结构振动分析

Structural Vibration Analysis

◆ 陈宇东 编

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

结构振动分析

陈宇东 编

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据
结构振动会析 /陈宇东编. —长春：吉林大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-5601-3892-3
Ⅰ.结… Ⅱ.陈… Ⅲ. 结构振动—振动分析 Ⅳ. 0327
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 106212 号

书 名：结构振动分析
作 者：陈宇东 编

责任编辑、责任校对：安斌
封面设计：孙 群
吉林大学出版社出版、发行
长春市永昌印业有限公司印装
开本：787×1092 毫米 1/16
2008 年 7 月第 1 版
印张：21 字数：357 千字
2008 年 7 月 第 1 次印刷
ISBN 978-7-5601-3892-3
定价：44.00 元

社址：长春市明德路 421 号 邮编：130021
发行部电话：0431—88499826
网址：http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

内容简介

本书系统地讨论了结构线性振动分析方法，包括单自由度系统的自由振动和强迫振动的分析方法，两自由度和多自由度系统的固有振动和响应分析的模态分析方法，弹性体自由振动及响应分析的模态分析方法，振动分析的近似方法——瑞利能量法及吕兹分析方法等。

本书可作为高等工科院校的研究生的振动分析教材，也可供航空、航天、机械、土木及车辆工程等部门从事结构振动分析的技术人员参考。

前　　言

振动是工程中普遍存在的重要问题．工程结构设计已逐步从静态强度、刚度设计转变为动态（振动）设计，因此结构的动态特性分析和响应分析就变得越来越重要．现代大型、高速计算机的应用以及先进的计算技术和软件技术的发展，使得各种复杂结构的动力特性分析及响应分析成为可能．针对科学和技术的发展，国内、外各高等院校的工程技术专业都已把"振动分析"作为研究生的必修课．本书结合现代计算技术和软件技术的发展，以结构模态分析为主线，讨论结构振动分析的统一模式，使读者能掌握比较完整的线性振动分析的基本方法．

全书共六章．

第一章讨论单自由度系统的自由振动．

第二章系统地讨论单自由度系统的强迫振动，包括谐波激励的响应、频率响应、周期激励的响应、傅立叶级数、非周期激励的响应、脉冲响应和卷积积分、非周期激励的响应、傅立叶积分、系统的一般响应等．

第三章讨论两自由度系统的振动，包括固有振型（模态）和固有坐标，初始激励和谐波激励的响应．

第四章系统讨论线性系统的振动分析方法，包括振动特征值问题、振型（模态）向量的正交性、展开定理、响应分析的模态迭加法、半定系统、瑞利商等．

第五章介绍弹性弦、杆和梁的振动，固有振型（模态）函数的正交性，展开定理，系统响应分析的模态分析法，瑞利商等．

第六章介绍振动分析的一些近似方法，包括瑞利能量法及吕兹法．

本书可作为高等院校与振动有关专业的研究生教材，也可供航空、航天、机械、车辆及土木工程等部门从事结构振动分析的技术人员参考．

本书的缺点和错误，请读者指正．

编者

2007 年 7 月于吉林大学

目　录

绪　论

对于自然界中普遍存在的运动和引起运动的力之间的关系,人类一直进行着研究.从哲学家亚里士多德开始一直到伽利略和牛顿,才正确地阐明了运动的一般规律,即描述物体在宏观、低速条件下运动的牛顿定律:惯性定律,力与加速度定律,以及作用与反作用定律.研究力和运动之间关系的有关内容,通常称为动力学.

现代工程技术当中,一个非常重要的部分就是分析和预测各种物理系统的动力行为.动力行为中一种普遍存在的类型就是振动运动,简称为“振动”.

那么什么是振动?我们给振动这样的定义:振动是指系统在它的某一个平衡位置附近的来回摆动.而能够产生振动运动的物理系统,统称为“振动系统”.

本书主要内容是针对各种物理系统的结构振动进行讨论.一般来说,对一个复杂的完整系统进行分析是相当困难的.通常,一个复杂的物理系统由许多部分组成,而其中的每一个部分又可以作为一个单独的、相对简单的子系统.所以,分析这样的复杂系统,首先需要确定系统的各个组成部分,并确定各个组成部分的物理属性.我们将会看到,这些物理属性决定着系统的动力特性.通常,这些物理属性都是由实验来测定的.

