高等数学学习与辅导

赵晓晶　主编

中国农业科学技术出版社

高等数学学习与辅导

赵晓晶　主编

中国农业科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习与辅导/赵晓晶主编．—北京：中国农业科学技术出版社，2008.8

ISBN 978－7－80233－696－4

Ⅰ．高…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 134415 号

责任编辑　冯凌云
责任校对　贾晓红　康苗苗

出 版 者　中国农业科学技术出版社
北京市中关村南大街 12 号　邮编：100081
电　　话　(010)82109704(发行部)　(010)82106630(编辑室)
(010)82109703(读者服务部)
传　　真　(010)82106636
网　　址　http://www.castp.cn
经 销 者　新华书店北京发行所
印 刷 者　北京富泰印刷有限责任公司
开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　15.125
字　　数　360 千字
版　　次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　33.00 元

前　言

本书是与同济大学应用数学系《高等数学》第六版（由高等教育出版社出版）相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可供正在复习微积分准备报考研究生的读者及使用该教材的教师作参考。

本书按《高等数学》第六版的章节顺序，以便与教学需求保持同步。考虑到读者使用的方便，编写时有的地方根据需要将几节合并编写，每节（含合并的几节）包括如下几部分内容：

一、内容概要

提纲挈领地归纳本节的主要内容，至于具体的概念、定理、公式等一般不再列出，由读者自行复习回顾。

二、典型例题解析

按照本节的教学要求，对基本概念、基本理论进行剖析，系统归纳常见题型的解题方法，精选部分典型而有一定难度的例题，使读者能够深入理解牢固掌握，避免犯要领性的错误。

三、历年考研题选讲

结合本节内容，选取全国研究生入学考试数学试题做详解，旨在拓宽基础，启发思路，使读者具备一定的应试能力。

四、习题

作为教材的补充和延深，精选部分概念性、启发性或综合性的习题，培养学生独立思考、分析问题和解决问题的能力。

除了逐节编写上述几部分内容以外，每一章末还提供自测题，供读者检测本章内容的掌握情况。本书习题、自测题均给出答案，希望对读者有所启发。

本书由安阳工学院理学部具有丰富教学经验的数学同仁编写（按编写的章节次序排列）：郭自兰（第一章）、张妩娜（第二章）、赵晓晶（第三、七、九章）、付国华（第四章）、臧雨亭（第五章）、任欢、湛华平（第六章）、石留杰（第八章）、李艳军（第十章）、张庆丰、燕艳菊（第十一章）、谢晶（第十二章）。

由于时间仓促和编者的能力有限，书中存在的不足之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者

2008 年 7 月于安阳工学院

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

一、内容概要

1. 函数定义的两个要素。

（1）定义域 D：自变量 x 的取值范围。

（2）映射 f：给定 x 的值，求 y 的方法。

注意：当且仅当两个函数的定义域及映射相同时，两个函数相同。

2. 函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_f。$u=g(x)$ 定义域为 D_g，值域为 R_g，当且仅当 $D_f \cap R_g \neq \varnothing$ 时，$y=f(u), u=g(x)$ 能组成复合函数 $y=f[g(x)]$。

注意：若 $D_f \cap R_g=\varnothing$ 时 $y=f(u), u=g(x)$ 不能复合。

3. $f^{-1}(y)=x$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线。用 x 表示自变量，y 表示因变量。则 $y=f^{-1}(x)$ 和 $y=f(x)$ 图形关于 $y=x$ 对称。f^{-1} 的定义域为 f 的值域。

注意：只有单映射对应的函数才有反函数。

4. 函数 $f(x)$ 有界，则 $f(x)$ 必有下界 $-M$ 和上界 M。若 $f(x)$ 有上界 k_1，且有下界 k_2，则 $f(x)$ 必有界 $M=\max\{|k_1|, |k_2|\}$。

注意：函数的有界性是对于某个区间而言的；无界函数与无穷大的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大。

二、典型例题解析

1. 关于函数的定义域的求法

（1）求复杂函数的定义域，通常将复杂函数看成一系列初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式就可以得到函数的定义域。

（2）求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，一般采用的方法是令 $t=\varphi(x)$，根据 $f(x)$ 定义域解出 x 的取值范围；或者计算 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式，直接求解函数的定义域。

（3）已知 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，求 $f(x)$ 定义域的方法，则是从 x 的变化范围解出 $t=\varphi(x)$ 的变化范围。

例　求 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域。

解： 当 $\sqrt{16-x^2}$ 和 $\lg\sin x$ 同时有定义时，函数才有定义，

所以 $\begin{cases}16-x^2 \geqslant 0 \\ \sin x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a \leqslant x \leqslant 4 \\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\end{cases}$

