浙江大学数学系列丛书

Introduction to Numerical Analysis

数值分析基础

叶兴德 程晓良 陈明飞 薛 莲 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

●浙江大学数学系列丛书

数值分析基础

叶兴德　程晓良　陈明飞　薛莲　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数值分析基础／叶兴德等编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.8

（浙江大学数学系列丛书）

ISBN 978-7-308-06130-8

Ⅰ.数… Ⅱ.叶… Ⅲ.数值计算—高等学校—教材 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 115634 号

内容简介

本书介绍科学计算的一些基本数值方法，包括插值、函数逼近、数值微分与数值积分、线性方程组的解法、矩阵特征值计算、非线性方程求根、常微分方程与偏微分方程的差分方法等. 本书除了介绍各种数值算法的理论外，还用 MATLAB 编制了实现算法的程序，适用大学理学和工科专业学生学习科学计算、数值方法等课程作教材或参考书.

数值分析基础

叶兴德　程晓良　陈明飞　薛莲　编著

责任编辑　徐素君
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
电话：0571－88925591，88273066（传真）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　18.5
字　　数　450 千
版 印 次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-308-06130-8
定　　价：33.00 元

序

为了弘扬浙江大学数学系的优良传统和学风，适应当代数学研究和教学的发展，2004年起浙江大学数学系组织力量对本科生课程设置和教材进行了重要改革，尤其是对数学系主干课程如数学分析、高等代数、解析几何、实变函数、常微分方程、科学计算、概率论等的教材进行了重新编写，并在浙江大学出版社出版浙江大学数学系列丛书。这是本套系列丛书的第一部分。

丛书的主要特点：

一、加强基础，突出普适性。丛书在内容取舍上，对数学核心内容不仅不削弱，反而有所加强，尤其注重数学基本理论、基本方法的训练。同时，为了适应浙江大学"宽口径"的学生培养制度，对数学应用、数学试验等内容也给予了高度关注。

二、关注前沿理论，强调创新。丛书试图从现代数学的观点审视和选择经典的内容，以新的视角来处理传统的数学内容，使丛书更加适合浙江大学教学改革的需要，适合通才教育的培养目标。

三、注重实践，突出适用性。丛书出版以前，有的作为讲义或正式出版物在浙江大学数学系试用过多次，使丛书的内容和框架、结构比较完善。同时，为了适合不同层次的学生合理取舍，丛书在内容选取上，为学生进一步学习准备了丰富的材料。

在编写过程中，数学系教授们征求了许多学生的意见，并希望能够在教学使用过程中对这套教材作进一步完善。今后我们还会对其他课程的教材进行相应的改革。

为了这套丛书的编写和发行，浙江大学数学系的许多教授和出版社的编辑投入了巨大的精力，我在此对他们表示衷心的感谢。

刘克峰

浙江大学数学系主任

2008年2月

前 言

当今，科学计算的地位与作用得到人们的充分认识，被称为继实验、理论后的第三种科学方法. “计算不仅仅只是作为验证理论模型的正确性的手段，大量的事例表明它也是重大科学发现的手段. ”(参见石钟慈：第三种科学方法——计算机时代的科学计算.北京：清华大学出版社，2000).

本书介绍科学计算的一些基本数值方法，包括函数逼近(插值、样条、最佳平方逼近、最佳一致逼近、数值微分与积分等)，数值代数(Gauss消元法、Jacobi迭代法、G-S迭代法、共轭梯度法、矩阵特征值计算的幂法、QR方法等)，非线性方程求根(二分法、Newton法等)，常微分方程与偏微分方程的差分方法. 在介绍这些经典的数值方法时，我们力求包含一些适合于本科生的最新的研究成果，比如，Lagrange 插值的质心形式、保形分段三次Heimite插值、常微分方程数值求解的边值化方法等. 同时，突出数值方法的设计思想与算法的Matlab实现，适当淡化数学理论的推导，一些定理只给出结论而不作证明.

虽然所有的算法都是用Matlab编程实现的，但我们认为只要读者有一定的程序设计经验(比如，学过一点BASIC，C或FORTRAN等编程语言)，就可以看懂这里的Matlab程序. 如果读者能够边学习边上机实践，那么就可以很快学会Matlab编程，这也是我们所希望的.

