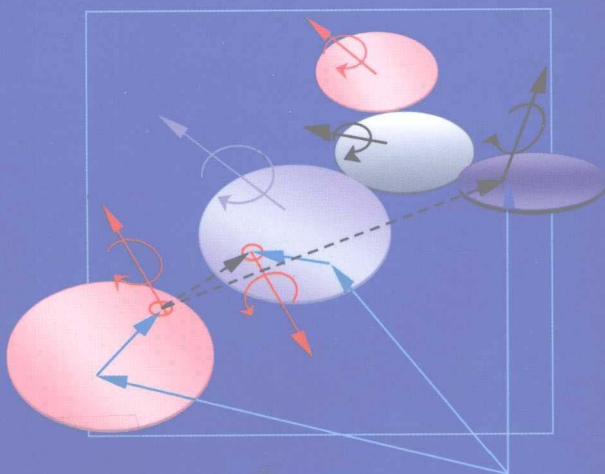


多体系统 动力学

Dynamics of Multibody Systems

齐朝晖 编著



科学出版社

www.sciencep.com

多体系统动力学

Dynamics of Multibody Systems

齐朝晖 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书论述了多体系统动力学的基础理论和分析方法,介绍了一些多体系统动力学的近期研究进展。鉴于实际多体系统动力学问题只能通过相应的软件求解,本书重点阐述了那些对编程有指导意义的理论和方法。为保持知识体系的完整性,书中结合柔体建模和求解的需要讲解了连续介质力学、有限元法以及结构力学中的相关内容。

全书共 10 章。其中,第 1~6 章主要讲述多刚体系统动力学,是全书的基础篇;第 7~10 章主要讲述多柔体系统动力学。

本书可作为工程力学、机械工程、汽车工程和航天工程等专业的研究生教材,也可供相关领域科研人员的参考。

图书在版编目(CIP)数据

多体系统动力学/齐朝晖编著. —北京:科学出版社,2008
ISBN 978-7-03-022473-6

I. 多… II. 齐… III. 系统动力学 IV. N941.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 101604 号

责任编辑:任加林 庞海龙/ 责任校对:耿 耘
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店

2008 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008 年 7 月第一次印刷 印张:16

印数:1—2 500 字数:307 000

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BZ08)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

序

多体系统动力学是研究复杂机械系统运动规律和部件的受力环境的理论基础,是现代设计理论中虚拟样机的核心技术之一。多体系统的理论和应用研究对提高设计水准缩短设计周期都具有重要的指导意义。

本书是作者在多年潜心从事教学、科研和软件研发工作基础上完成的。书中的内容将基础知识和算法紧密结合,以帮助读者在掌握多体系统动力学基础理论的同时,能够运用所学知识编制相应的分析软件。鉴于多体系统动力学理论和应用研究在近期内的快速发展,作者在查阅大量文献的基础上,介绍了该领域的部分新成果,其中也包括作者及其合作者所取得的最新研究成果。

多体系统动力学是一门高度综合的学科,涉及连续介质力学、有限元法、结构力学等自成体系的学科。作者在有限篇幅内讲述了这些学科的相关基础理论及方法,为读者提供了很好的入门向导,实属不易。

相信本书可作为很好的研究生教材,也可作为相关领域学者的有益参考书。

程耿东

2008年7月

前 言

多体系统是由多个彼此之间存在明显相对运动的物体构成的系统。工程机械、机器人、航天器等众多复杂机械系统都可看作是多体系统。多体系统动力学主要研究系统中物体的运动规律及其受力环境,具有十分广泛的应用领域。例如,机器人的轨迹控制需要多体系统动力学提供系统状态演化规律,复杂机械系统中构件的强度、疲劳和可靠性设计需要多体系统动力学提供可靠的受力特性预测。