解不等式可得函数的定义域为 $-4\leqslant x<-\pi$，$0<x<\pi$。

2. 关于函数表达式的求法

（1）函数定义的两个要素：定义域和对应法则，当两个函数的定义域相同，对应法则一致时，这两个函数表是同一个函数，如 $y=f(x)$，$u=f(v)$ 等均表示同一个函数，这一性质被称为函数表示法的“变量无关性”。

（2）复合函数的求解方法主要有 3 种。

a 代入法，b 分析法，c 图示法。

例 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(1-x)=\dfrac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数），且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$

解：$af(x)+bf(1-x)=\dfrac{c}{x}$ （1）

令 $x=1-t$，则 $t=1-x$，故

$$af(1-t)+bf(t)=\frac{c}{1-t}$$

所以 $af(1-x)+bf(x)=\dfrac{c}{1-x}$ （2）

（1），（2）联立，可以解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-\frac{bc}{1-x}\right)$$

3. 求反函数的步骤

（1）从原函数 $y=f(x)$ 出发求解 x 的表达式

（2）对换 x，y 的位置，即得反函数

（3）$y=f(x)$ 的值域即为 $f^{-1}(x)$ 的定义域

例 求函数 $y=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)$，$a>0$ 的反函数。

解：由 $\dfrac{1}{x}+a=2^y$ 可以得到 $x=\dfrac{1}{2^y-a}$

所以反函数为 $y=\dfrac{1}{2^x-a}$

由于原函数的值域为 $(-\infty,+\infty)$，故反函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

4. 证明函数有界的常用方法

（1）利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理。

（2）采用导数求最大、小的方法。

（3）根据连续函数的性质（有界性，最大值和最小值定理），对于无界函数，可以根据定义证明。$\forall M>0$，在函数定义域内总存在一点 ξ，使得 $f(\xi)>M$。

例 指出下列两个函数是否有界？

（1）$y=\dfrac{1}{x^2}$，$a\leqslant x\leqslant 1$ （其中 $0<a<1$）

（2）$y=x\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$

解：（1）因为 $a\leqslant x\leqslant 1$，

所以 $a^2 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{a^2}$

即 $y=\frac{1}{x^2}$，当 $x \in [a,1]$ 时有界，$\frac{1}{a^2}$是一个上界。

(2) $\forall M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$，则 $\cos x=-1$

此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$

由定义可知 $y=x\cos x$ 无界，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时。

5. 证明函数单调性的主要方法

(1) 利用函数单调性的定义。

(2) 利用导数证明。

6. 判断函数的奇偶性经常采用的方法

(1) 依据函数奇偶性的定义出发，或者利用运算性质（奇函数的代数和为奇函数；偶函数的代数和为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数和一个偶函数之积为奇函数。）

(2) $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$ 也是判断函数奇偶性的常用方法之一。

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，如果函数的定义域不关于原点对称，则函数无奇偶性可言。

例　设 $f(x)=2x^2+6x-3$，求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的奇偶性。

解：$\varphi(x)=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3+(2x^2-6x-3)]=2x^2-3$ 是偶函数。

$\psi(x)=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3-(2x^2-6x-3)]=6x$ 是奇函数。

7. 判断给定的函数是否为周期函数的主要方法

(1) 从定义出发，找到 $T\neq 0$ 使得 $f(x+T)=f(x)$，

(2) 利用周期函数的运算性质证明。

例　设 $a<b$，函数 $f(x)$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$。

证明　$f(x)$ 为周期函数。

证明：因为任意 $x\in(-\infty,+\infty)$

$f(x+2b-2a)=f(b+b+x-2a)=f[b+(x+b-2a)]$

$=f[b-(x+b-2a)]=f(a+a-x)=f[a-(a-x)]=f(x)$

所以 $f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的周期函数。

三、历年考研题选讲

例　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0$，$x_2>0$。

求证：若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$。

证明　$x_1>0$，$x_2>0$，设 $x_2>x_1$，于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant(x_1+x_2)f(x_2)$$

$$=x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$$

即 $$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

四、习题

1. 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，$\varphi(x)=1-\sin x$，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant1\\2, & |x|>1\end{cases}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

3. 设对一切实数 x，有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证 $f(x)$ 为周期函数，并求其周期。

第二节　极　限

一、内容概要

1. 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或者 $x_n\to a(n\to\infty)$。

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，对应有极限趋于 $\pm\infty$ 两种情况。

注意：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示当 n 无限增大时 $|x_n-a|$ 无限接近于零；当且仅当 a 有极限时，称为极限存在。

2. 函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(x_0,A$ 有界$)$，

定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

3. 数列极限的性质

唯一性：若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则极限是唯一的。

有界性：若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则数列 $\{x_n\}$ 有界。

有序性：给定数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若 $x_n\leqslant y_n(n=1,2,3,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 则 $a\leqslant b$。

保号性：若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$ 或 $a<0$)，则必存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）。

