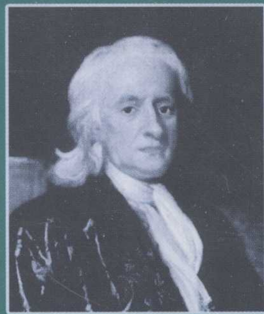

Jingdian Lixue Tipu

经典力学题谱

沈惠川 沈 励 著

经典力学基础
Lagrange 力学
Hamilton 力学

中国科学技术大学出版社

经典力学题谱

经典力学题谱

Jingdian Lixue Tipu

沈惠川　沈　励　著

中国科学技术大学出版社
2008 · 合肥

内　容　简　介

本书是为沈惠川等编著的《经典力学》(中国科学技术大学出版社,2006)一书所配著的题谱.本书除对《经典力学》中全部240余道习题进行详解外,还对10多道"题外题"进行了精解.每道习题和"题外题"的末尾都有"点题",也就是讨论和评论.为了与《经典力学》一书相呼应,本书将原书中的160余道"例题"作了全部收录和部分收录两种处理.

本书以Lagrange力学和Hamilton力学为主线.全书共三章.

本书可作为大学本科物理类各专业及相关专业的教材,也可供研究人员作参考.

图书在版编目(CIP)数据

经典力学题谱/沈惠川,沈励著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2008.7
ISBN 978-7-312-02345-3

Ⅰ.经…　Ⅱ.①沈…②沈…　Ⅲ.经典力学—高等学校—解题　Ⅳ.O31-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第084170号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥学苑印务有限责任公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710mm×960mm　1/16
印张　20.75
字数　459千
版次　2008年7月第1版
印次　2008年7月第1次印刷
定价　40.00元

序

"谱"者，籍录也(《说文新附》、《辞源》).

《辞源》更云：如家谱、年谱、食谱、棋谱.

除此之外，还有剑谱、琴谱等.

这本"题谱"，所籍(作动词用)录的是《经典力学》(沈惠川等，中国科学技术大学出版社，2006)一书中的240余道习题的详解，160余道例题的选解，以及10多道"题外题"的精解.

谈不上是"秘笈"(或许有个别独到之处).

棋谱练棋，琴谱练琴，剑谱练剑，题谱当然练题.

棋谱练心，琴谱练耳，剑谱练胆，题谱练的是脑.

练题之前，先来一番"摆'谱'".

《经典力学》一书，自2006年8月出版以来，一年之内，已销售3000册，外界评价很高，业绩还算不错.出版社在安排第二次印刷的同时，建议撰写一本《题谱》.

《经典力学》书中，本来就有许多例题、习题.

一本教科书，理应有许多例题、习题.

对教授来说，手中有题，心中不慌.

对学生来说，心中有题，考试不慌.

许多相当好的专业书，之所以没有被连续选为教科书，就是因为没有许多例题、习题，或者没有习题答案.

反而，相对不是最好的专业书，却被连年选为教科书.

这是教训.

一将功成万骨枯，一士名就万卷破.

学生做题，是天经地义.

这是功课.

光说不练假把式，光练不说傻把式.

又说又练才是真把式.

现在的学生，久经沙(考)场，斩获无数，不在乎多做题.

但要在做题后"顿悟"，并非每个人的天赋.

事业尚未成功，同学更应修炼.

在正书之后，再“谱写”一本《题谱》，确实主意不错.

个别在正书中未来得及交代的问题，可以在《题谱》中做出交代.

算是补充.

许多在讲课时临时想到、触类旁通的问题，可以在《题谱》中有所发挥、做出评论.

算是拓展.

这正是本《题谱》中每一道习题结尾处“点题”的目的和功效.

《经典力学》一书以 Lagrange 力学和 Hamilton 力学为主线，旁及 Newton 质点和质点系力学、Euler -Newton 刚体力学、Hooke -Navier 弹性力学，因而本《题谱》的主要内容当然在 Lagrange 力学和 Hamilton 力学方面.

甚至在处理第一章“经典力学的基础”中的个别动力学问题时，所动用的“武器”也是 Lagrange 力学的.

有人或许会认为这是“杀鸡用牛刀”，“大炮打蚊子”.

但这样做未必不妥，未必不事半功倍.

正如用导数算斜率、用积分算面积，没有人会有异议.

而且更加精准，更加省事.

正如用张量确定矢量运算公式，常使人产生惊喜.

