拓扑学导论

朱培勇　雷银彬 编著

科学出版社
www.sciencep.com

拓扑学导论

朱培勇　雷银彬　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍点集拓扑学的基本知识. 第 1~7 章介绍拓扑空间及其基本概念, 分离性公理与可数性公理, 紧空间与广义紧空间, 和空间、积空间与商空间, 拓扑空间的连通性以及完备度量空间的基本理论; 第 8 章介绍基本群的概念以及基本群的计算方法; 第 9, 10 章主要介绍作者近年来在用覆盖刻画的拓扑空间上的部分研究结果.

本书可作为高等院校高年级本科生和研究生的拓扑学入门教材, 也可作为一般拓扑学爱好者进入覆盖性质与遗传覆盖性质等方面研究的基础性教材.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学导论/朱培勇, 雷银彬编著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-023329-5

Ⅰ.拓… Ⅱ.①朱… ②雷… Ⅲ. 拓扑-概论 Ⅳ. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 171355 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 李奕萱
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 杜剑平

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张: 13 3/4
印数: 1—3 000 字数: 267 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

前　言

拓扑学被誉为现代数学的“三大基础”之一. 各重点高等院校的数学专业都将其作为一门专业基础课程. 本书是作者在近年来为电子科技大学应用数学专业及相近专业的本科生、研究生开设拓扑学课程的讲稿的基础上编写而成. 全书共 10 章.

第 1 章介绍学习点集拓扑所需的知识准备, 为了第 10 章诸多定理证明的需要, 1.4 节专门介绍了序数和超限归纳法. 如果读者只对点集拓扑作一般了解, 即不打算进入点集拓扑 (也称一般拓扑) 的专门研究课题, 这一节内容可以不选学.

第 2~6 章主要介绍点集拓扑的基本知识, 内容包括: 拓扑空间及其基本概念, 分离性公理与可数性公理, 紧空间与广义紧空间, 和空间、积空间与商空间以及拓扑空间的连通性; 第 7 章简略论述完备度量空间的基本理论, 主要目的是为研究生进入拓扑动力系统以及混沌的数学基础等研究课题搭桥铺路; 为了读者进一步学习代数拓扑的需要, 第 8 章介绍基本群的概念以及基本的计算方法; 第 9, 10 章主要介绍作者近年来在用覆盖刻画的拓扑空间上的部分研究成果. 这些成果可以帮助拓扑学方向的研究生以及对拓扑学感兴趣的数学工作者较快地进入一般拓扑学的科研前沿.

作为一本教材, 根据我们的经验, 对于拓扑学的初学者, 本科生用 48 学时或者研究生用 40 学时可以完成第 2 章、第 3 章、第 4 章 4.1 节和 4.2 节以及第 5 章 5.2 节的教学. 对于在本科阶段已经选修过拓扑学的研究生, 可以用 40 学时选讲 2.4 节、3.3 节和第 4~6 章; 如果是 64 学时, 则可再完成第 7 章和第 8 章主体内容的教学. 当然, 这种课程安排, 仅供授课教师参考.

在编写本书过程中, 得到了国家自然科学基金 (10671134) 的资助, 也得到了电子科技大学应用数学学科建设经费的资助, 电子科技大学应用数学学院黄廷祝院长和傅英定教授以及同门学者四川大学数学学院张树果教授等对本书的撰写和出版给予了极大的鼓励、关心与支持. 电子科技大学的一些硕士、博士研究生以及应用数学专业与信息与计算科学专业的 05 级本科生在以本书作为讲义选修拓扑学时, 为本书的撰写与修改都提出了很多很好的修改意见. 在此, 对这些关心和支持过本书撰写与出版的单位、领导、同行专家、学生以及各位朋友表示衷心感谢!

作　者

2008 年秋于电子科技大学 (成都)

目　录

第 1 章　集合论基础

这一章介绍本书所需要的集合论的基本知识, 并且统一术语与记号. 主要内容包括集合的运算、关系与映射的概念、性质, 序与集论基本公理等.

