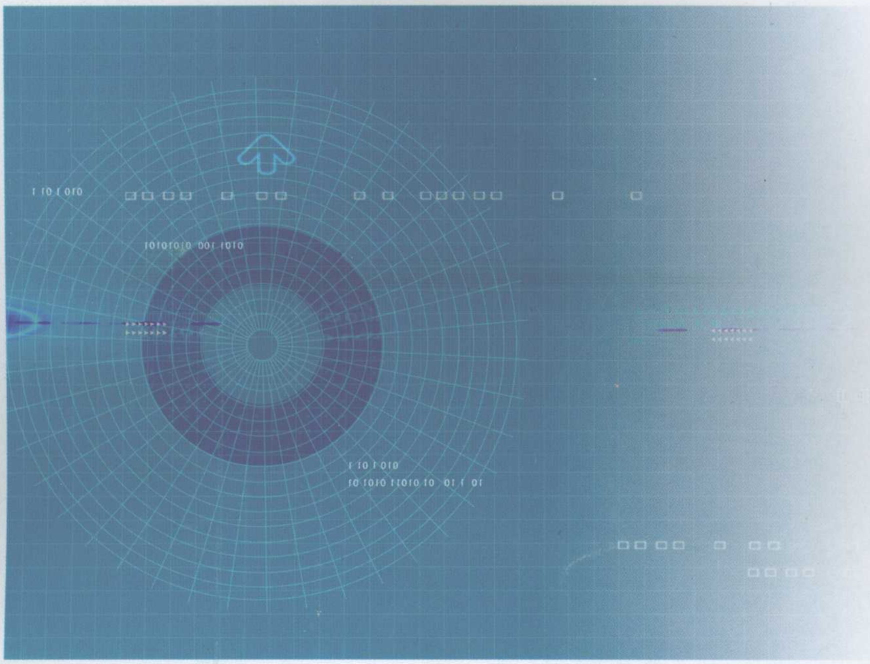
湖南省高等职业教育规划教材



经济应用数学

湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写

总主编:张孝理　主编:李宏平

[全一册]

JINGJI YINGYONG SHUXUE

湖南科学技术出版社

湖南省高等职业教育规划教材

经济应用数学

湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写

总主编：张孝理

主　编：李宏平

副主编：陈晓霞　魏开明　吕志军

编写者：朱江华　莫曲平　戴春桃　肖金城　周　密

[全一册]

JINGJI YINGYONG SHUXUE

湖南科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学／湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写. 张孝理总主编. 李宏平主编. —长沙：湖南科学技术出版社，2008.8
湖南省高等职业教育规划教材
ISBN 978-7-5357-5388-5

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①湖…②张…③李… Ⅲ. 经济数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 126078 号

湖南省高等职业教育规划教材
经济应用数学
组织编写：湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所
总 主 编：张孝理
主　　编：李宏平
责任编辑：贾平静　汤伟武
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
http://www.hnstp.com
印　　刷：湖南航天长宇印刷有限责任公司
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：望城坡航天大院
邮　　编：410205
出版日期：2008 年 8 月第 1 版第 1 次
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：16
字　　数：392000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5388-5
定　　价：21.80 元

前　言

经济应用数学是高等职业院校经济管理类专业学生的一门重要必修课，其思想和方法广泛应用于科学技术、社会经济等领域，对学生的素质培养、知识迁移、专业学习和职业发展有着极其重要的作用.

本教材的编写借鉴了国内外先进职业教育理念，汲取了近年高等职业院校高等数学课程教学改革的成果，体现了“实用、必需、够用”的原则，注重学生的数学素养、迁移能力的培养，在编写理念、体例设计和内容安排上有以下特点：

1. 突出高等职业教育特色. 根据高等数学在高技能人才培养中的基础性地位与工具性作用，对经济应用数学的内容进行了遴选、优化和整合. 强化与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求复杂的计算与变换. 概念阐述简明扼要，揭示其数学本质或直接从应用中获得知识的一般特性.

2. 风格新颖，以实际问题为载体. 全书采用“引例驱动”法编写，由大量来自实际生活或经济管理中的实例引出数学知识，然后将数学知识应用于处理各种生活和经济问题，用实例加深概念方法的理解，突出数学知识点的几何意义和实践意义. 同时，在知识点的编排上作了部分融合，体现了模块式教学的要求.