近年来,多体系统动力学的理论和应用研究都经历了非常活跃的发展阶段,以多体系统动力学为核心技术的分析软件 ADAMS 和 SIMPACK 的用户迅速增多,使多体系统动力学不再只是少数学者感兴趣的学科。作者殷切希望本书能够帮助读者更容易地理解多体系统动力学基础知识,同时在一定程度上了解该领域的近期研究进展。

本书包含了作者在国家自然科学基金委员会资助下所取得的一些研究成果。本书的出版得到了“973”计划项目(项目编号:2006CB705400)、国家自然科学基金项目(项目编号:10472018,10721062)的资助,以及大连理工大学研究生院教改基金的支持。作者对此表示衷心的感谢。

为使本书易于理解,作者征求了历届选修本课程研究生的意见,得到了热切的回应。研究生许永生、罗晓明、黄志浩、邵珠蕾、韩冰、刘强、徐力君、马健、李利斌、赵登科、陈礼为本书作了大量的校对工作。作者在此一并表示感谢。

齐朝晖

2008年2月

于大连理工大学

目 录

序

前言

第 1 章 多体系统拓扑构型的数学描述	1
1.1 多体系统拓扑结构	1
1.2 多体系统的分类	3
1.3 关联矩阵和通路矩阵	4
思考题	8
第 2 章 刚体运动学	9
2.1 刚体的连体基	9
2.2 刚体的转动	9
2.3 刚体之间的相对运动	12
2.4 转动的角速度和角加速度	13
思考题	16
第 3 章 邻接刚体的相对运动	17
3.1 铰的三大要素	17
3.2 铰坐标系	18
3.3 铰坐标	20
3.4 组合铰和复杂铰	21
3.5 约束元	24
3.6 邻接物体的姿态传递	25
3.7 邻接物体的质心位移传递	26
3.8 邻接物体角速度和角加速度传递	26
3.9 邻接物体质心速度和质心加速度传递	28
思考题	29
第 4 章 多刚体系统运动学	30
4.1 铰坐标组集	30
4.2 树系统中刚体的连体基矢量	31
4.3 铰的轴矢量	32

4.4	多体系统中物体的质心	32
4.5	多体系统中物体的角速度	33
4.6	多体系统中物体的角加速度	35
4.7	只含转动铰的多体系统中物体质心速度	36
4.8	带滑移铰的多体系统中物体质心速度	38
4.9	多体系统中物体质心加速度	40
4.10	切断铰所关联物体的相对运动	42
4.11	姿态约束方程	45
4.12	角速度约束方程	46
4.13	角加速度约束方程	47
4.14	铰点相对位置约束方程	48
4.15	铰点相对速度约束方程	48
4.16	铰点相对加速度约束方程	50
	思考题	51
第5章	多体系统动力学	52
5.1	理想约束	52
5.2	质点系统动力学普遍方程	55
5.3	刚体动力学方程	55
5.4	多刚体系统动力学虚功率方程	57
5.5	力元	59
5.6	约束系统动力学方程	61
5.7	拉氏乘子的直接求解	62
5.8	拉氏乘子的力学意义	62
5.9	冗余约束	66
5.10	铰约束反力的求解	67
5.11	非理想约束反力	70
5.12	单面约束	74
5.13	单点无摩擦碰撞	78
5.14	多点无摩擦碰撞	82
5.15	非独立碰撞冲量	84
5.16	尖点碰撞	85
5.17	摩擦碰撞冲量方程	86
5.18	单点摩擦碰撞的状态演化方程	88