1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念

集合是只能用语言描述而无法严格定义的一个基本概念 (原始概念), 通常用 "具有某种属性的一些事物的全体或总体" 等语言来描述. 例如, 具有某种性质的数的集合; 具有某种性质的图形的集合; 满足一定条件的函数的集合; 某些集合构成的集合 …… 集合也简称集.

集合通常用大写的英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示, 有时也用大写希腊字母 $\Delta, \Lambda, \Omega, \cdots$ 表示. 组成集合的事物 x 叫做集合的元素, 简称为集合的元或者点, 通常用小写的英文字母和希腊字母表示. 当 x 是集合 A 的元时, 记为 $x \in A$, 读作 "x 属于 A". 否则, 记为 $x \notin A$, 读作 "x 不属于 A". 为了直观地表示集合, 通常还用符号 $\{x|x$ 具有 …… 属性$\}$表示集合. 以集合为元素的集合通常称为集合族, 简称为集族, 通常用花写的大写英文字母 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \cdots$ 表示.

在这里我们应当指出, 上述描述性方法给出的集合概念可能会导致逻辑上的矛盾. 这种矛盾通常称为悖论. 下面是著名的罗素悖论:

令 A 是不以自己为元素的集合的集合, 试问: $A \in A$ 是否一定成立?

事实上, 假设 $A \in A$, 则由 A 的含义, 必有 $A \notin A$. 因此, 与假设矛盾; 如果假设 $A \notin A$, 则由 A 的含义得 $A \in A$. 这又与假设矛盾.

因此, 无论怎样都是矛盾. 当然, 为了避免这种悖论, 我们可以对 "集合" 这个名词用一定的公理系统加以限制. 这里, 我们不打算介绍公理集合论. 为了本书内容的需要, 仅作如下一些约定:

(1) "所有集合的全体" 不是一个集合, 也不是一个集族 (可以称它为一个类);

(2) 没有任何对象的总体, 称为空集. 空集是集合, 并用字母 $\varnothing$ 表示;

(3) 集合 X 的幂集 $\{A|$ 集合 A 的每个元都是 X 的元 $\}$ 是一个集合;

(4) 任何一个集合中都没有重复元素, 更确切地说, 如果 x 与 y 是某集合 A 的两个相同的元素 (即 $x = y$), 则我们总是将 A 的子集 $\{x, y\}$ 看成是单元素集合

$\{x\}=\{y\}$, 并且作为集合, 不允许有诸如 $\{1,2,2\}$, $\{x,x\}$ 等表示;

(5) 集合 A 的一些元素构成的总体 B 是一个集合, 称为集合 A 的一个子集, 记为 $B\subset A$, 读作 "B 包含于 A" 或者 "A 包含 B";

(6) 设 A 与 B 都是集合, A 中一切元素与 B 中一切元素构成的总体也是一个集合, 称为 A 与 B 的并, 记作 $A\bigcup B$, 即 $A\bigcup B=\{x|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$;

(7) 设 A 与 B 是两个集合, A 与 B 的公共元素组成的总体是一个集合, 称为 A 与 B 的交, 记作 $A\bigcap B$, 即 $A\bigcap B=\{x|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(8) 设 A 与 B 是两个集合, 属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的总体是一个集合, 称为 A 与 B 的差, 记作 $A\backslash B$, 即 $A\backslash B=\{x|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$;

(9) 设 A 与 B 是两个集合, 则 $\{(x,y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$ 是一个集合, 称为是 A 与 B 的笛卡儿集, 记作 $A\times B$, 即 $A\times B=\{(x,y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$.

更一般地, 设 Λ 是一个非空集合, 如果每个 $\alpha\in\Lambda$, α 都对应一个集合 A_α, 则称 Λ 是集合族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的指标集, 并且有

并: $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x|\exists\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\}$ 是一个集合;

交: $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x|\forall\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\}$ 是一个集合;

笛卡儿集: $\Pi_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}|\,\forall\alpha\in\Lambda,\ x_\alpha\in A_\alpha\}$ 也是一个集合.