3. 突出应用，以学生的实际应用过程为导向. 全书贯穿了将经济问题转化为数学问题的思想，引例和例题生活化、通俗化、增加可读性，力求用日常生活中简单的实际问题引出抽象的数学概念，让学生将数学问题与实际生活联系在一起. 每节安排有练习题，每章安排有习题，以满足基础教学和学有余力的学生的需求.

4. 突出能力训练，以能力培养为目标. 注重学生综合素质的培养，在练习题和习题选取上，体现数学课程改革的新思路，数学教学不仅具备工具功能，而且还具备思维训练和文化素质教育功能，重视培养学生的科学精神，创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力.

5. 内容精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学.

本教材是在湖南省教育厅的领导下，由湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写的，是湖南省高等职业教育规划教材. 全书共一册，建议教学时数为120～140 学时. 本书由湖南化工职业技术学院张孝理教授担任总主编，李宏平同志任主编，陈晓霞、魏开明、吕志军三位同志任副主编. 具体编写分工如下：湖南大众传媒职业技术学院魏开明编写第一章和第四章，长沙商务旅游职业技术学院陈晓霞编写第二章，衡阳财经工业职业技术学院朱江华编写第三章，湖南商贸旅游职业技术学院莫曲平编写第五章，湖南科技职业学院戴春桃编写第六

章，长沙南方职业技术学院肖金城编写第七章，岳阳职业技术学院吕志军编写第八章和第九章，湖南科技职业学院李宏平编写第十章和第十一章，湖南科技职业学院周密编写第十二章．本书统稿工作由李宏平、陈晓霞、魏开明、吕志军完成．

在本教材的编写过程中得到湖南省高职院校诸多数学教师的帮助，在此特表谢意．

由于编者水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请指正．

湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所

2008 年 7 月

目　录

第一章 函数与极限

函数与极限是学习微积分的基础和工具，本章将在中学数学基础上，进一步研究函数的概念与性质，极限的概念、性质和计算方法，并介绍几个经济分析中常见的函数.

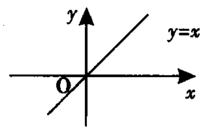
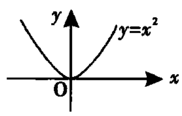
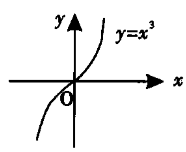
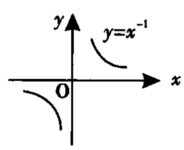
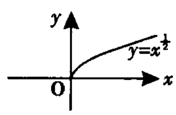
§1.1 函　　数

1.1.1 初等函数

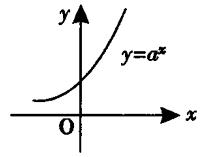
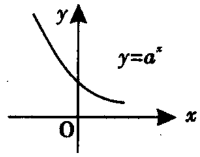
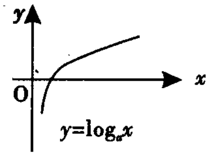
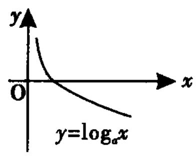
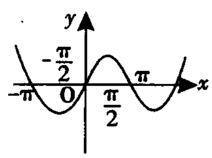
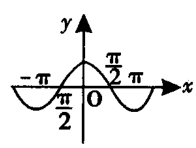
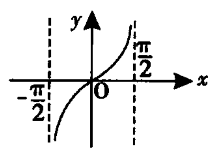
1. 基本初等函数

基本初等函数通常指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 它们的定义域、值域、图像和性质见表 1 - 1.

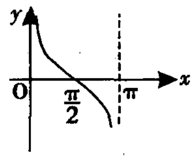
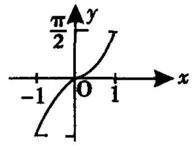
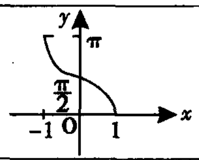
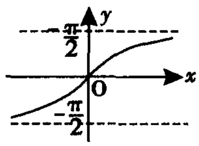
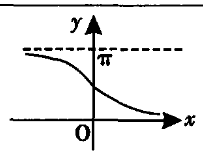
表 1 - 1

	函　数	定义域与值域	图　像	性　质
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内和 $(0,+\infty)$内 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表

	函　数	定义域与值域	图　像	性　质
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数;周期为 2π;有界;在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)$ 内单调减少 $k\in\mathbf{Z}$.
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数;周期为 2π;有界;在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少,在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加,$k\in\mathbf{Z}$.
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内 单调增加,$k\in\mathbf{Z}$.