4. 函数极限的性质

唯一性：若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限值唯一。

局部有界性：若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数在 x_0 的某一去心领域内有界。

有序性：设在 x_0 的某一去心领域内有 $f(x)\leqslant g(x)$ 且，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $A\leqslant B$。

局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 x_0 的某一去心领域，使得 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

复合运算：设函数 $u=\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$。

5. 极限存在判定准则

数列极限存在性：

（1）夹逼定理。

（2）单调有界性判别法：单调有界数列必有极限。

（3）无穷小判别法：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $x_n=A+\alpha$（当 $n\to\infty$ 时 $\alpha\to 0$）。

（4）柯西准则：数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$。

函数极限存在性：（1）夹逼定理；（2）无穷小判别法：设 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$（$\alpha\to 0$ 当 $x\to x_0$ 时）。

（5）单侧极限判别法：设 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有定义，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

6. 两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$：变型：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$。

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$：变型：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$。

二、典型例题解析

1. 根据定义验证极限

由于极限的定义中，只须证明存在 N（x，δ），故求解的关键在于不等式的求解。在求解过程中往往放大技巧，但不能把含有 n 的因子移到不等式的另一边再放大，而是应该直对要证其极限等于零的式子一步一步放大，有时还需要加入一些限制条件。限制条件必须和所求的 N（或 δ）一致，最后结合在一起考虑。

例　用数列极限定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

证明　$\forall\varepsilon>0$，找正整数 N，使得当 $n>N$ 时，

有 $0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

只须取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$　　即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

2. 单调有界准则求解或验证数列极限

利用单调准则证明极限存在，主要针对递推数列，必须验证数列两个方面的性质，单调性和有界性。一般做题的难点在于判断单调性，数学归纳法是一种简洁有效的方法，或者通过减法或除法比较前后项，需要注意的是，单调有界准则所要验证的数列两个方面的性质可以在 n 无穷大以后成立。

例 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$.（$n=1.2.3\cdots$），证明数列 $\{x_n\}$ 有极限，并求其极限。

证明 先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调减少。

因为 $x_1=10$，$x_2=\sqrt{6+10}=4$。知 $x_1>x_2$

设当 $n=k$ 时，有 $x_k>x_{k+1}$，而

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$$

即当 $n=k+1$ 时，$x_n>x_{n+1}$成立。

综上所述，对于一切自然数 n，$x_n>x_{n+1}$成立，即数列 $\{x_n\}$ 单调减少。

又因为 $x_n>0$，（$n=1$，2，$3\cdots$），即数列 $\{x_n\}$ 有界。

因此可知数列 $\{x_n\}$ 有极限。

设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$，则有 $A=\sqrt{A+6}$

解得 $A=3$　　$A=-2$（舍去）

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=3$。

3. 夹逼准则求解或验证极限

夹逼准则多适用于所考虑的函数比较容易适度放大或缩小，而且放大和缩小后的函数容易求得相同极限的情形。基本思想是把要求解的极限转化为放大或缩小后函数或数列的极限。需要注意的是，夹逼准则所要建立的不等式可以只在无穷大以后或在 $x\to x_0$ 时点 x_0 的邻域内成立。

例 求极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}$。

解： $0\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n)(2n-1)\cdots1}}<\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{1}{n}$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}=0$。

4. 利用极限运算法则求极限

对于和、差、积、商形式的函数求极限，可以采用极限运算法则求极限，使用时通常需要首先对函数做某些恒等变换成化简，变换的方法通常有：有分式的约分成通分，分解因式，分子分母有理化，三角函数的恒等变换等。

例 求极限值 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}\right)$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}$$

5. 利用两个重要极限的关键是对所给的函数或数列做适当的变换，使之具有相应的形式，有时也可以通过变量代换将问题简单化。

例　求极限值 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$。

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$。

6. 利用单侧极限判别法求极限

对于包含绝对值。分段函数分段点的极限或极限可能不存在的函数表达式。即当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 点两侧变化趋势有所不同时，可以利用当左右极限存在且相等时，极限存在且等于左右极限这一性质。

例　求极限值 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$。

解： $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{1+e^{-\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right]=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1$

7. 幂指函数极限的求法

形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 称为幂指函数，即 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}$

常用的方法是：利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot[u(x)-1]=a$。

则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}[1+u(x)-1]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot[u(x)-1]}=e^a$

例　求极限值 $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解： 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\ln[1+(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)]}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x}{1+x}}=e^2$$

8. 几项和及乘积的极限

一般方法：分子分母同乘一个因子，然后拆项求和；夹逼准则；定积分定义，幂指函数求和。

例　求极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}[1!+2!+\cdots+n!]$。

解： 采用夹逼准则。

$$n! < 1! + 2! + \cdots + n! < (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n!$$

$$1 < \frac{1}{n!}(1! + 2! + \cdots + n!) < \frac{(n-2)}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1$$