而且不用强记，不用劳神.

何乐而不为?!

没有人会拒绝用新式武器.

所有的动力学问题都可以用 Lagrange 力学的方法来解决，甚至某些运动学问题.

Lagrange 力学和 Hamilton 力学的算法都是程式化的.

首先建立坐标系，其次写出所关心的点的坐标，第三构造系统的 Lagrangian，第四寻找可遗坐标得到循环积分，第五算出系统的广义能量积分，第六列出系统的运动微分方程，最后根据初条件解出这些微分方程，这就是 Lagrange 力学算法的程式.

首先写出系统的 Lagrangian，其次应用 Legendre 变换得到系统的 Hamiltonian，第三代入正则方程，最后解算正则方程，这就是 Hamilton 力学算法的程式.

Hamilton -Jacobi 理论以及“化动量正则变换”等，也都是程式化的.

整个经典力学都是程式化的.

程式化就是一种力量，给人的印象就像是作战的部队.

有纪律，有气势. 无往而不胜!

Lagrange 力学中最值得关心的，是“非线性非完整约束”问题.

Hamilton 力学中最值得关心的，是 Hamilton 原理能否推广成“相空间中的

Hamilton 原理”的问题.

在《经典力学》一书中已对此作了充分的阐述.

这是《经典力学》一书的特色之一.

关于“非线性非完整约束”问题,必须引入“Euler 条件”.

关于 Hamilton 原理能否推广成“相空间中的 Hamilton 原理”的问题,应该倾听吴大猷先生的意见.

本《题谱》中有关这两个问题的习题倒也不多.

只有两三道.

但是其解法必须引起高度重视.

而且值得玩味.

本《题谱》有两大特色:一是每道题末的“点题”,二是每章末的“题外题”.

“点题”,主要是对每一道习题的评论,从中引出的其他结果,间或还有一般性的介绍.

“题外题”,主要是对《经典力学》一书中未涉及的问题的讨论,这些问题,对往后的学习和研究或许是有用的.

其中最值得关注的是第三章后面的“题外题”,表面上是 Hamilton 力学方法在热力学中的应用,实际上已进入所谓“分析热力学”.

另辟一个新的话题总是具有吸引力的.

本《题谱》是与《经典力学》一书配套的,因此大部分“例题”以“例题萃要”的形式仅仅给出答案,而不再重复写出解题过程.

但是,对一些证明题,对一些常用公式的推导,对一些非力学问题,仍然重复写出了解题过程.

因为这是重要的.

因为这是有用的.

因为有些问题在书中仅出现过一次.

或许在其他书中甚至都不出现.

例题,按《经典力学》一书中的排序,以【例 x. xx】标记.

习题,亦按《经典力学》一书中的排序,改以【题 x. xx】标记.

附录中的例题,在本书中移入第一章,按《经典力学》一书中的排序,以【Ax. xx】标记.

题外题,按内容排序,另以【外 x. xx】标记.

学艺宜精,格物致理.

治学要严,即物穷理.

学而时习，细推物理.
察物内之物，思理中之理.

本书绝大多数题解以及全部“点题”由沈惠川教授完成和撰写.
部分题解和计算机输入由沈励先生完成.

越说越离“谱”了，就此打住！
是为序.

沈惠川　沈励
于中国科学技术大学
2008 年元旦

目　录

序 …………………………………………………………………… (ⅰ)

第 1 章　经典力学基础 …………………………………………… (1)
1.1　题外话 ……………………………………………………… (1)
1.2　本章主题 …………………………………………………… (4)
1.3　例题萃要 …………………………………………………… (11)
1.4　习题解答 …………………………………………………… (23)
1.5　题外题 ……………………………………………………… (74)

第 2 章　Lagrange 力学 ………………………………………… (84)
2.1　题外话 ……………………………………………………… (84)
2.2　本章主题 …………………………………………………… (86)
2.3　例题萃要 …………………………………………………… (93)
2.4　习题解答 …………………………………………………… (126)
2.5　题外题 ……………………………………………………… (207)

第 3 章　Hamilton 力学 ………………………………………… (215)
3.1　题外话 ……………………………………………………… (215)
3.2　本章主题 …………………………………………………… (217)
3.3　例题萃要 …………………………………………………… (222)
3.4　习题解答 …………………………………………………… (253)
3.5　题外题 ……………………………………………………… (315)

跋 …………………………………………………………………… (320)

第1章 经典力学基础

1.1 题 外 话

本书是为《经典力学》一书配套的"题谱"或"习题集".

