cdot360°+30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°-60°, k\in\mathbf{Z}\}$
D. $\{\alpha|k\cdot360°-60°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+30°, k\in\mathbf{Z}\}$

能力拓展

8. 已知 2α 的终边在 x 轴的上方,那么 α 是第________象限角.

9. 给出下列命题:

①$30°$和$-30°$角的终边方向相反;
②$-330°$和$-390°$角的终边相同;
③第一象限角和锐角终边相同;
④$\alpha=(2k+1)\cdot180°$与$\beta=(4k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$的终边相同;
⑤设 $M=\{x|x=45°+k\cdot90°, k\in\mathbf{Z}\}$,
$N=\{y|y=90°+k\cdot45°, k\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\subsetneqq N$.

其中所有正确命题的序号是____________.

10. 经过 3 小时 35 分钟,时针与分针转过的度数之差是 ( )

A. $1\,182.5°$　　B. $-1\,182.5°$
C. $1\,182.3°$　　D. $-1\,182.3°$

11. 若两角 α、β 的终边关于原点对称,那么 ( )

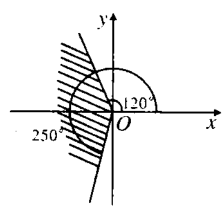
A. $\alpha-\beta=k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$
B. $\alpha+\beta=180°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$
C. $\alpha+\beta=k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$
D. $\alpha-\beta=-180+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

12. 设 $0°<\beta<360°$,且 5β 的终边与 x 轴非负半轴重合,则这样的角最多有 ( )

A. 2 个　　B. 3 个
C. 4 个　　D. 5 个

创新视点

13. 如图所示,写出图中阴影部分(包括边界)的角的集合,并指出 $-950°12'$ 是否是该集合中的角.



(第 13 题)

14. 若角 α 的终边经过点 $P(-1,-\sqrt{3})$,试写出角 α 的集合,并求出集合中绝对值最小的角.

15. 写出终边在函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}|x|$ 的图象上的角的集合 M,并指出其中在 $(-360°,360°)$ 内的角.

1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算

知识提要

1. 弧度角的概念

规定:我们把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角,记此角为 1 rad.

练习:圆的半径为 r,分别求圆弧长为 $2r$、$3r$、$\frac{r}{2}$的弧所对的圆心角.

说明:一个角的弧度由该角的大小来确定,与求比值时所取圆的半径的大小无关.

思考:什么是 π 弧度角? 一个周角的弧度是多少? 一个平角、直角的弧度分别是多少?

2. 弧度的推广及角的弧度数的计算

规定:正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零;角 α 的弧度数的绝对值是$|\alpha|=\frac{l}{r}$,(其中 r 是圆的半径,l 是以角 α 为圆心角时所对的弧长).

说明:我们用弧度制表示角的时候,"弧度"或 rad 经常省略,即只写一实数表示角的度数.

例如:当弧长 $l=4\pi r$ 且所对的圆心角表示负角时,这个圆心角的弧度数是 $-|\alpha|=-\frac{l}{r}=-\frac{4\pi r}{r}=-4\pi$.

3. 角度与弧度的换算

$360°=2\pi$ rad

$180°=\pi$ rad

$1°=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx0.017\ 45$ rad

$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx57.30°=57°18'$

4. 一些特殊角的度数与弧度数的对应表:

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

5. 弧长公式

由$|\alpha|=\frac{l}{r}$(其中 l 表示 α 所对的弧长),

则弧长公式为 $l=|\alpha|\cdot r$.

6. 扇形面积公式

$$S=\pi r^2\cdot\frac{|\alpha|}{2\pi}=\pi r^2\frac{\frac{l}{r}}{2\pi}=\frac{1}{2}lr.$$

说明:(1)弧度制下的公式要简洁得多;

(2)以上公式中的 α 必须是以弧度为单位的角.