本教材源于浙江大学理学大类学生的讲义，我们希望给非信息与计算科学专业的理学学生介绍科学计算的基本理论和算法，同时也能涵盖工科学生计算方法课程的内容. 在本书的编写过程中，参考了国内外许多相关的教材和论文，我们已在参考文献中将它们一一列出. 在此，我们表示由衷的感谢. 本书在我们多年相关课程的教学基础上编写而成，其中，叶兴德编写了函数逼近部分内容（第三、四、五章），陈明飞编写了数值代数部分内容（第一、二、七章），程晓良编写了微分方程数值解的内容（第八、九章），薛莲编写了数值微分和数值积分这部分内容（第六章）. 由于水平所限，本书难免存在不足和错误，真诚欢迎读者提出批评指正.

作者

2008年8月

目录

第 1 章　误差与范数

在科学和工程的计算中，由于数学模型和测量手段的限制，得到的数据往往不是考察对象的准确值，而是满足一定精度的近似值. 在计算机的运算过程中，往往采用固定字长的浮点运算，对计算结果会产生舍入误差. 因此，在数值计算中，误差的出现是不可避免的，分析误差对计算结果的影响是有重要意义的.

在数值计算中，我们会大量地使用向量和矩阵运算，为了研究向量序列和矩阵序列的收敛性，我们引入了向量和矩阵的范数.

1.1　误差的来源

用数学方法解决一个具体的实际问题，首先要建立数学模型. 在数学模型中通常包含各种各样的参变量，这些参数往往都是通过观测得到的. 当数学模型不能精确求解时，通常要建立一套行之有效的数值方法求它的近似解，由于在计算机中浮点数只能表示实数的近似值，因此用计算机进行实际计算时每一步都可能有误差.

(1) 模型误差

客观世界的规律是由多种因素支配的，人们在建立数学模型时，为了不使模型过于复杂，往往只考虑主要因素，而忽略次要因素. 因而数学模型常含有误差，这种误差叫做模型误差.

例如，自由落体运动的数学模型，只考虑地球的引力而忽略月球的引力，甚至忽略空气的阻力.

(2) 测量误差

人们在测量物体的长度、温度和质量等数据时，由于测量工具本身只有一定的精度，以及在读取测量数据时也有一定的误差，因此得到的测量数据是物体的近似数据，测量数据常含有误差，这种误差叫做测量误差.

例如，医生在测量病人的体温时，得到38.6℃，这是一个精确到小数点后一位的数据，是符合医学精度的数据.

(3) 截断误差

在数学模型中常常有一些方程或表达式无法直接在计算机上计算，例如微分方程、超越函数等; 人们用易于计算的近似方程和近似表达式来代替，例如用差分方程代替微分方程、用多项式代替超越函数等，此时会产生误差.

截断误差是指原来表达式的准确值与近似公式的准确值的差.

例如，如果用$(x-\frac{1}{3!}x^3)$ 代替$\sin x$，则利用Taylor 公式得到截断误差为

$$\sin x-(x-\frac{1}{3!}x^3)=\frac{\cos\xi}{5!}x^5.$$

因此，当$|x|$ 比较小时，这样代替还是可以的.

(4) 舍入误差

如果一个表达式是可以在计算机上计算的，计算结果是否一定准确? 答案是否定的. 这是因为计算机处理的数据是有限位的，在计算过程中出现位数超过规定的数据时，要对该数据作四舍五入的处理，由此产生的误差称为舍入误差.

1.2 绝对误差、相对误差和有效数字

1.2.1 绝对误差

定义1.2.1. *近似值与准确值的差称为绝对误差.*

设x 是准确值，$\hat{x}$ 是近似值，则

绝对误差$=\hat{x}-x$

通常我们无法知道准确值，因此不能算出误差的准确值，只能估计出误差的绝对值不超过某个正数，这个正数称为绝对误差限.