5.19	静摩擦状态的演化	91
5.20	多点摩擦碰撞的冲量方法	93
5.21	库仑摩擦定律的近似	94
5.22	多点摩擦碰撞的非线性互补模型	96
5.23	摩擦碰撞的线性互补模型	98
	思考题	100
第 6 章	多体系统数值分析	101
6.1	约束稳定化方法	101
6.2	速度分解法	102
6.3	正交投影修正法	103
6.4	罚函数法	106
6.5	常微分方程数值解的基本原理	106
6.6	常微分方程数值解的稳定性	108
6.7	线性互补问题的求解	110
6.8	树系统中广义加速度的快速算法	113
6.9	多体系统逆动力学	115
6.10	多体系统静平衡位置	119
6.11	多体系统灵敏度分析	120
6.12	多体系统能量传递分析	124
	思考题	125
第 7 章	柔体动力学	126
7.1	弹性体的应力	126
7.2	弹性体的位移分解	128
7.3	弹性体的应变	130
7.4	弹性体面元与体元的变换	131
7.5	弹性体的动能	133
7.6	弹性体的变形功率	134
7.7	弹性体的虚功率方程	137
7.8	弹性体的离散	140
7.9	弹性体的弹性质量矩阵	142
7.10	转动矩阵的基本性质	143
7.11	欧拉四元数与转动	145
7.12	含两个以上节点的单元坐标系	149

7.13	杆单元坐标系	150
7.14	转动场的离散	151
7.15	梁单元坐标系	153
7.16	弹性体的动力单元	154
7.17	四节点四面体单元	157
7.18	两节点空间梁单元	163
7.19	弹性体的动力刚化效应	173
	思考题	178
第 8 章	柔体部件运动参数的减缩	179
8.1	一维质量弹簧系统固有频率及其振动模态的性质	179
8.2	质量弹簧系统固有频率及其振动模态的求解方法	185
8.3	一般结构的固有频率及其振动模态	189
8.4	一般结构的等效质量弹簧系统	190
8.5	结构的模态集	193
8.6	子结构模态综合法	197
8.7	动力单元矩阵的减缩	200
	思考题	200
第 9 章	多柔体系统运动学	201
9.1	铰的相对方位	201
9.2	柔体部件的模态坐标	203
9.3	邻接物体的相对转动	204
9.4	邻接物体连体基原点矢径	205
9.5	切断铰约束方程	207
9.6	连体基与广义坐标	208
	思考题	209
第 10 章	多柔体系统动力学	210
10.1	多柔体系统虚功率方程	210
10.2	简单多体系统的等效减缩	211
10.3	切断铰约束反力	213
10.4	复杂多体系统的等效减缩	215
10.5	切断铰约束方程的等效减缩	216
10.6	复杂系统的广义加速度	217
10.7	派生树系统铰的理想约束反力	218

10.8	多体系统广义加速度的求解流程·····	219
10.9	约束反力的一般形式·····	221
10.10	广义库仑摩擦定律·····	223
10.11	铰中的摩擦力·····	224
10.12	球铰·····	225
10.13	圆柱铰·····	226
10.14	旋转铰·····	227
10.15	万向节·····	229
10.16	棱柱铰·····	230
	思考题·····	236
	参考文献·····	237

第 1 章 多体系统拓扑构型的数学描述

工程中许多复杂系统都是由具有一定独立性的部件组成的。按照部件之间组成方式的不同,这些复杂系统可以划分为**结构**和**机构**。部件之间没有明显的相对运动,因而系统具有相对稳定的几何形状,这样的系统称为结构,如建筑、桥梁;部件之间可以存在明显相对运动的系统称为机构。这些复杂机构的运动、变形以及力的传递规律就是多体系统动力学的研究对象。只不过在多体系统动力学中将具有一定运动学独立性的部件称为物体,而多体系统定义为由多个物体通过运动副连接的机械系统。

多体系统动力学起源于多刚体系统动力学——由多个刚体组成的系统 (Multi-rigid-body Systems)。当时人们采用一个普遍的假设:物体的小变形不会对系统整体运动产生明显影响。随着技术的进步,实际工程中出现了一些部件变形效应不可忽略的机械系统,人们称之为多柔体系统 (Flexible Multi-body Systems)。由于多柔体系统动力学涵盖了多刚体系统动力学,现在人们已不再特意强调系统中的物体是否为刚体,统称这两类系统为多体系统。

目前,多体系统动力学已成为计算机辅助设计 (Computer Aided Design) 和计算机辅助工程 (Computer Aided Engineering) 中虚拟样机技术的重要组成部分。