7. 角度制与弧度制的比较

引进弧度制后,我们应将它与角度制进行比较,同学们应明确:

(1)弧度制是以"弧度"为单位度量角的制度,角度制是以"度"为单位度量角的制度;

(2)1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小,而 1°是圆的$\frac{1}{360}$所对的圆心角(或该弧)的大小;

(3)不论是以"弧度"还是以"度"为单位的角的大小都是一个与半径大小无关的定值.

典例探源

例 1　用弧度制分别表示轴线角、象限角的集合.

(1)终边落在 x 轴的非正、非负半轴,y 轴的非正、非负半轴的角的集合;

(2)第一、二、三、四象限角的弧度表示.

【解】　(1)终边落在 x 轴的非正半轴的角的集合为$\{\beta|\beta=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 x 轴的非负半轴的角的集合为$\{\beta|\beta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 y 轴的非正半轴的角的集合为$\left\{\beta|\beta=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

终边落在 y 轴的非负半轴的角的集合为$\left\{\beta|\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)第一象限角为$\left\{\beta|2k\pi<\beta<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

第二象限角为$\left\{\beta|2k\pi+\frac{\pi}{2}<\beta<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$;

第三象限角为$\left\{\beta|2k\pi+\pi<\beta<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

第四象限角为$\left\{\beta|2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\beta<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

变式 1—1　将下列各角化为 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式,并判断其所在象限.

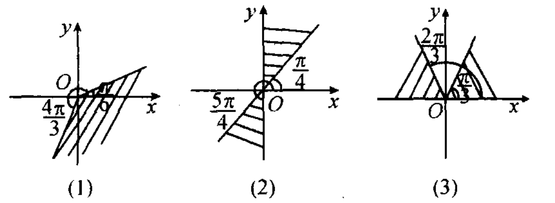
(1)$\frac{19}{3}\pi$;(2)$-315°$.

【解】　(1)$\frac{19}{3}\pi=6\pi+\frac{\pi}{3}=3\times2\pi+\frac{\pi}{3}$,所以此角为第一象限角.

(2)$-315°=-\frac{7}{4}\pi=-2\pi+\frac{\pi}{4}=(-1)\times2\pi+\frac{\pi}{4}$,所以此角为第一象限角.

变式 1—2　如图,用弧度制表示下列终边落在阴

影部分的角的集合(不包括边界).



(变式 1—2 图)

【解】 (1)如图(1),按逆时针方向,在区间$[-\pi,\pi)$上与角$\frac{4}{3}\pi$终边相同的角为$-\frac{2}{3}\pi$,故所求集合为

$S=\left\{\alpha \mid 2k\pi-\frac{2}{3}\pi<\alpha<2k\pi+\frac{1}{6}\pi,k\in \mathbf{Z}\right\}$.

(2)图(2)中第三象限部分可看成是由第一象限的阴影部分绕原点旋转π弧度而成的,故所求集合可表示为$S=\left\{\alpha \mid k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$.

说明:当两区域的边界互为反向延长线时,只用“$k\pi+\alpha<x<k\pi+\beta$”就可以表示.

(3)所求集合为$S=\left\{\alpha \mid 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in \mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{2}{3}\pi<\alpha<2k\pi+\pi,k\in \mathbf{Z}\right\}$,如图(3)所示.

例 2 (1)已知扇形OAB的圆心角α为$120°$,半径$r=6$,求弧长AB及扇形面积.

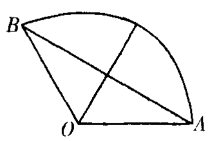
(2)已知扇形周长为 20 cm,当扇形的圆心角为多大时它有最大面积,最大面积是多少?

【解】 (1)$\because 120°=\frac{2\pi}{3}$,$\therefore S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot 36=12\pi$.

(2)设弧长为l,半径为r,由已知$l+2r=20$,所以$l=20-2r$,$|\alpha|=\frac{l}{r}=\frac{20-2r}{r}$.

从而$S=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{20-2r}{r}\cdot r^2=-r^2+10r=-(r-5)^2+25$,

当$r=5$时,S最大,最大值为 25,这时$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{20-2r}{r}=2$.