1.1.2 集合的运算

定义 1.1.1 设 A 与 B 是两个集合. 称集合 A 与 B 是相等的, 如果 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$. 当 A 与 B 相等时, 记作 $A=B$.

定义 1.1.2 设 X 是一个集合, $A\subset X$, 称集合 $X\backslash A$ 是集合 A 关于 X 的补集, 记为 A^c, 即 $A^c=X\backslash A$.

定理 1.1.1 (De Morgen 定律) 设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是集合 X 的一个子集族, 则

(1) $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$;

(2) $(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$.

证明 (1) $\forall x\in(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)^c$, 则 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$, 所以, $\forall\alpha\in\Lambda,x\notin A_\alpha$, 即 $\forall\alpha\in\Lambda,x\in A_\alpha^c$, 则 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$, 从而 $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)^c\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$. 又因为 $\forall x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$, 则 $\forall\alpha\in\Lambda,x\notin A_\alpha$, 故 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$, 所以 $x\in(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)^c$, 即 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c\subset(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)^c$. 于是 (1) 真.

(2) 与情形 (1) 完全类似, 请读者自证. □

命题 1.1.1 设 A,B,C 是任意集合, 则

(1) $A\subset A$, $\varnothing\subset A$;

(2) 若 $A\subset B$, $B\subset C$, 则 $A\subset C$;

(3) $A\bigcup B=B\bigcup A$; $A\bigcap B=B\bigcap A$;

(4) $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$; $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$;

(5) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$; $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

证明 由集合相等的定义与集合包含"$\subset$"关系的定义可直接得证. □

命题 1.1.2 设 A, B 是集合 X 任意两个子集, 则

(1) $A\bigcap A^c=\varnothing$; $A\bigcup A^c=X$;

(2) $A^{cc}=A$;

(3) $\varnothing^c=X$; $X^c=\varnothing$;

(4) $A\backslash B=A\bigcap B^c$.

证明 由补集的定义和集合相等的概念可直接得证. □

命题 1.1.3 设 A,B 是集合 X 任意两个子集, 则下列各条等价:

(1) $A\subset B$; (2) $B^c\subset A^c$;

(3) $A\bigcap B^c=\varnothing$; (4) $A^c\bigcup B=X$;

(5) $A\bigcap B=A$; (6) $A\bigcup B=B$.

证明 (1)⇒(2) 设 $x\in B^c$, 则 $x\notin B$. 据 (1), $x\notin A$. 即 $x\in A^c$.

(2)⇒(3) 若 $\exists x\in A\bigcap B^c$, 则 $x\in A$ 并且 $x\in B^c\subset A^c$. 这是一个矛盾. 所以, $A\bigcap B^c=\varnothing$ 成立.

(3)⇒(4) $\forall x\in X$, 若 $x\notin B$, 则 $x\in B^c$. 由 (3), $x\notin A$, 即 $x\in A^c$, 所以 $X\subset A^c\bigcup B$. 反过来, $A^c\bigcup B\subset X$ 成立是自然的. 从而 (4) 真.

(4)⇒(5) 显然 $A\bigcap B\subset A$ 真. 反之, $\forall x\in A$, 则 $x\notin A^c$. 由 (4), $x\in B$. 从而 $x\in A\bigcap B$, 即 $A\subset A\bigcap B$ 真.

(5)⇒(6) $B\subset A\bigcup B$ 是显然的. 反之, $\forall x\in A\bigcup B$. 若 $x\in A$, 由 (5) 有 $x\in A\bigcap B$. 因此, $x\in B$, 即 $A\bigcup B\subset B$, 所以 (6) 真.