1.1 多体系统拓扑结构

多体系统中物体之间的连接方式称为多体系统的拓扑结构。这个拓扑结构通常用代表物体和铰的几何体所组成的图形来表示,如图 1.1 所示。

(1) 铰

铰是指物体间的运动约束,在拓扑结构图中由一条有向线段表示,用于描述线段终点所对应物体相对于线段起点所对应物体的运动,如图 1.1 中的 $H_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 。多体系统中物体之间的相对运动往往不是独立的,铰是物体间运动学关系的一种抽象。实际机械系统中物体之间的连接都是由一些具体的机构实现的,如圆柱铰、球铰、万向节等。它们都是有质量的,但在多体系统动力

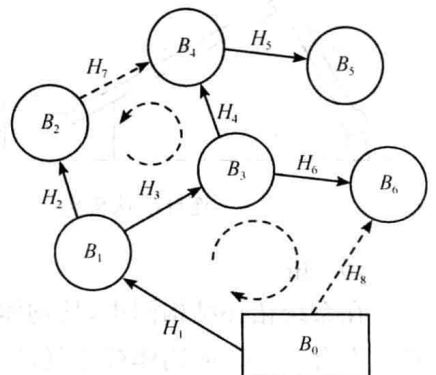


图 1.1 多体系统的拓扑结构

学中,为了合理简化,这些连接机构的质量往往被分配到它所连接的物体上。因此,任何限制两个物体间相对运动的约束都可以称之为铰,不一定非要对应一个实际机构。事实上,实际系统中多个真实的连接机构可能只对应单一的铰,两个没有运动学约束的物体也可以认为是通过一个铰相连的,这个铰称之为虚铰。

(2) 标号

为了区分系统中不同的物体和铰,系统拓扑结构图中每一个物体、每一个铰都被赋予一个标号。

(3) 邻接物体

铰连接的一对物体,如图 1.1 中 B_1 和 B_2 为 H_2 的邻接物体。

(4) 关联

铰与邻接物体之间的连接关系。如果两个物体通过一个铰相连接,则称该铰与这两个物体关联。

(5) 零号物体

运动规律已知的物体。这个物体不一定是一个实际的物体。如果系统中的确存在一个运动规律已知的物体,通常这个物体就被当作零号物体。例如,我们研究火车中人体的运动,由于人体的运动一般不会明显影响火车的运动,火车的运动就可以看作是已知的,从而可以把火车当作零号物体。当我们研究人体的腾空运动时,如果把人体当作一个多体系统,这个系统中就不存在一个运动已知的物体。此时可以将用于描述人体运动的总体坐标系原点(通常是大地上一个固定点)作为零号物体引入到系统中。

例 1.1 如图 1.2 所示的曲柄滑块机构可看作是由两个连杆和一个滑块组成的多体系统。将第一个连杆的基座作为零号物体,则所对应的多体系统拓扑结构图如图 1.3 所示。

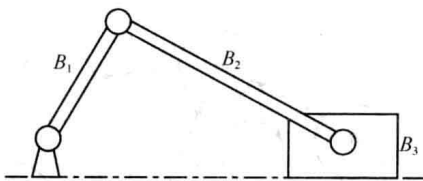


图 1.2 连杆滑块机构

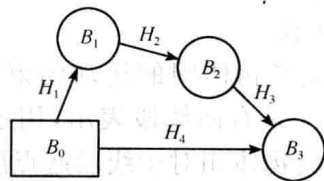


图 1.3 连杆滑块机构的拓扑结构图

(6) 路

在系统拓扑结构图中,从物体 B_i 出发到达物体 B_j 所经过的物体或铰的集合,其中没有一个铰或物体被重复,则称这个集合为 B_i 到 B_j 的路,记作 (B_i, B_j) 。从零号物体到达 B_i 的路简记为 (B_i) 。如图 1.1 所示的系统中, (B_0, B_1, B_3, B_4) 和