(变式 2—1 图)

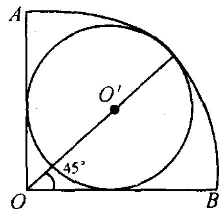
变式 2—1 如图,扇形OAB的面积是 4 cm^2,它的周长是 8 cm,求扇形的圆心角及弦AB的长.

【解】 设扇形的弧长为l,半径为r,则有

$\begin{cases}l+2r=8\\ \frac{1}{2}lr=4\end{cases}$,解得$\begin{cases}l=4\\ r=2\end{cases}$.

所以,圆心角为$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{4}{2}=2$,弦长$=2\times 2\sin 1=4\sin 1$.

变式 2—2 在扇形AOB中,$\angle AOB=90°$,弧长为l,则此扇形内切圆的面积为________.



(变式 2—2 解图)

【解】 如图,设扇形半径为r,内切圆半径为x,则由$l=\frac{\pi}{2}\cdot r$,得$r=\frac{2l}{\pi}$.

$\because r=x+\sqrt{2}x$,

$\therefore x=\frac{r}{\sqrt{2}+1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)l}{\pi}$.

$\therefore S_{\odot O'}=\pi x^2=\pi\frac{4(3-2\sqrt{2})}{\pi^2}l^2=\frac{4(3-2\sqrt{2})}{\pi}l^2$.

变式 2—3 已知两角的和为 1 弧度,且两角的差为 1°,求这两个角各是多少弧度.

【分析】 设两角的弧度数分别是x、y,通过列方程组,就可以求出x、y,但要注意单位的统一.

【解】 设两角的弧度数分别是x、y,因为$1°=\frac{\pi}{180}$,

则依题意,得$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=\frac{\pi}{180}\end{cases}$,解之得

$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360}\\ y=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{360}\end{cases}$.

即所求两角的弧度数分别为$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360}$,$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{360}$.

学海探骊

基础达标

1.一条弦长等于半径的$\frac{1}{2}$,则此弦所对圆心角 ( )

A.等于$\frac{\pi}{6}$弧度 B.等于$\frac{\pi}{3}$弧度

C.等于$\frac{1}{2}$弧度 D.以上都不对

2.把$-1\ 485°$化为$2k\pi+\alpha(k\in \mathbf{Z},0\leqslant\alpha<2\pi)$的形式是 ( )

A.$-8\pi+\frac{\pi}{4}$ B.$-8\pi-\frac{7}{4}\pi$

C.$-10\pi-\frac{\pi}{4}$ D.$-10\pi+\frac{7}{4}\pi$

3.扇形的周长是 16,圆心角是 2 弧度,则扇形面

积是 (　　)

A. 16π　　B. 32π　　C. 64　　D. 32

4. 3弧度的角的终边在第________象限，7弧度的角的终边在第________象限.

能力拓展

5. 在半径为 r 的圆中，扇形的周长等于半圆的长，那么扇形的圆心角是多少度？扇形的面积是多少？

6. 在直径为 10 cm 的滑轮上有一条弦，其长为 6 cm，且 P 为弦的中点，滑轮以每秒 5 弧度的角速度旋转，经过 5 s 后，P 点转过的弧长是多少？

创新视点

7. 扇形 AOB 的面积为 1 cm^2，它的周长为 4 cm，求扇形圆心角的弧度数及弦长 AB 的长.