(6)⇒(1) $\forall x\in A$, 因为 $A\bigcup B=B$, 则 $x\in B$, 即 (1) 真. □

1.1.3 一些基本集合的表示

本书中, 我们用

$\mathbb{N}$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, 称为自然数集或正整数集;

$\mathbb{Z}^+$ 表示集合 $\{0,1,\cdots,n,\cdots\}$, 即 $\mathbb{Z}^+=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$, 称为非负整数集;

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数构成的集合, 称为有理数集;

$\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合, 称为实数集.

1.2 关系与映射

在我们以前所学过的各门数学课程中, 几乎都有诸如函数、序、运算以及等价等各种概念. 这些概念有一个共同特点: 表述给定集合的元素之间的某种联系. 我们把这种联系称为"关系". 更确切地, 有如下定义:

定义 1.2.1　设 X,Y 是两个集合, 如果 R 是笛卡儿集 $X\times Y$ 的一个子集, 即 $R\subset X\times Y$, 则称 R 是从 X 到 Y 的一个二元关系 (简称关系). 当 $(x,y)\in R$ 时, 则称 x 与 y 有关系 R, 记作 xRy. 若集合 $A\subset X$, 则称 Y 的子集 $\{y\in Y|\,\exists x\in A,$ 使得 $xRy\}$ 为集合 A 关于 R 的**像集**, 记为 $R(A)$. 当 $A=X$ 时, Y 的子集 $R(X)$ 称为关系 R 的值域. 特别地, 当 $A=\{x\}$ 时, 记 $R(\{x\})$ 为 $R(x)$, 并称 $R(x)$ 为点 x 的**像**.

根据这个定义, 下面命题平凡成立.

命题 1.2.1　设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系 (即 $R\subset X\times Y$), 则集合 $\{(y,x)\in Y\times X|xRy\}$ 是从集合 Y 到集合 X 的一个关系.

定义 1.2.2　称 $\{(y,x)\in Y\times X|\,xRy\}$ 关系为 R 的逆关系, 记为 R^{-1}. 如果 $B\subset Y$, 则称 X 的子集 $R^{-1}(B)$ 为集合 B 关于 R 的**原像集**. 特别地, 当 $B=Y$ 时, 称 $R^{-1}(Y)$ 为 R 的定义域. 特别地, 当 $B=\{y\}$ 时, 记 $R^{-1}(\{y\})$ 为 $R^{-1}(y)$, 并称 $R^{-1}(y)$ 为点 y 的原像.

定义 1.2.3　如果 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系, 即 $R\subset X\times Y$, 并且 S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系, 即 $S\subset Y\times Z$, 则称从集合 X 到集合 Z 的关系

$$T=\{(x,z)|\exists y\in Y,\ \text{使得}\ xRy\ \text{并且}ySz\}$$

为关系 R 与乘积 S 的复合或乘积, 记为 $R\circ S$, 即 $T=R\circ S$.

定理 1.2.1　设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系, S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系, T 是从集合 Z 到集合 W 的一个关系. 则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$;

(3) $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.

证明　(1) 因为 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$, 即 $x(R^{-1})^{-1}y$ 当且仅当 $yR^{-1}x$, 而 $yR^{-1}x$ 当且仅当 xRy, 由 xRy 当且仅当 $(x,y)\in R$, 故 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$ 当且仅当 $(x,y)\in R$, 从而 $(R^{-1})^{-1}=R$.

(2) 因为 $(x,z)\in(S\circ R)^{-1}$ 当且仅当 $(z,x)\in S\circ R$, 而 $(z,x)\in S\circ R$ 当且仅当 $\exists y\in Y$, 使得 $(z,y)\in S$ 并且 $(y,x)\in R$, 故当且仅当 $(y,z)\in S^{-1}$ 并且 $(x,y)\in R^{-1}$, 因此, 当且仅当 $(x,z)\in R^{-1}\circ S^{-1}$, 从而 $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$.