《经典力学》一书的主线是 Lagrange 力学和 Hamilton 力学，但为了现实的需要，在书的第一章中仍然介绍了 Newton 质点和质点系力学，Newton-Euler 刚体力学和 Hooke-Navier 弹性力学等内容. 从原则上来说，大学普通物理(力学)中比较深入，而数学上当时还不能讲授的内容，都应该归入这一章. 以数学角度来看，从 Newton-Euler刚体力学中涉及张量往后的内容，当时都还不能讲授. 因此，涉及张量往后的内容都是区别于大学普通物理(力学)的新课题.

涉及张量以前的内容，一般来说都可以在大学普通物理(力学)的范围内讲授. 但是其中也有难点，例如 Newton 力学非惯性参考系中的问题以及某些动力学问题. 第一章中关于 Newton 质点和质点系力学的习题就是围绕这两个难点设置的.

人们常常会问：为什么会是"力学"？自然科学中首先引起人们注意，并立即可以进行数学计算(W. Heisenberg 称之为"严密自然科学")的，为什么会是"力学"？从当时的情况来看，起码还有"光学"也是 Huygens 和 Newton 所关心的学科. 从数学的难易程度和物理原理的简繁程度来看，"热力学"也比力学来得简单. 物理学发展到今天，"光学"还是那个样子；热力学就更不用说了，它与经典力学相比就如小学生与大学生相比. 经典力学之所以发展到如此地步，很大程度有赖于 Newton，Euler，d'Alembert，Lagrange，Hamilton 和 Routh 等人的工作.

实际上所有的作为"严密自然科学"的物理学，从理论角度来区分，一共只有两类，即"粒子"物理学和"系综"物理学. Newton《自然哲学之数学原理》一书的第二编"物体(在阻滞介质中)的运动"，讲的是流体力学，实际上就是"系综"物理学，尽管"Euler 描述"是 Euler 发明的，尽管"系综"一词直到 Gibbs 时代才出现. 流体动力学是"系综"的，统计力学必须是"系综"的，所有关于场、多自由度系统和相对论的量子力学必然是"系综"的. 只有 Einstein 的广义相对论，才兼顾了"系综"(Einstein 场方程)和"粒子"(短程线方程，即粒子运动方程). de Broglie 根据广义相对论的处理方

法，也提出过兼顾“系综”和“粒子”的所谓量子力学的“双重解理论”. 而作为经典力学顶峰的 Lagrange 力学和 Hamilton 力学，既可以被用于处理“粒子”，又可以被用于处理“系综”. 但是，对于流体动力学和广义相对论中 Einstein 场方程这样的问题，Lagrange 力学和 Hamilton 力学是无能为力的. 其最主要的原因是，在这些问题中写不出它们的能量表达式. 在广义相对论中，没有能量守恒也没有动量守恒，只有能量一动量张量的守恒. 凡是可以写出能量表达式的，都可以纳入 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的体系，凡是写不出能量表达式的，都不能纳入 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的体系. 从这一意义上来说，流体动力学与 Lagrange 力学和 Hamilton 力学体系，属于完全不同的范畴.

本书的第一章中关于 Newton 质点和质点系力学的习题解答，主要就是非惯性参考系中的问题以及某些动力学问题的解答. 值得一提的是，对某些动力学方面的习题，本书采用了 Lagrange 力学中的解法. 这样做的目的首先当然是解答的需要，因为对某些动力学习题来说，采用 Newton 力学的解法显得十分笨拙和艰难. 思维的体操固然需要，但过度的“体操”也没有什么必要. 既然有了新式武器，抛弃旧式器械就属必然. 正如没有人笨到在已有了代数的今天，再去花脑筋用十分复杂的四则算术题的方法解题一样. 何况，采用了 Lagrange 力学中的解法可以对正确解题有所启发，这种“杀鸡用牛刀”的代价仍是值得的. 读者如果有精力的话，可以试着用 Newton 力学的解法来处理同一个问题；看看对某些习题来说是否十分艰难，以及用 Lagrange 力学中的解法是否对正确解题有所启发.