8. 一扇形周长是 32 cm，扇形的圆心角为多少弧度时，这个扇形的面积最大？最大面积是多少？

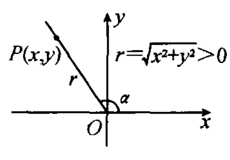
1.2　任意角的三角函数

1.2.1　三角函数的定义

知识提要

1. 三角函数的定义

在直角坐标系中，设 α 是一个任意角，α 终边上任意一点 P(除了原点)的坐标为(x,y)，它与原点的距离为 r($r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0$)，那么



(1) $\frac{y}{r}$叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

(2) $\frac{x}{r}$叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

(3) $\frac{y}{x}$叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$；

(4) $\frac{x}{y}$叫做 α 的余切，记作 $\cot\alpha$，即 $\cot\alpha=\frac{x}{y}$；

(5) $\frac{r}{x}$叫做 α 的正割，记作 $\sec\alpha$，即 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$；

(6) $\frac{r}{y}$叫做 α 的余割，记作 $\csc\alpha$，即 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

说明：①α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，α 的终边没有表明 α 一定是正角或负角以及 α 的大小，只表明与 α 的终边相同的角所在的位置；

②根据相似三角形的知识，对于确定的角 α，六个比值不随点 $P(x,y)$在 α 的终边上的位置的改变而改变大小；

③当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$\alpha$ 的终边在 y 轴上，终边上任意一点的横坐标 x 都等于 0，所以 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$与 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$无意义；同理，当 $\alpha=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$\cot\alpha=\frac{x}{y}$与 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$无意义；

④除以上两种情况外，对于确定的角 α，比值 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{r}{x}$、$\frac{r}{y}$分别是一个确定的实数，所以正弦、余弦、正切、余切、正割、余割是以角为自变量，以比值为函数值的函数，以上六种函数统称为三角函数.

2. 三角函数的定义域、值域

函　数	定　义　域	值　域
$y=\sin\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$y=\cos\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$y=\tan\alpha$	$\left\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$	$\mathbf{R}$

3. 三角函数在各象限的符号

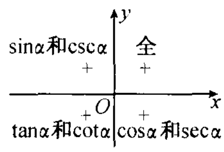
由三角函数的定义，以及各象限内点的坐标的符号，我们可以得知：

(1)正弦值 $\frac{y}{r}$ 对于第一、二象限为正（$y>0$，$r>0$），对于第三、四象限为负（$y<0$，$r>0$）；

(2)余弦值 $\frac{x}{r}$ 对于第一、四象限为正（$x>0$，$r>0$），对于第二、三象限为负（$x<0$，$r>0$）；

(3)正切值 $\frac{y}{x}$ 对于第一、三象限为正（x，y 同号），对于第二、四象限为负（x，y 异号）.

以上结果如图所示：



典例探源

例 1 若角 α 的终边经过点 $P(-1,-\sqrt{3})$，试求角 α 的六个三角函数值和角 α 的集合 A，并求出集合 A 中绝对值最小的角.

【分析】 应先求出 x,y,r 的值.

【解】 如图所示. $\because x=-1$，

$y=-\sqrt{3}$，

$\therefore r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$.

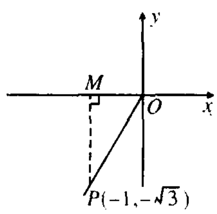
则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$，

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$，

$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\sec\alpha=\frac{r}{x}=-2$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



（例 1 解图）

又 $\because \sin\angle POM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \angle POM=60°$.

$\therefore A=\{\alpha\,|\,\alpha=240°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

故 A 中绝对值最小的角是 $-120°$.

说明：此例是典型的考查定义的题.

变式 1 已知角的终边过点 $(a,2a)(a\neq 0)$，求 α 的六个三角函数值.

【解】 因为过点 $(a,2a)(a\neq 0)$，所以 $r=\sqrt{5}|a|$，$x=a$，$y=2a$.

当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2a}{\sqrt{5}|a|}=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$，$\cot\alpha=\frac{1}{2}$，

$\sec\alpha=\sqrt{5}$，$\csc\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$；

当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2a}{\sqrt{5}|a|}=\frac{2a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$，

$\cot\alpha=\frac{1}{2}$，$\sec\alpha=-\sqrt{5}$，$\csc\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

说明：若终边落在轴线上，则可用定义求出三角函数值.

例 2 若 $\sin 2\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，试确定 α 所在的象限.