(3) 利用 (2) 的方法, 可证 $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$ 成立. □

定理 1.2.2　设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系, S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系, 则对于 X 的任意两个子集 A 与 B, 下列三个式子成立:

(1) $R(A\bigcup B)=R(A)\bigcup R(B)$;

(2) $R(A\bigcap B)\subset R(A)\bigcap R(B)$;

(3) $(S\circ R)(A)=S(R(A))$.

证明 (1) 如果 $y\in R(A\bigcup B)$, 则存在 $x\in A\bigcup B$, 使得 xRy. 当 $x\in A$ 时, 有 $y\in R(A)$; 当 $x\in B$ 时, 有 $y\in R(B)$, 因此, 若 $x\in A\bigcup B$, 则 $y\in R(A)\bigcup R(B)$, 即 $R(A\bigcup B)\subset R(A)\bigcup R(B)$. 反过来的包含关系同理可证 (留给读者练习).

(2) 和 (3) 的证明同 (1) 的证明完全类似. 留给读者自己补证. □

在定义 1.2.1 中, 如果取 $Y=X$, 则有如下定义:

定义 1.2.4 设 X 是一个集合, 称 R 为 X 上的一个二元关系, 如果 R 是笛卡儿集 $X\times X$ 的一个子集, 即 $R\subset X\times X$.

定义 1.2.5 集合 X 上一个关系 R 称为是一个等价关系, 如果满足如下三个条件:

(1) 自反性. $\forall x\in X$, 都有 xRx, 即笛卡儿集合 $X\times X$ 的对角线 $\Delta=\{(x,x)|x\in X\}\subset R$;

(2) 对称性. 若 xRy, 则 yRx;

(3) 传递性. 若 xRy 并且 yRz, 则 xRz.

命题 1.2.2 设 R 是集合 X 上的一个等价关系, 对于 $\forall x\in X$, 令集合

$$[x]_R=\{y\in X|yRx\},$$

则下列各结论成立:

(1) $\forall x\in X$, 必有 $x\in[x]_R$;

(2) $\forall x,y\in X$, 必有 $[x]_R\bigcap[y]_R=\varnothing$ 或者 $[x]_R=[y]_R$;

(3) $\bigcup_{x\in X}[x]_R=X$.

证明 (1) 因为 R 是一个等价关系, 则 $\forall x\in X$, 有 xRx. 所以 $x\in[x]_R$.

(2) 对于 $\forall x,y\in X$, 如果 $[x]_R\bigcap[y]_R\neq\varnothing$, 取 $z\in[x]_R\bigcap[y]_R$, 则 xRz 并且 zRy. 现在证 $[x]_R\subset[y]_R$.

事实上, $\forall u\in[x]_R$, 则 uRx. 因为 xRz 并且 zRy, 由等价关系的传递性, 有 uRy 成立, 故 $u\in[y]_R$, 所以 $[x]_R\subset[y]_R$.

同理可证 $[y]_R\subset[x]_R$, 从而 $[x]_R=[y]_R$.

(3) 因为 $X=\bigcup_{x\in X}\{x\}\subset\bigcup_{x\in X}[x]_R\subset X$, 所以 $X=\bigcup_{x\in X}[x]_R$. □

由命题 1.2.1 知, 集合 X 上的任何一个等价关系 R 都将 X 分成一些两两不相交的一些子集 $\{\,[x]_R\mid x\in X\,\}$. 这些子集所构成的集族称为集合 X 相对于 R 的**商集**, 记为 X/R, 即 $X/R=\{\,[x]_R\mid x\in X\,\}$, 并且 X/R 中的每一个元 $[x]_R$ 都称为 R 的一个**等价类**.

下面介绍两集合之间的一种特殊的关系 —— 映射.

定义 1.2.6 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个关系. 如果对于每一个 $x\in X$, 都存在唯一的 $y\in Y$, 使得 xfy, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个映射, 记为 $f:X\to Y$.