由实际的工程结构抽象得出的分析模型.通常称为物理模型,根据建立的物理模型可建立相应的数学模型,最后再应用相应的数学工具得到所需要的主要结果,这就是对振动系统进行分析的一般方法.因此,一个系统的振动问题又可表述为:系统受到激励(输入)后将产生怎样的响应(输出).

这里所说的激励可表现为系统具有的初始位移、初始速度、外部作用力以及系统自身某些物理属性的改变等.而系统被激励所产生的运动,称为该系统的响应.振动系统的响应一般用位移进行描述,而速度和加速度可由位移进一步导出.

振动系统对初始激励(初始位移、初始速度等)的响应,称为“自由振动”.自由振

动通常是指弹性振动系统受到某些初始激励而偏离平衡位置后，不再承受外界的激励而进行的一种运动形式；当系统承受持续存在的激励时，比如在一段时间内持续存在的外部载荷以及持续变化的物理属性等，振动系统的响应，称为“强迫振动”，只要激励持续存在，系统的强迫振动一般便不会消失.

可以从不同角度，对振动系统的研究模型进行多种分类，其中主要可分为：

(1)离散系统和连续系统：对前面提到的系统属性，我们统称为系统的参数.通常，真实物理系统的参数都是连续分布的，所以这样的连续系统的自由度个数将具有无限多个.并且，连续系统的运动规律是用偏微分方程进行描述，但在许多情况下，我们可以用连续系统的离散特征来代替系统参数的连续分布特征，从而大大简化振动系统的分析模型.

由参数连续分布系统到离散系统的简化，一般是通过适当的集总方法，将连续分布的系统参数进行离散集总，从而成为所谓的离散系统.这样，离散系统的运动行为即可由常微分方程进行描述，且其自由度个数为有限多个.

(2)线性系统和非线性系统：振动系统还可以按照对它们建立的数学模型而分为线性系统和非线性系统.描述线性系统的运动微分方程中，应变量只出现一次幂且没有叉积；而非线性系统的运动微分方程中，应变量具有高次幂或分数幂.所以，只要观察系统运动的微分方程就可以判断该系统是线性系统还是非线性系统.但是，某些系统的运动微分方程中，包含有自变量的高次幂或分数幂，但这只不过是具有变系数(参数)的系统，并不一定为非线性系统.需要注意的是，线性系统和非线性系统间的区分往往取决于运算的范围，并不是系统本身所固有的性质.例如，对于简单的单摆系统，其恢复转矩与 $\sin\theta$ 是成比例的，其中 θ 为摆幅.显然，对于较大的摆幅，$\sin\theta$ 是 θ 的非线性函数，但是对于小的摆幅，则可以近似地由 θ 表示.所以，对同一个单摆系统，考虑微小摆幅时，可以看做是线性系统，而摆幅较大时，则为非线性系统.另外，对于非线性系统，需要不同于处理线性系统的数学方法.

(3)确定性系统和非确定性系统：从承受的载荷类型来看，振动系统又可分为确定性系统和非确定性系统.对于确定性系统，激励及系统参数可由时间的确定性函数给出，其运动方程为确定的微分方程；对于非确定性系统，是指激励或系统参数随时间的变化规律不是完全已知的，无法由时间的确定性函数描述，此类系统的运动由随机微分方程或由模糊模型、凸模型以及区间模型进行描述.

(4)常参数系统和变参数系统:从系统参数的角度,振动系统还可分为常参数系统和变参数系统.显然,常参数系统是指系统的各个物理属性(参数)不随时间的变化而变化,其运动方程可由常系数微分方程描述;反之,变参数系统是指系统的参数随时间变化而变化,可用变系数微分方程描述.

对于工程实际中存在的各种振动问题,大体上可分为以下三类:

(1)振动分析:激励条件和系统参数已知时,求解系统的振动特性和响应.

(2)系统识别:激励条件和响应均已知时,识别振动系统的参数.这类问题可称为振动分析的逆问题.

(3)振动设计和控制:在给定激励条件下,对振动系统的固有特性(或响应)进行设计(或控制),从而使得振动系统的固有特性或在给定激励下的响应满足一定的条件.这种问题实质上也是振动分析的逆问题.