(B_0, B_1, B_2, B_4) 都是从 B_0 通往 B_4 的路。

1.2 多体系统的分类

依据零号物体是否真实存在,多体系统可分为有根系统(零号物体与一个实际物体相对应)和无根系统(零号物体为虚拟的)。更为重要的分类依据是系统中物体之间路的特性。

树系统:任意两物体间的路 (B_i, B_j) 是唯一的系统。树系统的拓扑结构图由若干开链形式子结构组成。如果不计零号物体,每条路中物体个数和铰的个数都相等,即树系统中物体个数等于铰的个数(不计零号物体)。

树系统中的几个术语:

1) B_i 的内侧物体 $B_j: B_j \in (B_0, B_i)$, 也可记为 $B_j < B_i$ 。

2) B_i 的外侧物体 $B_j: B_j \in (B_0, B_i)$, 也可记为 $B_j > B_i$ 。

3) B_i 的内接物体: B_i 内侧物体中与 B_i 邻接的物体。

4) B_i 的外接物体: B_i 外侧物体中与 B_i 邻接的物体。

5) B_i 的内接铰: $H_j \in (B_0, B_i)$ 且 H_j 与 B_i 相关联, 则 H_j 称为 B_i 的内接铰。

6) B_i 的外接铰: 除内接铰外, 与 B_i 相关联的其他铰统称为 B_i 的外接铰。

7) 铰的指向: 铰 H_j 在通往其终点所对应物体的路上, 但不在通往 H_j 起点所对应物体的路上, 则称铰 H_j 背离 B_0 (记作 $\leftarrow B_0$)。反之, 铰 H_j 在通往 H_j 起点所对应物体的路上, 但不在通往 H_j 终点所对应物体的路上, 则称铰 H_j 指向 B_0 (记作 $\rightarrow B_0$)。

非树系统:系统中至少存在一对物体 B_i 和 B_j , 它们之间的路 (B_i, B_j) 是不唯一的。

1) 回路: 如果 (B_i, B_j) 和 (B_j, B_i) 不同, 则这两个路所组成的一个集合称为回路。非树系统中至少存在一个回路, 系统中铰的个数多于物体个数。铰与物体的数目之差等于系统中回路的个数。

2) 派生树系统: 通过切断非树系统回路中的某些铰所产生的树系统。被切断的铰称为**切断铰**, 其方向为从物体 $B_c^{+(k)}$ 指向物体 $B_c^{-(k)}$ 。在如图 1.1 所示的多体系统中切断 H_7 和 H_8 铰所得到的多体系统就是相应的派生树系统。

树系统的规则标号

1) 物体标号与相应的内接铰标号相同。

2) 物体标号大于其内接物体标号。

3) 铰的方向背离 B_0 。

1.3 关联矩阵和通路矩阵

为了描述多体系统中物体和铰之间的连接状况,引入两个整型关联函数。

- 1) $i^+(j)$:与铰 H_j 关联且为该铰起点的物体标号。
- 2) $i^-(j)$:与铰 H_j 关联且为该铰终点的物体标号(对于规则标号 $i^-(j)=j$)。

对于图 1.3 所示的多体系统,对应的关联函数如表 1.1 所示。借助这两个函数,多体系统的拓扑结构可以用关联矩阵表示。

表 1.1 图 1.3 所示多体系统关联函数

j	1	2	3	4
$i^+(j)$	0	1	2	0
$i^-(j)$	1	2	3	3

(1) 关联矩阵

具有 N 个物体 J 个铰的多体系统,其关联矩阵为 $(N+1) \times J$ 阶矩阵。如果把该矩阵的起始行记为 0 行,则关联矩阵中的元素定义为

$$S_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{当 } i = i^+(j) \\ -1 & \text{当 } i = i^-(j) \\ 0 & \text{当 } i \neq i^\pm(j) \end{cases} \quad (i = 0, 1, \dots, N; j = 1, 2, \dots, J) \quad (1.1)$$