续表

	函　数	定义域与值域	图　像	性　质
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数；周期为 π；在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少，$k\in\mathbf{Z}$.
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

引例 1.1　函数 $y=\lg\sqrt{x}$ 不是一个基本初等函数，它可看做是由基本初等函数 $y=\lg u$ 和 $u=\sqrt{x}$ 复合而成的一个新函数. 对这样的函数有如下定义：

定义 1.1　设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，而 u 称为中间变量.

【例 1.1】　已知 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\cos x+1$. 将 y 表示成 x 的函数.

解　将 $u=\ln v$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中得 $y=\sqrt{\ln v}$，再将 $u=\cos x+1$ 代入 $y=\sqrt{\ln v}$ 中得 $y=\sqrt{\ln(\cos x+1)}$.

【例 1.2】　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{\arcsin(x+1)}$；　(2) $y=e^{\cos\sqrt{x}}$；　(3) $y=\lg\sin^2 x$.

解　(1) $y=\sqrt{\arcsin(x+1)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\arcsin v$，$v=x+1$ 复合而成的；

(2) $y=e^{\cos\sqrt{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成的；

(3) $y=\lg\sin^2 x$ 是由 $y=\lg u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的.

3. 分段函数

引例 1.2　为吸收更多用户，某电信局对话费标准做如下调整：月租 20 元，电话费 3 分钟内记一次，每超过 3 分钟再记一次，30 次内只收月租费，超过 30 次每次收费 0.2 元，则市话费

y 与用户当月打电话次数 x 的对应关系为

$$y=\begin{cases}20, & x\leqslant 30;\\ 20+0.2(x-30), & x>30.\end{cases}$$

在自变量的不同范围内，函数的对应关系不同，函数关系由不同的表达式来分段表示的函数，为分段函数.

【例 1.3】 分段函数 $y=f(x)=\begin{cases}x-1; & x\leqslant -1;\\ x^2; & -1<x\leqslant 1;\\ x+1; & x>1.\end{cases}$

(1) 指出函数的定义域；(2) 求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(2)$的值；(3) 作出函数的图像.

解 (1) 函数的定义域是 **R**.

(2) 因为 $-2\in(-\infty,-1)$ 所以 $f(-2)=-2-1=-3$

因为 $0\in(-1,1)$ 所以 $f(0)=0^2=0$

因为 $2\in(1,+\infty)$ 所以 $f(2)=2+1=3$

(3) 分段作出各部分函数图形如下图 1-1.

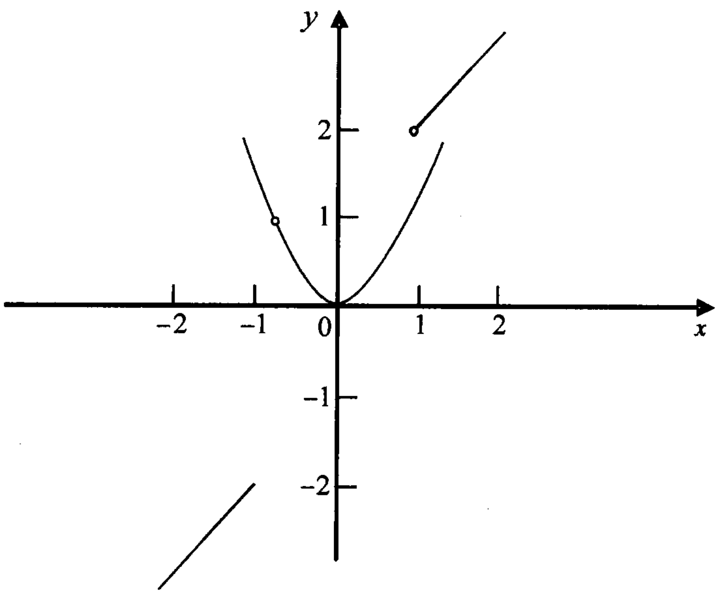


图 1-1

4. *初等函数*

定义 1.2 由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成并且可以由一个解析式表达的函数称为初等函数.