实际的工程问题中,以上几种振动问题并不是孤立存在的,往往同时包含着其中的某几个方面,比如振动设计和振动分析.

第一章 单自由度线性系统的自由振动

1.1 概 述

如前所述,振动系统的分析模型可分为离散系统和连续系统.离散系统具有有限个自由度数,而连续系统具有无限多个自由度数.在振动问题中,自由度被定义为:完全描述(或确定)一个振动系统运动所需要的独立坐标的个数.

离散系统当中,单自由度的线性系统是最简单的一种,其运动的数学描述可归结为一个二阶的线性常微分方程.

虽然单自由度线性系统对于一般复杂的振动系统来说好像是过于粗略的近似,但以后会看到,当采用了模态(或振型)分析方法时,许多的线性多自由度离散系统以至某些连续系统的数学方程,都可以简化为一组互不相关的二阶常微分方程,而其中每一个方程都与单自由度系统的运动微分方程相类似.所以,作为深入研究多自由度系统振动以及连续系统振动的基础,对单自由度系统的详细讨论是非常必要和有意义的.

此外,单自由度系统虽然与真实的复杂机械系统相比具有一定的近似性,但通过对单自由度系统振动理论的研究,可使我们首先从本质上认识振动运动.

本章首先从最简单的无阻尼单自由度线性系统的自由振动入手,引出振动系统的固有频率这一重要概念,然后再通过有阻尼单自由度线性系统的自由振动,研究当系统具有小(欠)阻尼、临界阻尼以及大(过)阻尼时的运动情况.最后,从能量的观点对单自由度振动系统进行一般性的讨论.

1.2　离散系统的物理属性

1.2.1　离散振动系统的组成

描述各种物理系统中线弹性结构的物理属性包括：系统的质量特性、刚度特性及能量耗散机理.对于单自由度线性系统，每一个属性都集总于单一的物理单元上，构成了单自由度线性系统的三个基本组成部分，即描述系统刚度特性的弹簧，质量特性的离散质量和能量耗散机理的阻尼器，如图 1.0 所示.

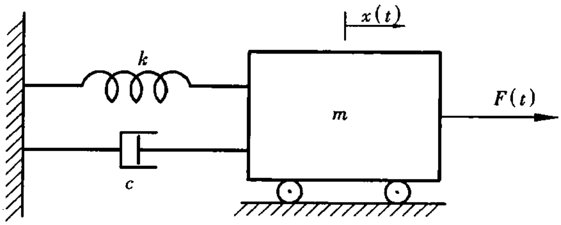

图 1.0　弹簧 – 阻尼器 – 质量系统

其中，反映振动系统刚度特性的弹簧，对于单自由度平动系统来说，可用普通的无质量拉伸弹簧表示，如图 1.1(a)所示.图中弹簧承受作用力为 F_s，两端位移分别用 x_1 和 x_2 表示.弹簧变形较小时，力 F_s 与弹簧变形 x_2-x_1 呈线性正比关系，比例常数为图 1.1(b)所示直线部分的斜率 k，k 称为弹簧常数或弹簧刚度.显然，线性范围内，弹性力（亦称恢复力）F_s 与弹簧变形的关系为 $F_s=k(x_2-x_1)$.

事实上，真实物理系统的能量耗散机理是相当复杂的，我们这里讨论的是一种与振动系统速度成正比的粘性阻尼器.通常，粘性阻尼器是由活塞松配合于盛有油等某种粘性流体的圆筒组成，粘性流体可以在圆筒内活塞周围流过.这种阻尼器又称为减震器，如图 1.2(a)所示.同弹簧一样，阻尼也假定为无质量.图 1.2(a)中，作用于阻尼器两端的力 F_d，称为阻尼力，它阻止阻尼器两端相对速度 $\dot{x}_2-\dot{x}_1$ 的增大，符号上圆点“·”表示对时间变量的导数.如果 F_d 引起阻尼器内粘性流体的光滑剪切，并且相对速度较小，则 F_d 与 $\dot{x}_2-\dot{x}_1$ 的关系一般为线性关系：$F_d=c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$，如图1.2