关联矩阵的行号是物体标号,列号是铰标号。由于系统中一个铰一定与两个物体相关联,所以关联矩阵的第 j 列只有两个非零元素 1 和 -1,其所处的位置分别对应 j 号铰所关联的两个物体标号;由于物体至少与一个铰关联,关联矩阵的每一行至少有一个非零元素;满足上述关系的矩阵一定对应一个多体系统。

树系统的关联矩阵中列数等于行数减 1。采用规则标号的树系统的关联矩阵去掉第一行所形成的子矩阵为上三角矩阵,并且其对角线元素为 -1。

例 1.2 写出图 1.1 所示多体系统的关联矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

将最后两列删除就得到相应派生树系统的关联矩阵

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

例 1.3 关联矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

一定对应一个多体系统,如图 1.4 所示。

(2) 通路矩阵

对于树系统,通路矩阵中的元素定义为

$$T_{ji} = \begin{cases} +1 & \text{当 } H_j \in (B_i, B_0) \text{ 并且指向 } B_0 \\ -1 & \text{当 } H_j \in (B_i, B_0) \text{ 并且背离 } B_0 \\ 0 & \text{当 } H_j \notin (B_i, B_0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, N)$$

(1.2)

通路矩阵的列号是物体标号,行号是铰标号。采用规则标号时,通路矩阵所有非零元素都为-1;并且,由于 $T_{ji} = 0$ (当 $j > i$), $T_{1i} = -1$, 因此通路矩阵是上三角矩阵。

图 1.1 所示的多体系统,其派生树系统的通路矩阵

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

无论是否采用规则标号,关联矩阵与通路矩阵都满足关系 $\underline{TS} = \underline{ST} = E$, 其中 \underline{S} 为删除关联矩阵第一行所形成的子矩阵。

证明 由于

$$(\underline{TS})_{ij} = \sum_{k=1}^N T_{ik} S_{kj} = T_{i^{+(j)}} S_{i^{+(j)}j} + T_{i^{-(j)}} S_{i^{-(j)}j} = T_{i^{+(j)}} - T_{i^{-(j)}} \quad (1.3)$$

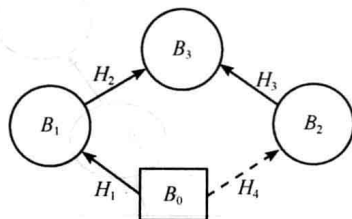


图 1.4 关联矩阵 S 所对应的多体系统

(I) 如果 $i=j$

1) H_j 背离 B_0 , 如图 1.5(a) 所示, 此时, H_j 在通往 $i^-(j)$ 的路上, 但不在通往 $i^+(j)$ 的路上, 因此, $T_{ji^+(j)} - T_{ji^-(j)} = -T_{ji^-(j)} = 1$ 。

2) H_j 指向 B_0 , 如图 1.5(b) 所示, 此时, H_j 在通往 $i^+(j)$ 的路上, 但不在通往 $i^-(j)$ 的路上, 因此, $T_{ji^+(j)} - T_{ji^-(j)} = T_{ji^+(j)} = 1$ 。