同时，用 Lagrange 力学中的解法处理某些动力学方面的习题的另一个目的是与第 2 章的习题解答相衔接，相呼应，以保持本书在风格上的统一；而且也扩大了 Lagrange力学的应用范围. 所有的动力学问题，都可以用 Lagrange 力学中的解法来处理. 实际上，对动力学问题而言，甚至对某些运动学问题（参见题 1.6）而言，用 Lagrange力学中的解法，是最简便、最为程式化的.

于是，可以粗略地说，就力学问题而言，尤其是就动力学问题而言，中学物理（力学）主要涉及的是守恒定律（动量守恒、角动量守恒和机械能守恒），其数学工具是代数；大学普通物理（力学）主要涉及的是微分形式的 Newton 力学方程，其数学工具是微积分；到了大学理论物理（经典力学）阶段主要涉及的是分析力学，包括 Lagrange 力学和 Hamilton 力学，其数学工具有张量、矩阵、高等代数以及非线性分析等.

本书的第 1 章中关于刚体力学的习题解答，主要涉及刚体转动惯量的计算以及它们在坐标旋转变换和平移变换下的变换公式；除此之外，就是 Euler 运动学方程和动力学方程. 就数学方面而言，正是从这里开始引入了张量的概念.

刚体作为描述物体的第二个简单模型，正如 W. Pauli 所说，它在相对论中“是没有地位的”，因为信号的传播速度不可能无穷大. 某些人企图在刚体问题中引入相对论表达式，“研究”所谓“转动相对论”问题，在本质上就是错误的. 在相对论中，没有

"刚体"这种概念. 但是,在狭义相对论的推理过程中,那把"尺子"应该是刚体(尽管会"尺缩"),惯性坐标系应该是刚体,因此 Einstein 认为,在狭义相对论中,作为刚体的"尺子"和"时钟"是最基本的.

关于张量计算方面的习题,在《经典力学》一书中是放在"附录 A"里的,现在移到本章中. 大学本科的学生,尤其是理科的学生,如果不懂张量,则如失去飞翔的翅膀. 现代理论物理学和现代理论力学的文献资料大多是用张量形式写成的;如果没有张量知识,那将在后续工作中寸步难行. 张量的引入其实很简单:一个面是由其法线方向决定的,每个法线矢量有 3 个分量;一个力也是矢量,它也有 3 个分量;将力的 3 个分量除以面的法线的 3 个分量,就得到 9 个分量;这就是最简单的 2 阶张量. 有了这个概念之后,再加上"Einstein 求和约定",就自然引出了张量计算. 张量计算的特色也是它的迷人之处在于"换角标". 张量计算重在"计算",没有计算,就不会熟练应用;这是屡试不爽的经验!

本书的第 1 章中关于弹性力学的习题解答,都是最基本的问题;希望通过对这些习题的计算,使读者对弹性力学有一些基本的了解. 当然,较为深入的问题无非也是同样的类型,只是程度不同而已. 信号在弹性体内的传播速度有"纵波速度"和"横波速度"两种、三个方向(因为有两个方向的"横波"),其数量级有可能超过"声速"但决不会达到光速;因此绝不可能有"相对论弹性力学"这种学问. 弹性力学是"Lagrange 描述"的,与"Euler 描述"的流体动力学完全不同;有些人企图将"Lagrange 描述"的弹性力学与"Euler 描述"的电磁场(电磁场理论是相对论的)结合起来,构建所谓"磁弹性力学",在理论框架上同样是完全错误的. 弹性力学在建筑,道路桥梁,航天航空,甚至器件制造和生物医学工程问题中都有重要的应用. 弹性力学非常数学化,实际上(正如 Landau 和 Lifshitz 所说)就是应用数学. 线弹性力学问题,已有"通解"形式,因而以物理学家的眼光来看,已经全部解决;当然与其相关的习题都是线性方程的解,所以也不会太为艰难. 而对非线性弹性力学的问题,至今尚无好的解法;通常是作一些数学变换,让非线性弹性力学的运动微分方程化为已知的典型非线性方程(例如"三波相互作用方程",KdV 方程等,对弹性力学而言主要是非线性 Schrödinger 方程),这就算解出来了.

小学生非要解出个一二三来,中学生只要解出代数表达式即可. 到了大学低年级,是解线性的典型方程(如椭圆方程,抛物型方程,双曲型方程)并附之以特殊函数;再到了大学高年级,只需将已知的方程化成标准的非线性方程就可以了.