例1.2.2. *求$\hat{x}=3.14$ 与π 的绝对误差限.*

解 由于$3.1415<\pi<3.1416$，因此

$$|\hat{x}-\pi|\le|3.14-3.1416|=0.0016$$

所以绝对误差限是0.0016 .

1.2.2 相对误差

只用绝对误差还不能说明数的近似程度，例如甲打字时每百个字错一个，乙打字时平均每千个字错一个，他们的误差都是错一个，但显然乙要准确些.这就启发我们除了要看绝对误差大小外，还必须顾及量的本身.

定义1.2.3. *绝对误差与准确值的比称为相对误差.*

设x 是准确值，$\hat{x}$ 是近似值，则

相对误差$=\frac{\hat{x}-x}{x}$

通常我们无法知道准确值，也不能算出相对误差的准确值，只能估计出相对误差的绝对值不超过某个正数，这个正数称为相对误差限.

例1.2.4. *求$\hat{x}=3.14$ 与π 的相对误差限.*

解 由于$3.1415<\pi<3.1416$，因此

$$|\frac{\hat{x}-\pi}{x}|\le|\frac{3.14-3.1416}{3.1415}|<0.0006$$

所以相对误差限是0.0006 .

1.2.3 有效数字

定义1.2.5. *若一个数的误差不大于该数某位数字的半个单位，则从左边第一个非零数字起到这一位数字止都是该数的有效数字，其个数称为该数有效数字的位数.*

例如，$\pi=3.14159265\cdots$ ，则π 的3 位有效数字是3.14；π 的4 位有效数字是3.142. 注意: 有效数字的最后一位要对后面的数字作四舍五入处理.

1.3 减少误差的一些方法与数值稳定性

在数值计算中，由于舍入误差的影响，可能会使得在数学上等价的两个表达式变得不等价. 例如，计算表达式：$5/6-(1/2+1/3)$，如果精确计算，结果为0; 在Matlab上计算，结果是: 1.1102×10^{-16}. 因此，我们在设计计算程序时，要避免把两个实数表达式是否相等作为判别条件.由此可见，在数学上等价的两个表达式，在计算机上得到的结果可能是不同的. 如何在数学上等价的若干个表达式中，选择计算精度高的表达式，是下面我们要讨论的问题.

1.3.1 减少误差的一些方法

在数值计算中每步都可能产生误差. 而一个问题的解决，往往要经过成千上万次运算，误差的积累可能会变得很大. 下面，通过对误差的某些传播规律的简单分析，指出在数值计算中应注意的几个原则，它有助于鉴别计算结果的可靠性并防止误差危害现象的产生.

(1) 要避免两相近数相减

在数值运算中两相近数相减会使有效数字严重损失.

例如，计算$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ ，当x 很大时，如果直接计算，会使有效数字严重损失. 但是，如果把计算公式变换为$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ 进行计算，就会保持较多的有效数字.

(2) 要防止大数“吃掉”小数

若参加运算的数的数量级相差很大，而计算机的位数有限，如不注意运算次序，就可能出现大数“吃掉”小数的现象，影响计算结果.

例如在五位十进制计算机上，计算

$$12345+\sum_{i=1}^{100}\frac{i}{500}$$

如果直接计算，结果是12345，只有3位有效数字；如果改变运算次序

$$\sum_{i=1}^{100}\frac{i}{500}+12345$$

得到12355，有5位有效数字. 有效数字增加了2位.

(3) 注意简化计算步骤，减少运算次数

同样一个计算题，如果能减少运算次数，不但可节省计算机的计算时间，还能减少舍入误差.

例如，计算x^{14} 的值，如果逐个相乘要用14次乘法，但若写成$x^2x^4x^8$只要做5次乘法运算即可.

(4) 绝对值太小的数不宜作除数

如果在一个分数中，分母需要经过运算得到，其绝对值很小，如果直接计算，可能会使有效数字严重损失.

例如，计算$\frac{1.23}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$，当$x$ 很大时，如果直接计算，会使有效数字严重损失. 如果把计算公式变换为$1.23(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ 进行计算，就会保持较多的有效数字.