例如：$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A, ω, φ 为常数)，$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 等都是初等函数

分段函数一般不是初等函数，但某些分段函数例外. 如 $y=|x|=\begin{cases}-x & x\leqslant 0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$ 是初等函数，它可以由一个解析式 $y=\sqrt{x^2}$ 表达.

1.1.2 经济分析中常用函数

在经济分析中，要研究经济变量间的关系，必须建立经济变量的函数关系，即建立经济数学模型. 现在介绍经济分析中几个常用的函数.

1. *需求函数*

消费者对市场中某种商品的需求量，受到商品价格、消费水平、消费者数量、人们的喜好、季节变化等多个因素的影响.

为了简化经济问题的分析，假定商品需求量只受到商品价格的影响，忽略其他因素. 这样商品需求量 Q 就是商品价格 P 的函数，称为需求函数 $Q=Q(P)$.

一般地，价格上涨，需求量减少；价格下调，需求量增加. 所以需求函数为单调减函数.

在经济学中常用的需求函数有以下三种类型：

(1) 线性需求函数　　$Q=ap+b$

(2) 二次需求函数　　$Q=ap^2+bp+c$

(3) 指数需求函数　　$Q=ae^{-bp}$

2. 价格函数

需求函数的反函数称为价格函数 $P=P(Q)$.

3. 供给函数

市场中某种商品的供给量 S 的大小受多种因素影响，主要影响因素是商品的市场价格 P，不考虑其他因素影响，商品供给量 S 是价格 P 的函数称为供给函数 $S=S(P)$.

一般地，商品价格上涨，促使生产者提供更多商品，因此商品供给量增加，故商品供给函数 $S=S(P)$ 为单调增函数. 在经济学中常见的供给函数有：

(1) 线性需求函数　　$S=aP+b$

(2) 二次需求函数　　$S=aP^2+bP+c$

(3) 幂供给函数　　$S=aP^b$

(4) 指数需求函数　　$S=ae^{bP}$

4. 市场均衡

在市场经济规律作用下，市场某种商品 P 的价格上涨，商品供给量 S 增加，而商品的需求量 Q 下降，当供给量 S 和需求量相等时达到平衡状态，称供需平衡时的价格 P_0 为均衡价格，供给量 Q_0 为均衡数量.

当市场价格 P 高于均衡价格 P_0 时，供给量超过需求量，即“供过于求”；当市场价格 P 低于均衡价格 P_0 时，需求量超过供给量，即“供不应求”.

【例 1.4】 已知某种商品的供给函数为 $S=12P-6$，需求函数为 $Q=-3P+24$，求该商品的均衡价格 P_0 和均衡数量 Q_0.

解　达到平衡状态时 $S=Q$　即　$12P_0-6=-3P_0+24$

得　$P_0=2, Q_0=-3\times2+24=18$

故商品的均衡价格为 2，均衡数量为 18.

5. 总成本函数

总成本 C 与产量 q 有密切关系，总成本包括两部分：一部分由市场地费、机器折旧费、管理人员工资及其他固定费用组成的固定成本 C_0；另一部分由原材料费、燃料费、动力费、生产工人工资等随产量变动组成的变动成本 $V(q)$. 总成本与产量的关系称为成本函数 $C=C(q)$.

一般地，$C(q)=C_0+V(q)$，成本随产量的增加而增加，即总成本函数为单调增函数.

在经济分析中，常见的总成本函数有：

(1) 线性成本函数　　$C(q)=aq+b$

(2) 二次成本函数　　$C(q)=aq^2+bq+c$

(3) 三次成本函数　　$C(q)=aq^3+bq^2+cq+\mathrm{d}$

单位产品的成本称为平均成本 $\overline{C}=\dfrac{C}{q}$，平均成本衡量生产者的生产水平.

【例 1.5】 生产某种产品每天的固定成本为 500 元，每生产 1 件产品变动成本增加 20

元,求每天生产 100 件产品的总成本和平均成本.