1.2 本章主题

1. Newton 质点和质点系力学

（1）相对坐标系以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动时的绝对导数或随体导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'+\boldsymbol{\omega}\times$$

式中 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'$ 为相对导数或当地导数.

（2）Poisson 公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_k}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_k\quad(k=1,2,3)$$

式中 $\boldsymbol{e}_k$ 为 (x_1,x_2,x_3) 方向的单位矢量. Poisson 公式在圆周运动中的应用是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\omega\boldsymbol{e}_\theta\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega\boldsymbol{e}_r\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ 分别为 (r,θ) 方向的单位矢量，ω 是 $\boldsymbol{\omega}$ 的模.

（3）绝对速度和绝对加速度的一般形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'\end{cases}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_0\ \text{是惯性系原点}\ O\ \text{至非惯性系原点}\ O'\ \text{的位矢}\\ \boldsymbol{r}'\ \text{是相对位矢}\\ \boldsymbol{r}\ \text{是绝对位矢}\\ \boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}\\ \boldsymbol{v}'=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\boldsymbol{r}\ \text{是相对速度}\\ \boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\ \text{是绝对速度}\\ \boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}\\ \boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

（4）平面极坐标系中的速度和加速度

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ 分别为(r,θ) 方向的单位矢量.

(5) 自然坐标系中的速度和加速度

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_\tau = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau \\ \boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\tau + \left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_n = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau + \dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{e}_\tau,\boldsymbol{e}_n$ 分别为切向和法向的单位矢量,s 为曲线的弧长,θ 为 $\boldsymbol{e}_\tau$ 与 x_1 坐标轴之间的夹角;而

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$$

若约束方程是 $x_2 = f(x_1)$,则

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f''}{\sqrt{[1+(f')^2]^3}}$$

式中 $f' = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}, f'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}x_1^2}$.

(6) 动量定理,角动量定理和动能定理

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_k (\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)}) \qquad (k = 1,\cdots,n) \\ \mathrm{d}T = \sum\limits_k (\boldsymbol{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k) + \sum\limits_k (\boldsymbol{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k) \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} = \sum\limits_k m_k \boldsymbol{v}_k \text{ 是总动量} \\ \boldsymbol{J} = \sum\limits_k (\boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k) \text{ 是总角动量} \qquad (k = 1,\cdots,n) \\ T = \sum\limits_k \left(\dfrac{1}{2} m_k v_k^2\right) \text{是总动能} \end{cases}$$

而$(\boldsymbol{F}_k^{(e)},\boldsymbol{F}_k^{(i)})$ 分别是作用在第 k 个质点上的外力和内力.

(7) 质心运动定理,对质心的角动量定理和对质心的动能定理

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_C}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C \qquad (k = 1,\cdots,n) \\ \mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}\sum\limits_k m_k v_k'^2\right) = \sum\limits_k (\boldsymbol{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k') + \sum\limits_k (\boldsymbol{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k') \end{cases}$$

式中 $m = \sum\limits_k m_k$,$\boldsymbol{r}_k'$ 是第 k 个质点在质心坐标系中的位矢;而

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_C = m\boldsymbol{v}_C = \sum_k (m_k \boldsymbol{v}_k) \\ \boldsymbol{J}_C = \sum_k (\boldsymbol{r}'_k \times m_k \boldsymbol{v}'_k) \quad (k = 1, \cdots, n) \\ \boldsymbol{M}_C = \sum_k (\boldsymbol{r}_k{}' \times \boldsymbol{F}_k^{(e)}) \end{cases}$$

(8) LaPlace-Runge-Lenz 矢量

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - mk\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \text{const. vector}$$

(9) 位力定理

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{w} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_k (\boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{r}_k)}$$

式中 w 是位力.

2. Newton-Euler 刚体力学

(1) Euler 运动学方程

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\boldsymbol{i}_1 + (-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi)\boldsymbol{i}_2 + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\boldsymbol{i}_3 \\ (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\boldsymbol{e}_1 + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\boldsymbol{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

式中$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$是 K 系("绝对坐标系")坐标轴的单位矢量,$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$是 K' 系("当地坐标系")坐标轴的单位矢量.