换言之, X 到 Y 的一个关系 f 称为是从 X 到 Y 的一个映射, 如果 $\forall x \in X$,

(1) 存在 $y \in Y$, 使得 xfy, 并且

(2) 若存在 $y_1, y_2 \in Y$ 合于 xfy_1, 并且 xfy_2 则 $y_1 = y_2$.

鉴于定义 1.2.6 中的条件, 为了与以前学习过的函数的表示方法一致, 我们通常将 xfy 记为 $y = f(x)$.

由于映射本身是关系, 因此, 关于映射有下列基本性质:

命题 1.2.3　设 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是映射, 则

(1) 从 X 到 Z 的关系 $g \circ f$ 是一个映射. 记为 $g \circ f: X \to Z$, 并称 $g \circ f$ 为 f 与 g 的复合映射;

(2) 映射 f 的逆 f^{-1} 是一个关系, 但未必一定是一个映射.

这个命题成立是平凡的, 请读者自行验证.

命题 1.2.4　设 $f: X \to Y$, 并且 $g: Y \to Z$, 则对于 $\forall x \in X$, 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

证明　$\forall x \in X$, 由映射的定义, $\exists y \in Y$, $\exists z \in Z$, 使得 $f(x) = y$, 且 $g(y) = z$, 即 xfy 并且 ygz. 再由定义 1.2.5, $x(g \circ f)z$. 因此 $(g \circ f)(x) = z$. 另一方面, 因 xfy, 则 $f(x) = y$. 又因 ygz, 故 $f(x)gz$, 即 $g(f(x)) = z$, 从而 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. □

定理 1.2.3　设 X 与 Y 是两个集合, $f: X \to Y$. 如果 $A, B \subset X$, 则

(1) $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$;

(2) $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$;

(3) $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$.

简言之, 映射的原像保持集合的并、交、差运算.

证明　由于 f^{-1} 是一个关系, 所以根据定理 1.2.2(1), (1) 中的等式无需证明; 为证明 (2) 中的等式, 也只需补充证明

$$f^{-1}(A \bigcap B) \supset f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B).$$

现证明如下：设 $x \in f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$. 由于 $x \in f^{-1}(A)$, 故 $f(x) \in A$; 由于 $x \in f^{-1}(B)$, 故 $f(x) \in B$, 从而 $f(x) \in A \bigcap B$, 即 $x \in f^{-1}(A \bigcap B)$. 因此, 以上要证明的包含关系成立.

(3) 中等式的证明也是直接的, 请读者自己补证. □

定义 1.2.7　设 X 和 Y 是两个集合, $f: X \to Y$. 如果 Y 中的每一个点都有原像 (即 f 的值域为 Y, 亦即 $f(X) = Y$), 则称 f 是一个**满射**或者称 f 为一个**从X到Y上的映射**; 如果 X 中不同的点的像是 Y 中不同的点 (即对于 $\forall x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$), 则 f 称为一个**单射**; 如果 f 既是一个单射又是一个满射, 则称 f 是一个**一一映射**; 如果 $f(X)$ 是一个单点集, 则称 f 是一个常值映射.

易见, 集合中的恒同关系 (即 $\forall x \in X$, 都有 $f(x)=x$) 是从 X 到 X 的一个一一映射. 我们也常称这样的映射为 (集合 X 上的) 恒同映射, 有时也称为单位映射, 并且常用记号 i_X 来表示.

由于下面的这个定理, 一一映射也称为可逆映射.

定理 1.2.4 设 X 和 Y 是两个集合, 又设 $f: X \to Y$ 是一个一一映射, 则 $\forall y \in Y$, 存在唯一的 $x \in X$, 使得 $f(x)=y$. 这样便定义了从 Y 到 X 的一个映射, 我们称这个映射为 f 的逆映射, 记为 $f^{-1}: Y \to X$.

证明 设 $f: X \to Y$ 是一个一一映射. 对于 $\forall y \in Y$, 因为 $f(X)=Y$, 故 $\exists x \in X$ 使得 $f(x)=y$.