当 $n\to\infty$ 时 $\quad \dfrac{(n-2)}{n(n-1)} + \dfrac{1}{n} + 1 \to 1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}[1! + 2! + \cdots + n!] = 1$

9. 确定极限中的参数

（1）给定某个含有参数的分段函数，确定参数值使得该分段函数连续，或间断点极限存在，如果极限过程是变量 x 趋向某个参数的话，需要对该参数进行讨论。

（2）含有两个或两个以上参数的分式的极限，其分母的极限为零，欲确定参数值，它不仅给出了该分式极限值的这一条件，还包含了极限存在的条件，因此可以把问题分解为“极限存在”和“极限值”两个层面求解。

例 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$，求 a。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3a-x}{x-a}} = e^{3a} = 8$

所以 $a = \ln 2$

三、历年考研题选讲

1. 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，则必有（ ）解。 （D）

A. $a_n < b_n$ 时对任意的 n 成立

B. $b_n < c_n$ 时对任意的 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在

D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

四、习题

1. 用函数极限的定义验证：$\lim\limits_{x\to 2}x^2 = 4$。

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$。

3. 求极限值 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$。

4. 求极限值 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^x$。

5. 求极限值 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}$。

6. 求极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$。

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - (ax^2 + bx + c)}{x^2} = 0$，求 a，b，c。

第三节　无穷小与无穷大

一、内容概要

1. 无穷小及其性质

无穷小是一个变量，“0”是无穷小中的唯一常数，任何一个很小的正数都不能作为无穷小。

性质：无穷小量的绝对值仍是无穷小；

无穷小量乘有界函数仍是无穷小；

函数 $f(x)$ 有极限 $a \Leftrightarrow f(x)=a+\alpha(\alpha \to 0$ 当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty)$；

有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小；

无限个无穷小的和、差、积不一定是无穷小。

2. 无穷大及其性质

无穷大必为无界，而无界不一定是无穷大，例如，$f(x)=x\sin x$，当 $x \to \infty$ 时无界，但不是无穷大。无穷大可分为 $+\infty$，$-\infty$ 和 ∞。

性质：若 α 为无穷大，则 $\frac{1}{\alpha}$ 无穷小；

若 α 为无穷小，且 $\alpha \neq 0$，则 $\frac{1}{\alpha}$ 无穷大。

3. 无穷小阶的比较

高阶无穷小 $o(\alpha)$：设 α，β 均为无穷小，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 为 α 的高阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$，或称 α 为 β 的低阶无穷小。

同阶无穷小：设 α，β 均为无穷小，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c \neq 0$，则称 β 为 α 的同阶无穷小。

等阶无穷小 $\alpha \sim \beta$：设 α，β 均为无穷小，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 为 α 的等阶无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$。如果 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$。

k 阶无穷小 $o(\alpha^k)$：设 α，β 均为无穷小，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c \neq 0$，则称 β 为 α 的 k 阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha^k)$。

4. 常用等价代换公式： 当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, e^x-1 \sim x, a^x-1 \sim x\ln a, \ln(x+1) \sim x$。

二、典型例题解析

例 1　设 $f(x)=\sin(\sin^2)\cos x$，$g(x)=3x^2+4x^3$，讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 无穷小的关系。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin^2)\cos x}{3x^2+4x^3}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin^2x\cdot\cos x}{x^2(3+x)}=\frac{1}{3}。$$

所以，$f(x)$与$g(x)$是等价（但不同阶）无穷小。

例 2　证明：当$x\to0$时，无穷小$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$与$x$是等价无穷小。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}=1。$$

所以，当$x\to0$时，无穷小$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$与$x$是等价无穷小。

三、历年考研题选讲

1. 求$\lim\limits_{x\to0}\ (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2+o(x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-\dfrac{1}{2}x^2)^{\frac{-2}{x^2}}]^{\frac{1}{-2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

四、习题

1. 求极限值$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\sin(x-1)}{\ln x}$。

2. 求极限值$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$。

第四节　连续函数及其基本性质

一、内容概要

1. 函数$f(x)$在x_0点处连续

$f(x)$是(a,b)上给定的函数，$x_0\in(a,b)$，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于$f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$点处连续。

等价条件和性质：

（1）等价条件：函数$f(x)$在x_0点处连续$\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$

（2）四则运算：$f(x)$、$g(x)$在x_0点处连续，则$f(x)\pm g(x)\cdot f(x)\cdot g(x)\cdot\left.\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|_{g(x)\neq0}$在$x_0$点处连续。

（3）复合函数：$y=f(u)$在$u=u_0$处连续，$u=g(x)$在x_0点处连续，且$u_0=g(x_0)$，则$y=f[g(x)]$在x_0点处连续。