(2) 转动惯量和惯量积

$$\begin{cases} I_{11} = \int \rho(x_2^2 + x_3^2)\,\mathrm{d}V \\ I_{22} = \int \rho(x_3^2 + x_1^2)\,\mathrm{d}V \\ I_{33} = \int \rho(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}V \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} I_{23} = -\int \rho x_2 x_3\,\mathrm{d}V \\ I_{31} = -\int \rho x_3 x_1\,\mathrm{d}V \\ I_{12} = -\int \rho x_1 x_2\,\mathrm{d}V \end{cases}$$

式中 $\rho(\boldsymbol{r})$ 为刚体的质量体密度,体积元为 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$.

(3) 常用的"转动惯量"

常用的"转动惯量"如表 1.1:

表 1.1 常用转动惯量

刚体(质量为 m)	惯量主轴	转动惯量
细杆(长为 l)	垂直平分线	$\frac{1}{12}ml^2$
矩形平面(长为 $2a$,宽为 $2b$)	通过质心,与宽边平行	$\frac{1}{3}ma^2$
	通过质心,与平面垂直	$\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$
长方体(长为 $2a$,宽为 $2b$,高为 $2c$)	通过质心,与长棱平行	$\frac{1}{3}m(b^2+c^2)$
细圆环(半径为 a)	直径	$\frac{1}{2}ma^2$
圆板(半径为 a)	通过圆心,与板面垂直	$\frac{1}{2}ma^2$
	直径	$\frac{1}{4}ma^2$
椭圆平板(长半轴为 a,短半轴为 b)	长轴	$\frac{1}{4}mb^2$
	短轴	$\frac{1}{4}ma^2$
	通过质心,与平板垂直	$\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
正圆柱体(底半径为 a,高为 l)	对称轴	$\frac{1}{2}ma^2$
	底面直径	$\frac{1}{12}m(3a^2+l^2)$
椭圆截面柱体(底面长半轴为 a,短半轴为 b,高为 l)	柱体轴线	$\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
	底面长轴	$\frac{1}{12}m(3b^2+l^2)$
正圆锥体(底半径为 a,高为 l)	对称轴	$\frac{3}{10}ma^2$
	底面直径	$\frac{1}{20}m(3a^2+2l^2)$
半球体(半径为 a)	直径	$\frac{2}{5}ma^2$
球体(半径为 a)	直径	$\frac{2}{5}ma^2$
薄球壳(半径为 a)	直径	$\frac{2}{3}ma^2$
球壳(外半径为 a,内半径为 b)	直径	$\frac{2}{5}m\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$
椭球体(3 个半轴分别为 a,b,c)	a 轴	$\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$

(4) Euler 动力学方程

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{12}\dot{\omega}_2 + I_{31}\dot{\omega}_3 + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 + I_{23}(\omega_2^2 - \omega_3^2) + (I_{31}\omega_2 - I_{12}\omega_3)\omega_1 = M_1 \\ I_{12}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\dot{\omega}_3 + (I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1 + I_{31}(\omega_3^2 - \omega_1^2) + (I_{12}\omega_3 - I_{23}\omega_1)\omega_2 = M_2 \\ I_{31}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 + I_{12}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + (I_{23}\omega_1 - I_{31}\omega_2)\omega_3 = M_3 \end{cases}$$

若将转动坐标轴取为刚体的主轴，即

$$I_{23} = I_{31} = I_{12} = 0$$

则上述方程组成为

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ I_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ I_3 \dfrac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases}$$

式中(I_1, I_2, I_3)为主转动惯量.

(5) 刚体角动量和转动动能的张量表示和矩阵表示

① 刚体角动量

$$J_k = I_{kl}\omega_l \quad (k,l = 1,2,3)$$

$$(J_k) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

② 刚体转动动能

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2} I_{kl}\omega_k\omega_l = \frac{1}{2} J_k\omega_k \quad (k,l = 1,2,3)$$

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

③ 张量形式的 Euler 动力学方程

张量形式的 Euler 动力学方程可以被写成

$$\frac{dJ_k}{dt} + e_{kji}\omega_j J_i = M_k \quad (i,j,k = 1,2,3)$$

若设“主转动惯量”为 I_k，因为

$$J_k = I_k\omega_k \quad (\text{不对 } k \text{ 求和})$$

所以，张量形式的 Euler 动力学方程又可被写成

$$I_k \frac{d\omega_k}{dt} + e_{kji}\omega_j(\omega_i I_i) = M_k \quad (\text{不对 } k \text{ 求和})$$

3. Hooke-Navier 弹性力学

(1) 广义 Hooke 定律和 Lame 关系或 Young-Poisson 关系

① 广义 Hooke 定律