解 总成本函数 $C(q)=500+20q$,

每天生产 100 件产品的总成本 $C(100)=500+20\times100=2500$(元),

平均成本 $\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{2500}{100}=25$(元/件).

6. 收入函数

生产者出售一定数量产品所得的收入 R 是销售量的函数称为收入函数 $R=R(q)$.

一般地,$R(q)=pq$,p 为销售单价,q 为销售量.

收入随销售量的增加而增加,即收入函数为单调增函数.

【例 1.6】 某商品的单价为 15 元,商场为了促销,决定对购买超过 100 件的实行 8 折优惠,求该商品的销售收入函数.

解 当销售量 q 满足 $0\leqslant q\leqslant 100$ 时,$R=15q$(元);

当销售量 q 满足 $q>100$ 时,$R=15\times100+15\times80\%(q-100)=300+12q$.

即 $R=\begin{cases}15q & 0\leqslant q\leqslant 150\\ 300+12q & q>100\end{cases}$.

7. 利润函数

衡量企业生产经营水平的指标是利润,它是生产一定量产品总收入与总成本的差额,若利润 $L>0$,企业盈利,若利润 $L<0$,企业亏损.

利润 L 与产量 q 的关系为利润函数. $L=l(q)$,平均利润 $\overline{L}=\frac{L(q)}{q}$.

即有 $L(q)=R(q)-C(q)$.

【例 1.7】 已知某商品的总成本函数为 $C(q)=2400+60q+q^2$(元),如果产品销售单价为 200 元/件.

求:(1) 该商品的收入函数;

(2) 该商品的利润函数;

(3) 销售 100 件商品的利润和平均利润.

解 (1) 收入函数 $R(q)=200q$(元)

(2) 利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)$

$$=200q-(2400+60q+q^2)=-q^2+140q-2400(\text{元})$$

(3) 销售 100 件商品的利润 $L(100)=-100^2+140\times100-2400=1600$(元)

$\overline{L}=\frac{L(100)}{100}=\frac{1600}{100}=160$(元)

8. 库存函数

库存问题是生产管理中的一个重要问题.

假定某厂在计划期间,对某种物品的总需求量为 a,如果将物品一次进货,显然,库存费用增大. 现分批进货,每批进货量相同,每批进货费用为 b,在计划内单位物品的库存费用为 c,假设该物品均匀地投入生产中使用,则平均库存量为批量的一半,我们可以建立总费用(进货费用与库存费用之和)y 与批量(每批进货量)x 之间的函数关系为:

$$y=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x. \qquad (0<x\leqslant a)$$

其定义域为$(0,a]$，但有时物品的数量必须是正整数，此时，只取$(0,a]$中的正整数。

练习题 1.1

1. 设 $f(x)=e^x, g(x)=x^3-\sin x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

2. 写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\sin(1-3x)}$；　(2) $y=\ln\cos(x^2-1)$；　(3) $y=e^{\cos\frac{1}{x^2}}$.

3. 已知某商品的需求函数为 $Q=100-2p$，供给函数为 $S=-60+30p$，求该函数的均衡价格 p_0.

4. 某玩具厂每天生产 60 个玩具的成本为 300 元，每天生产 80 个玩具的成本为 340 元，求线性成本函数，每天的固定成本和生产一个玩具的变动成本.

5. 某厂生产产品 1000 吨，定价为 130 元/吨，当售出量不超过 700 吨时，按原定价出售，超过 700 吨的部分按原价的九折出售，试将销售收入表示成销售量的函数.

6. 某手表厂生产 1 块手表的变动成本为 15 元，每天的固定成本为 2000 元，如果每块手表的出厂价为 20 元，为了不亏本，该厂每天至少应生产多少块手表？

§1.2　极限与连续

1.2.1　函数的极限

1. 数列的极限

引例 1.3　战国时代哲学家庄周著《庄子・天下篇》中“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，一尺长的木棒，每天截去一半，第一天剩下$\frac{1}{2}$，第二天剩下$\frac{1}{4}$，…，第 n 天剩下$\frac{1}{2^n}$…剩下木棒长度得到一个数列为：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$.