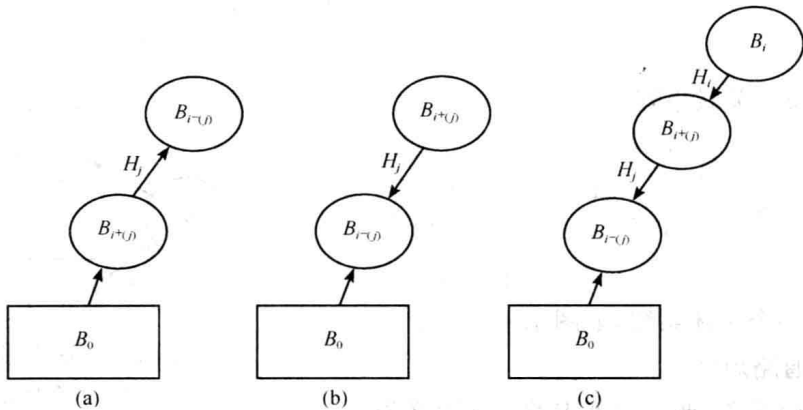


图 1.5 关联矩阵与通路矩阵间的关系

(II) 如果 $i \neq j$

H_i 可能同时在通往 $i^+(j)$ 和 $i^-(j)$ 的路上, 也可能既不在通往 $i^+(j)$ 的路上也不在通往 $i^-(j)$ 的路上, 如图 1.5(c) 所示, 因此 $T_{ii^+(j)} = T_{ii^-(j)}$ 。

综上所述, 可见:

$$(TS)_{ij} = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

(3) 内接物体数组 $L(j)$

树系统中 j 号物体的内接物体标号, $j=1, 2, \dots, N$ 。规则标号时 $L(j) = i^+(j)$ 。内接物体数组不仅可以描述多体系统的拓扑结构, 而且可以很方便地求出通往物体的路。为此, 定义内接物体数组的幂运算为

$$L^2(j) = L(i^+(j)) \tag{1.5}$$

$$L^{n+1}(j) = L(L^n(j)) \tag{1.6}$$

用内接物体数组描述拓扑结构具有简洁方便的优势, 因而被多体系统分析软件广泛采用。

例 1.4 图 1.1 所示多体系统派生树系统的内接物体数组为

$$L = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3)$$

$$L^2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 1)$$

$$L^3 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

$$L^4 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

从中可以清楚地看到:

$$(B_1, B_0) = (1, 0) \quad (B_4, B_0) = (4, 3, 1, 0)$$

$$(B_2, B_0) = (2, 1, 0) \quad (B_5, B_0) = (5, 4, 3, 1, 0)$$

$$(B_3, B_0) = (3, 1, 0) \quad (B_6, B_0) = (6, 3, 1, 0)$$

(4) 末端物体

没有外接物体的物体。判断准则: $L(i)$ 中不出现的物体。

(5) 分叉物体

至少有两个外接物体的物体。判断准则: $L(i)$ 中出现至少两次的物体。

(6) 回路矩阵

非树系统的关联矩阵中删除第一行所得的矩阵 $S = [S \quad S^c]$, 其中 S 为对应派生树系统采用规则标号时的关联矩阵。定义回路矩阵 $U = TS^c$, 则

$$U_{jk} = (TS^c)_{jk} = T_{ji^+(k)} - T_{ji^-(k)} \quad (1.7)$$

j 号铰在铰 H_k 所对应的回路上的必要条件是: 它只能在派生树系统 $(B_0, B_{i^+(k)})$ 或 $(B_0, B_{i^-(k)})$ 其中一条路上。如果采用规则标号, 前者使 $U_{jk} = -1$ (与 k 号铰同向), 后者使 $U_{jk} = 1$ (与 k 号铰反向)。所以, $U_{jk} = 0$ 表示 j 号铰不在回路上。定义切断铰所对应回路的正方向与该铰反向, 如图 1.6 所示回路 C 的方向与切断铰 H_k 方向相反, 其中, $U_{jk} = -1$ 表示 j 号铰在回路上并与回路反向; $U_{jk} = 1$ 表示 j 号铰在回路上并与回路同向。

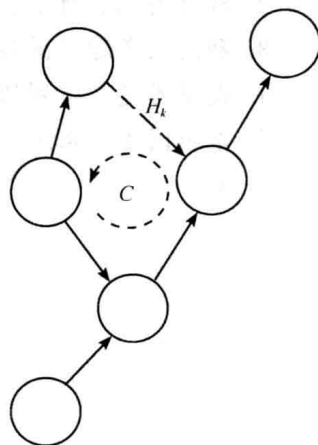


图 1.6 回路矩阵

例 1.5 如图 1.1 所示的多体系统中

$$S^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

相应的回路矩阵

$$U = TS^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$