【解】 $\because \sin 2\alpha>0$，$\therefore 2\alpha$ 在第一或第二象限，即 $2k\pi<2\alpha<2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore k\pi<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时，设 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$，有

$2m\pi<\alpha<2m\pi+\frac{\pi}{2}(m\in\mathbf{Z})$；

当 k 为奇数时，设 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，有

$2m\pi+\pi<\alpha<2m\pi+\frac{3\pi}{2}(m\in\mathbf{Z})$.

$\therefore \alpha$ 为第一或第三象限的角.

又由 $\cos\alpha<0$ 可知 α 在第二或第三象限.

综上所述，α 在第三象限.

变式 2 若 θ 是第二象限的角，判断 $\frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin 2\theta)}$ 的符号.

【分析】 确定符号，关键是确定每个因式的符号，而要分析每个因式的符号，关键看角所在象限.

【解】 $\because 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore -1<\cos\theta<0$，$4k\pi+\pi<2\theta<4k\pi+2\pi$，$-1<\sin 2\theta<0$.

$\therefore \sin(\cos\theta)<0$，$\cos(\sin 2\theta)>0$.

$\therefore \frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin 2\theta)}<0$.

例 3 若 α 是第二象限角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

【解】 ∵α是第二角限角，

∴$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$

∴$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

∴$\frac{\alpha}{2}$终边在第一或第三象限.

又∵$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，∴$\cos\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$.

故$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角.

学习提点

本节的重点是任意角三角函数的定义、终边相同的三角函数公式以及三角函数值符号的确定.其中重点掌握三角函数的定义和终边相同的三角函数公式，还应熟记特殊角的三角函数值.

学海探骊

基础达标

1. 给出下列各三角函数：

①$\sin(-1\ 000°)$；②$\cos(-2\ 200°)$；

③$\tan(-10°)$；④$\sin\frac{7}{10}\pi\cos\pi\cot\frac{17}{9}\pi$.

其中符号为负的是 ( )

A. ① B. ② C. ③ D. ④

2. 若α为第二象限角，那么$\sin 2\alpha$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\sec 2\alpha$，$\sec\frac{\alpha}{2}$中，其值必为正的有 ( )

A. 0个 B. 1个

C. 2个 D. 3个

3. 若$0<a<1$，$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，则$\frac{\sqrt{(a-x)^2}}{x-a}-\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|1-a^x|}{a^x-1}$的值是 ( )

A. 1 B. -1 C. 3 D. -3

4. 若600°角的终边上有一点$(-4,a)$，则a的值是 ( )

A. $4\sqrt{3}$ B. $-4\sqrt{3}$

C. $\pm4\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

5. 若θ是第三象限角，且$\cos\frac{\theta}{2}<0$，则$\frac{\theta}{2}$是 ( )

A. 第一象限角 B. 第二象限角

C. 第三象限角 D. 第四象限角

6. 已知$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且α是第二象限角，那么$\tan\alpha$的值为 ( )

A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

7. 已知点$P(\tan\alpha,\cos\alpha)$在第三象限，则角α在 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

8. 已知$\sin\alpha\tan\alpha\geqslant 0$，则$\alpha$的取值范围是________.

9. 角α的终边上有一点$P(m,5)$，且$\cos\alpha=\frac{m}{13}$ $(m\neq 0)$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$________.

10. 已知角θ的终边在直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$上，则$\sin\theta=$________，$\tan\theta=$________.

11. 设$\theta\in(0,2\pi)$，点$P(\sin\theta,\cos 2\theta)$在第三象限，则角$\theta$的取值范围是________.

创新视点

12. 设θ分别是第二、三、四象限角，则点$P(\sin\theta,\cos\theta)$分别在第______、______、______象限.

13. 函数$y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|\tan x|}{\tan x}+\frac{\cot x}{|\cot x|}$的值域为________.

能力拓展

14. 角α终边上的点P与点$A(a,b)$关于x轴对称$(a\neq 0,b\neq 0)$，角β终边上的点Q与点A关于直线$y=x$对称，求$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}$的值.