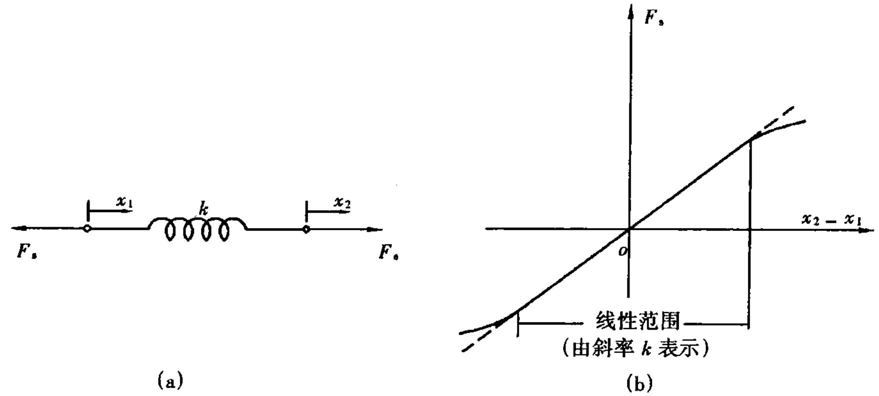

图 1.1　拉伸弹簧

(b)所示.其中,c 为图中直线的斜率,称为粘性阻尼系数.

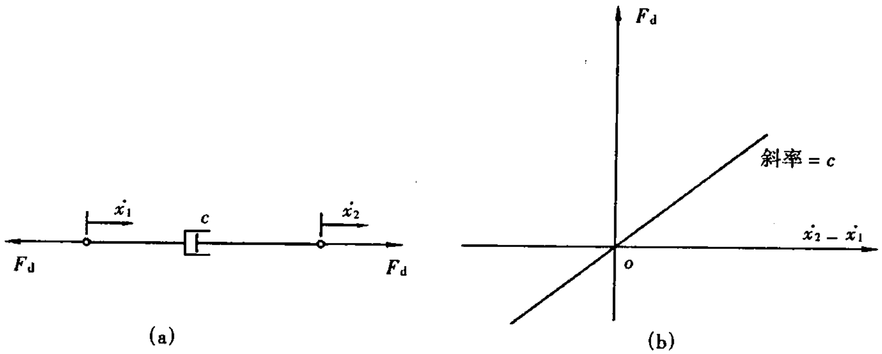

图 1.2　粘性阻尼器

振动系统的质量特性:根据牛顿第二定律,作用于离散质量上的随时间变化的外部载荷 F_m 与相对于惯性坐标系的加速度成比例,即:$F_m = m\ddot{x}$,而比例常数即是离散质量 m,如图 1.3(a)所示.显然,这里的离散质量具有刚体的性质.

以后,我们将把离散系统的三个物理属性分别以常参数 k、c、m 表示,且除非另有说明,离散系统中的弹簧及阻尼器不记质量,离散质量具有刚体的性质.如果从能量角度观察离散系统的这三个组成部分,则弹簧和质量能够储存和释放能量,而阻尼器则消耗振动系统能量.