1.3.2 数值稳定性

在算法的执行过程中会出现舍入误差的积累.对同一个问题，用不同的算法进行计算，舍入误差对计算结果的影响也各不相同. 舍入误差对计算结果的精确性影响较小的算法，具有较好的数值稳定性;反之就认为算法的稳定性较差，或者是不稳定的.

分析整个算法的舍入误差是十分复杂的工作. 我们采用向后误差分析的方法，即认为在算法的初始数据中有一定的误差，而中间的运算过程是精确进行的. 这样可以简化误差分析的工作.

由于数值稳定性直接与算法有关，所以我们通过例子来分析算法的数值稳定性.

例1.3.1. 分析下列计算

$$\begin{aligned}&x_{n+1}=2.5x_n-x_{n-1}\\&x_1=\tfrac{1}{3}\ ,\ x_2=\tfrac{1}{6}\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

的数值稳定性.

解 如果精确运算，得到$x_n=\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n$.

但是，如果对x_1,x_2 作微小的扰动，例如令

$$x_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{30000}\ ,\ x_2=\frac{1}{6}+\frac{4}{30000}$$

则有$x_n = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{30000}2^n$，这是一个发散数列.
所以本算法是数值不稳定的.

例1.3.2. 分析下列计算

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1.1x_n - 0.3x_{n-1} \\ x_1 &= \tfrac{1}{3}, \ x_2 = \tfrac{1}{6} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

的数值稳定性.

解 如果精确运算，得到$x_n = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n$.
但是，如果对x_1, x_2 作微小的扰动，令

$$x_1 = \frac{1}{3} + \epsilon_1, \ x_2 = \frac{1}{6} + \epsilon_2$$

则有$x_n = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n + c_3(\frac{1}{2})^n + c_4(\frac{3}{5})^n$ 其中

$$c_3 = 12\epsilon_1 - 20\epsilon_2, \ c_4 = \frac{50}{3}\epsilon_2 - \frac{25}{3}\epsilon_1$$

所以本算法是数值稳定的.

1.4 向量范数和矩阵范数

用一个数来表示一个向量或一个矩阵的大小，对于研究向量序列和矩阵序列的收敛性，起到非常重要的作用.

1.4.1 向量范数

记$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 是列向量，用$||\boldsymbol{x}||$ 表示$\boldsymbol{x}$ 的范数. 向量范数$||\cdot||$ 要满足下列关系式:

(1) 正定性: 对所有的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 有 $||\boldsymbol{x}|| \geq 0$，而且 $||\boldsymbol{x}|| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$；
(2) 齐次性: 对所有的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 和$\alpha \in C$ 有 $||\alpha\boldsymbol{x}|| = |\alpha| \cdot ||\boldsymbol{x}||$；
(3) 三角不等式: 对所有的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ 有 $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$.

最常用的向量范数是下列三个:

$$||\boldsymbol{x}||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \tag{1.4.1}$$

$$||\boldsymbol{x}||_2 = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.2}$$

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \tag{1.4.3}$$

它们分别称为**1**范数，**2**范数和∞ 范数.

1.4.2 矩阵范数

记$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是矩阵，用$||\boldsymbol{A}||$ 表示$\boldsymbol{A}$ 的范数. 矩阵范数$||\cdot||$ 要满足下列条件:

(1) 正定性: 对所有的$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 $||\boldsymbol{A}||\geq 0$，而且 $||\boldsymbol{A}||=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}=0$；

(2) 齐次性: 对所有的$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和$\alpha\in C$ 有 $||\alpha\boldsymbol{A}||=|\alpha|\cdot||\boldsymbol{A}||$；

(3) 三角不等式: 对所有的$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 $||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\leq||\boldsymbol{A}||+||\boldsymbol{B}||$；

(4) 相容性: 对所有的$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}||\leq||\boldsymbol{A}||\cdot||\boldsymbol{B}||$.

由于矩阵范数要满足的条件比较多，因此定义矩阵范数要比定义向量范数的难度要大，利用向量范数来定义矩阵范数是一种有效途径. 由下列公式定义的范数

$$||\boldsymbol{A}||=\sup_{x\neq 0}\frac{||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||} \tag{1.4.4}$$

称为**从属于向量的范数**，或者称为**由向量范数导出的范数**.