15. 若角θ的终边落在直线$15x=8y$上，试求$\log_2|\sec\alpha-\tan\alpha|$的值.

反思提升

化简$\frac{\tan^2\alpha-\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

1.2.2 单位圆与三角函数线

知识提要

当角的终边上一点 $P(x,y)$ 的坐标满足 $\sqrt{x^2+y^2}=1$ 时，有三角函数正弦、余弦、正切值的几何表示——三角函数线.

1. 单位圆

圆心在原点 O,半径等于单位长的圆叫做单位圆.

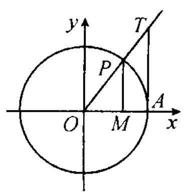
2. 有向线段

坐标轴是规定了方向的直线，那么与之平行的线段亦可规定方向.

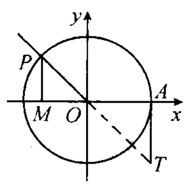
规定：与坐标轴方向一致时为正，与坐标轴方向相反时为负.

3. 三角函数线的定义

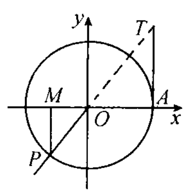
设任意角 α 的顶点在原点 O，始边与 x 轴非负半轴重合，终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，它与角 α 的终边或其反向延长线交于点 T.



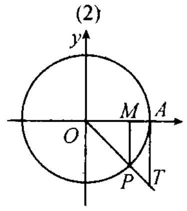
(1)



(2)



(3)



(4)

由四个图看出：

当角 α 的终边不在坐标轴上时，有向线段 $OM=x$，$MP=y$，于是有

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y=MP,$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x=OM,$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT.$$

我们就分别称有向线段 MP、OM、AT 为正弦线、余弦线、正切线.

说明：

(1)三条有向线段的位置：正弦线是 α 的终边与单位圆的交点到 x 轴的垂直线段；余弦线在 x 轴上；正切线在过单位圆与 x 轴正方向的交点的切线上. 三条有向线段中两条在单位圆内，一条在单位圆外；

(2)三条有向线段的方向：正弦线由垂足指向 α 的终边与单位圆的交点，余弦线由原点指向垂足，正切线由切点指向切线与 α 的终边的交点；

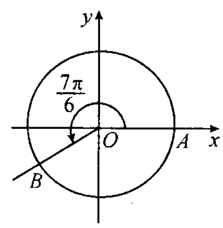
(3)三条有向线段的正负：三条有向线段凡与 x 轴或 y 轴同向的为正值，与 x 轴或 y 轴反向的为负值；

(4)三条有向线段的书写：有向线段的起点字母在前，终点字母在后.

典例探源

例 1 求 $\frac{7\pi}{6}$ 的正弦、余弦和正切值.

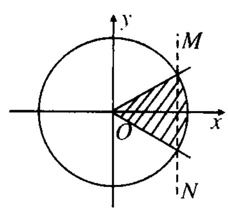
【解】 如图，在直角坐标系中，作 $\angle AOB=\frac{7\pi}{6}$，则 $\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点坐标为 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，故由三角函数定义得 $\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，$\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\frac{7\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(例 1 解图)

例 2 解不等式 $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】 先在 x 轴上找到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 作 x 轴的垂线，交单位圆于 M，N 两点，则以射线 OM，ON 为终边的角的集合即为方程 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集，而劣弧 MN 对应的角(阴影部分)即为不等式 $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集，如图所示.



(例 2 图)

【解】 终边 OM，ON 对应的角为 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，故不等式 $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

感悟： 解不等式时，要注意终边上角的取舍. 在 x 轴下方的角在书写时往往用负角表示比较方便.

变式 2 利用单位圆写出符合下列条件的角 x 的取值范围.