虽然以上讨论的仅是平动振动系统,但对于具有扭转振动的离散系统,同样存在着完全相似的特征.扭转振动系统的三个基本组成是扭转弹簧、扭转阻尼器及具

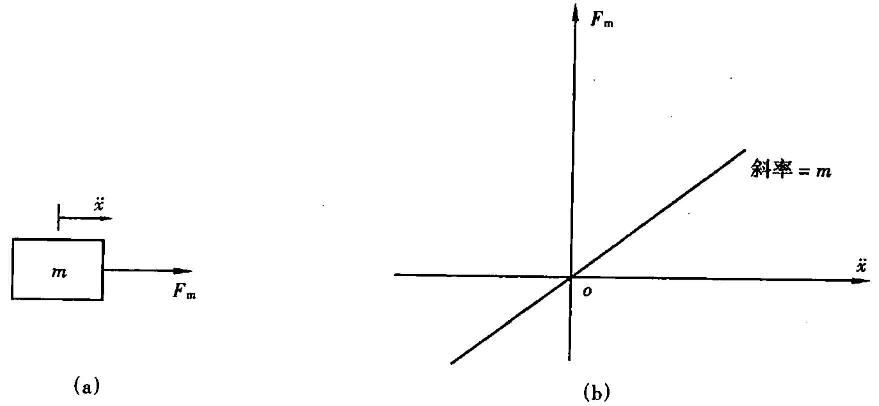

图 1.3　离散质量

有转动惯量的圆盘.如果用 θ_1 和 θ_2 表示扭转弹簧两端角位移,M_s 表示扭转弹簧的恢复扭矩,则 M_s 与 $\theta_2-\theta_1$ 的关系与图 1.1(b)所示的(b)的拉伸弹簧曲线类似,即有关系式:$M_s=k(\theta_2-\theta_1)$.如果以 M_d 表示扭转阻尼器两端的阻尼扭矩,同样以 c 表示阻尼系数,那么 M_d 与阻尼器两端的角速度之差 $\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1$ 的曲线类似图 1.2(b)所示,所以有类似关系式:$M_d=c(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)$.扭转振动系统的质量特性,为一个具有转动惯量 I 的圆盘,角位移记为 θ,则扭矩 M_I 与角加速度 $\ddot{\theta}$ 的关系类似图 1.3 中离散质量与加速度的关系曲线.这时,斜率为转动惯量 I.所以,同样有类似关系式:$M_I=I\ddot{\theta}$.

1.2.2　弹簧的串联和并联

有时,弹簧具有各种的组合方式,特别常见的是图 1.4 所示的并联[图 1.4(a)]和串联[图 1.4(b)]两种情况.这里,弹簧均假设为线性弹簧.

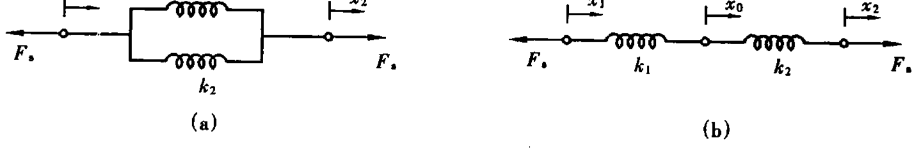

图 1.4　弹簧的并联与串联

图 1.4(a)所示的并联弹簧中,两端弹簧力 F_s 分解为相应弹簧 k_1 和 k_2 的力 F_{s1} 和 F_{s2},所以有关系式:

$$F_{s1}=k_1(x_2-x_1),\ F_{s2}=k_2(x_2-x_1) \tag{1.1}$$

因为 F_{s1} 和 F_{s2} 之和必等于 F_s，即 $F_s = F_{s1} + F_{s2}$，由此得出：

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = (k_1 + k_2)(x_2 - x_1) \tag{1.2}$$

引入记号，$k_{eq} = k_1 + k_2$，则：

$$F_s = k_{eq}(x_2 - x_1) \tag{1.3}$$

其中，记号 k_{eq} 表示弹簧 k_1 和弹簧 k_2 并联连接后的等效弹簧刚度. 显然，如果 n 个弹簧 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 并联连接，则相应的等效弹簧刚度为：

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{1.4}$$

对于图 1.4(b)所示的串连弹簧 k_1 和 k_2，可分别写出：

$$\begin{cases} F_s = k_2(x_2 - x_0) \\ F_s = k_1(x_0 - x_1) \end{cases} \tag{1.5}$$

以上两式消去 x_0，得到：

$$F_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}(x_2 - x_1) = k_{eq}(x_2 - x_1) \tag{1.6}$$

则串联弹簧的等效弹簧刚度通式为：

$$k_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)^{-1} \tag{1.7}$$

工程结构中的许多弹性构件，如轴向振动的细杆、扭转振动的轴以及弯曲振动的杆等，常常可看做是弹簧. 这时，等效的弹簧常数可由力(或力矩)除以弹性构件在该力(或力矩)作用下产生的位移(或转角)求得.

例 1.1　图 1.5 表示了两段不同长度、不同扭转刚度的扭转轴，左端固定，右端附有一圆盘，圆盘上作用扭矩 M. 图中，G 为剪变模量，J 为轴横截面对其圆心点的极惯性矩，GJ 为抗扭刚度.

解　由材料力学圆轴扭转变形公式可知：

$$\theta_1 = \frac{Ml_1}{(GJ)_1},\ \theta_2 - \theta_1 = \frac{Ml_2}{(GJ)_2} \tag{a}$$

如果将两段轴看做是扭转弹簧，则两段轴的等效弹簧常数分别为：

$$k_1 = \frac{M}{\theta_1} = \frac{(GJ)_1}{l_1},\ k_2 = \frac{M}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{(GJ)_2}{l_2} \tag{b}$$