最常用的矩阵范数是下列四个:

$$||\boldsymbol{A}||_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \tag{1.4.5}$$

$$||\boldsymbol{A}||_2=[\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.6}$$

$$||\boldsymbol{A}||_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{1.4.7}$$

$$||\boldsymbol{A}||_F=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.8}$$

其中前面的三种矩阵范数是从属于向量的范数，分别称为矩阵的**1范数**，**2范数**和**∞ 范数**；最后的一个范数为**Frobenius 范数**，简称**F范数**. 在上述四个范数中，除了2范数，其余3种范数都是容易计算的. 2范数和F范数有下列重要性质.

定理1.4.1. *设$\boldsymbol{A}$ 是n 阶方阵，$\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵，则*

(1) $||\boldsymbol{U}||_2=1$；

(2) $||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_2=||\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}||_2=||\boldsymbol{A}||_2$；

(3) $||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_F=||\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}||_F=||\boldsymbol{A}||_F$.

证明 (1) 由于$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$，所以$||\boldsymbol{U}||_2=1$.

(2) 一方面$||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_2\leq||\boldsymbol{U}||_2\cdot||\boldsymbol{A}||_2=||\boldsymbol{A}||_2$，另一方面$||\boldsymbol{A}||_2=||\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_2\leq||\boldsymbol{U}^*||\cdot||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_2=||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_2$，所以$||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_2=||\boldsymbol{A}||_2$. 用同样的方法证明$||\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}||_2=||\boldsymbol{A}||_2$.

(3) 记$\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，其中$a_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是列向量，则有

$$||\boldsymbol{A}||_F^2=\sum_{k=1}^{n}||a_k||_2^2.$$

由于$||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_F^2 = ||[\boldsymbol{U}a_1, \boldsymbol{U}a_2, \cdots, \boldsymbol{U}a_n]||_F = \sum_{k=1}^n ||\boldsymbol{U}a_k||_2^2 = \sum_{k=1}^n ||a_k||_2^2 = ||\boldsymbol{A}||_F^2$，所以$||\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}||_F = ||\boldsymbol{A}||_F$. 又由于$||\boldsymbol{A}||_F = ||\boldsymbol{A}^*||_F$，所以$||\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}||_F = ||\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}^*||_F = ||\boldsymbol{A}^*||_F = ||\boldsymbol{A}||_F$.

□

1.4.3 谱半径

记$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是矩阵，其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，称

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\le j\le n} |\lambda_j| \tag{1.4.9}$$

为$\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

谱半径与范数之间有下列关系.

定理1.4.2. 若$||\cdot||$ 是从属于向量的矩阵范数，则

$$\rho(\boldsymbol{A}) \le ||\boldsymbol{A}||\ , \ \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n} \tag{1.4.10}$$

证明 设λ_1 是$\boldsymbol{A}$ 的模最大特征值，$\boldsymbol{y}$ 是特征向量，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda_1\boldsymbol{y}$，于是

$$\rho(\boldsymbol{A}) = |\lambda_1| = \frac{||\lambda_1\boldsymbol{y}||}{||\boldsymbol{y}||} = \frac{||\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}||}{||\boldsymbol{y}||} \le ||\boldsymbol{A}|| \tag{1.4.11}$$

所以(1.4.10)式成立.

定理1.4.3. 设$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\epsilon$ 是任一正数，则存在一个与$\boldsymbol{A}, \epsilon$ 有关的范数$||\cdot||_{A_\epsilon}$，且$||\cdot||_{A_\epsilon}$ 是从属于向量的矩阵范数，有

$$||\boldsymbol{A}||_{A_\epsilon} \le \rho(\boldsymbol{A}) + \epsilon \tag{1.4.12}$$

证明 由矩阵的Jordan 标准型定理知，存在非奇异的矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_r)\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{1.4.13}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{1.4.14}$$

又由于$\rho(\boldsymbol{A}) < 1$，所以存在一个正数ϵ，使得$\rho(\boldsymbol{A}) + \epsilon < 1$.令

$$\boldsymbol{D}_i = \mathrm{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \cdots, \epsilon^{n_i-1}) \tag{1.4.15}$$