(1)$\sin x<-\frac{1}{2}$;(2)$\cos x>\frac{1}{2}$;

(3)$0<x<\pi$,$\sin x>\frac{1}{2}$,且 $\cos x<\frac{1}{2}$;

(4)$|\cos x|\leqslant\frac{1}{2}$;(5)$\sin x\geqslant\frac{1}{2}$,且 $\tan x\leqslant-1$.

【解】 (1)$\frac{7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(2)$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(3)$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}$.

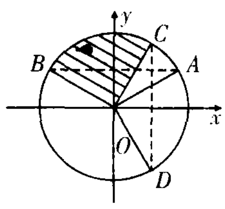
(4)$\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(5)$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

例 3 求函数 $y=\lg(2\sin x-1)+\sqrt{1-2\cos x}$ 的定义域.

【解】 由题意得 $\begin{cases}2\sin x-1>0\\1-2\cos x\geqslant0\end{cases}$,

即 $\begin{cases}\sin x>\frac{1}{2}\\\cos x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$,同样以例 1 与例 2 的方法确定终边(如图),得到劣弧 ACB 和优弧 CBD 的公共部分对应角的范围是 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right),k\in\mathbf{Z}$,即函数的定义域为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right),k\in\mathbf{Z}$.



(例 3 解图)

感悟:首先要把不等式变为基本型(最简单的三角不等式),对于三角不等式组应分别确定区域,取其公共部分,有些同学易将答案写成 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,因此在没有确定角范围的情况下,不能忘记将角加以推广.

例 4 求证:当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,有 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

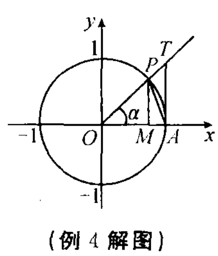
【分析】 这是三角函数的经典问题,体现了角及其正弦、正切的关系.直接化简不容易解决问题,考虑角 α,$\sin\alpha$,$\tan\alpha$ 的几何意义,用三角函数线法会很轻松地完成证明.

【解】 如图所示,

$\because\sin\alpha=MP,\tan\alpha=AT$,

$S_{\triangle AOP}<S_{扇形OPA}<S_{\triangle OAT}$.

又$\because S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}OA\cdot MP=\frac{1}{2}MP=\frac{1}{2}\sin\alpha$,



(例 4 解图)

$S_{扇形OPA}=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot OA^2=\frac{1}{2}\alpha$,

$S_{\triangle OAT}=\frac{1}{2}OA\cdot AT=\frac{1}{2}AT=\frac{1}{2}\tan\alpha$,

$\therefore\frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\tan\alpha$,$\therefore\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

感悟:此题巧妙地利用三角函数线和三角形、扇形的面积公式证明了结论,很值得我们学习.对于“当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,有 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$”这个结论,是我们在三角函数判断中常用的结论.

学习提点

1.作三角函数线时要注意以下几点:

(1)位置 (2)方向 (3)正负

2.三角函数线的应用

(1)利用单位圆定义三角函数求三角函数值;

(2)利用单位圆中的三角函数线解三角函数方程与三角不等式;

(3)利用单位圆中的三角函数线求函数定义域;

(4)利用单位圆中的三角函数线比较三角函数值的大小.

学海探骊

基础达标

1.满足 $\tan\alpha\geqslant\cot\alpha$ 的角 α 的一个取值范围是 ( )

A.$\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ B.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ D.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

2.设角 α 是第四象限角,则 $\tan\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 的大小关系是 ( )

A.$\sin\alpha>\tan\alpha$ B.$\sin\alpha<\tan\alpha$

C.$\sin\alpha\geqslant\tan\alpha$ D.不确定

3.已知 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,在单位圆中角 θ 的正弦线、余弦线、正切线分别是 a、b、c,则它们的大小关系是 ( )

A.$a>b>c$ B.$c>a>b$

C.$c>b>a$ D.$b>c>a$

4.下列命题中为真命题的是 ( )

A.三角形的内角必是第一象限角或第二象限角

B.角 α 的终边在 x 轴上时,角 α 的正弦线、正切线分别变成一个点