随着天数 n 越来越大，木棒的长度越来越接近零，这个 0 就是数列的极限. 一般地，有如下定义：

定义 1.3　设有数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于常数 A，则称 A 为 n 趋于无穷大时数列$\{x_n\}$的极限，记作：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_0\to A(n\to\infty)$$

【例 1.8】　求下列数列的极限.

(1) $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$.

(2) $1,1,1,\cdots,1,\cdots$.

(3) $1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$.

解 (1) 数列的通项 $x_n=\frac{n-1}{n}$,

因为 当 n 无限增大时,x_n 无限趋近 1

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$

(2) 数列的通项 $x_n=1$

因为 当 n 无限增大时,x_n 恒等于 1

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

(3) 数列的通项 $x_n=(-1)^{n+1}$,

因为 当 n 无限增大时,x_n 在 1 和 -1 两个值上下跳跃,不会趋近于一个确定的值.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在.

2. $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例 1.4 将一杯 100℃的开水放在一间恒温为 25℃的房间中,随着时间 x 的增加,水温 $f(x)$逐渐降低,越来越接近室温 25℃.

这个问题的特征是,当自变量逐渐增大时,相应的函数值接近于某一个常数. 一般地,有如下定义:

定义 1.4 设函数 $f(x)$在$|x|>M(M>0)$时有定义,如果$|x|$无限增大时,函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为当 x 趋于无穷时 $f(x)$的极限. 记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

定义 1.5 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义,如果当 x 无限增大时,函数 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为 x 趋于正无穷大时的极限. 记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

定义 1.6 设函数 $f(x)$在$(-\infty,b)$内有定义,如果 $x<0$ 且 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为 x 趋于负无穷大时的极限. 记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

【例 1.9】 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$.

解 当 $x\to-\infty$时,$\mathrm{e}^x\to0$ 即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

当 $x\to+\infty$时,$\mathrm{e}^x\to+\infty$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在.

3. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

引例 1.5 路边的行人朝路灯正下方走去,他的影子逐渐变短,当他站到路灯正下方时,他的影子变成一点. 把行人距路灯正下方的距离记为 x,人的影子长度 $f(x)$是 x 的函数,当 $x\to0$时,$f(x)\to0$.

这个问题的特征是,当自变量 x 逐渐趋近于一个常数 x_0 时,相应的函数值 $f(x)$也接近于某一个常数 A. 一般地,有如下定义:

定义 1.7 设函数 $f(x)$在点 x_0 的 δ 去心邻域 $u(\hat{x}_0,\delta)$内有定义,如果当 x 无限趋近 x_0

时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

点 x_0 的 δ 邻域 $u(x_0,\delta)$ 表示 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$；点 x_0 的 δ 去心邻域 $u(\hat{x}_0,\delta)$ 表示 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

下面给出左极限和右极限的定义：

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义，如果当 x 从 x_0 左侧无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-)$$

定义 1.9 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义，如果当 x 从 x_0 右侧无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)$$

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

【例 1.10】 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0;\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$ 判断 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

1.2.2 函数的连续性

引例 1.6 设函数 $f(x)=x^2$，当自变量 x 由 $x_0=1$ 变化到 $x_1=1.02$ 时，对应的函数值由 $f(x_0)=f(1)=1$ 变化到 $f(x_1)=f(1.02)=1.02^2=1.0404$.

自变量的改变量（增量）用 Δx 表示，即 $\Delta x=x_1-x_0=1.02-1=0.02$；

函数的改变量（增量）用 Δy 表示，即 $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)=1.0404-1=0.0404$.

引例 1.7 气温从 30℃下降到 18℃用了 4 个小时，气温 W 是时间 t 的函数 $W=f(t)$，这 4 个小时气温连续在变. 事实上，当时间 t 的变化 Δt 很微小时，温度 W 的变化 ΔW 也很微小，即当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta W\to 0$.

下面用极限给出函数在某一点连续的定义.

定义 1.10 设函数 $y=f(x)$ 在 $u(x_0,\delta)$ 内有定义，如果自变量的增量 Δx 趋于零时，函数的增量 Δy 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$ 在 $u(x_0,\delta)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

可以证明，这两个定义是一致的.

【例 1.11】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-\sin x, & x\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ \cos x, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的连续性.