如果对于某个 $y \in Y$, 使得 $f(x)=y$ 成立的 x 不唯一, 即 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1)=f(x_2)=y$. 则这与 f 是单射矛盾. 所以 $\forall y \in Y$, 存在唯一的 $x \in X$, 使得 $f(x)=y$. □

推论 1.2.1 若 $f: X \to Y$ 是一一映射, 则 $f^{-1} \circ f = i_X$ 并且 $f \circ f^{-1} = i_Y$.

证明 $\forall x \in X$, 记 $f(x)=y$, 则由 f^{-1} 的定义, 有 $f^{-1}(y)=x$. 将 $f(x)=y$ 代入 $f^{-1}(y)=x$ 得 $f^{-1} \circ f(x) = x = i_X(x)$. 因此 $f^{-1} \circ f = i_X$.

同理, 若将 $f^{-1}(y)=x$ 代入 $f(x)=y$, 则有 $f \circ f^{-1}(y) = y = i_Y(y)$, 从而也有 $f \circ f^{-1} = i_Y$. □

定理 1.2.5 设 X 和 Y 都是集合, 如果映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是单射, 则 $g \circ f: X \to Z$ 也是单射; 如果映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是满射, 则 $g \circ f: X \to Z$ 也是满射. 因此, 如果映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是一一映射, 则 $g \circ f: X \to Z$ 也是一一映射.

这个定理的证明留给读者.

定义 1.2.8 设 X 和 Y 是两个集合, A 是 X 的一个子集, 如果映射 $f: X \to Y$ 和 $g: A \to Y$ 满足条件 $g \subset f$, 即对于 $\forall x \in A$ 有 $f(x)=g(x)$, 则称 g 是 f 在 A 上的限制, 也称 f 是 g 在 X 的一个扩张, 记作 $g = f|_A$.

为了 4.3 节建立商空间的理论的需要, 下面引入自然映射的概念:

定义 1.2.9 设 R 是集合 X 上的一个等价关系. 称映射

$$p_R: X \to X/R, \quad \text{其中 } x \mapsto [x]_R, \forall x \in X$$

为集合 X 到商集 X/R 的一个自然映射.

由集合上的等价关系所产生的等价类、商集以及自然映射等概念是后面 4.3 节商空间的理论基础.

作为这一节的最后, 我们讲述集合族的笛卡儿集.

定义 1.2.10 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是一族集合, 称集合 $\{x=(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} | x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ 为集合族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的笛卡儿集或者乘积集合. 记为 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$, 即

$$\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha = \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \,|\, x_\alpha \in X_\alpha,\ \alpha \in \Gamma\},$$

其中, 每个 X_α 都称为笛卡儿集 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的因子. $\forall \alpha \in \Gamma$, 定义映射

$$p_\alpha : \prod_{\alpha'\in\Gamma} X_{\alpha'} \to X'_\alpha, \quad 其中\ p_\alpha((x_{\alpha'})_{\alpha'\in\Gamma}) = x_\alpha,$$

并称映射 p_α 为关于 α 的投影映射.

特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$, 通常记 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的笛卡儿集为 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. 特别地, 当 $\Gamma = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时, 通常记 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的笛卡儿集为 $\prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, 其中每个元素记为 $x = (x_k)_{k=1}^{n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

1.3 序与集论公理

前面给出了 "关系" 的概念, 并把映射作为一种特殊的二元关系进行讨论. 下面讨论的 "序" 也是一种特殊的二元关系, 它是通常的大小关系、前后关系等有顺序的关系的抽象与推广.

定义 1.3.1 设 R 是集合 X 上的一个二元关系.

(1) 称 R 在 X 上是具有**反对称性**的, 如果 $\forall x, y \in X$, 当 xRy 并且 yRx 成立时, 必有 $x = y$;

(2) 称 R 是 X 上的一个**偏序**, 如果 R 具有自反性、反对称性和传递性; 当 R 是 X 上的一个偏序时, 称序偶 (X, R) 是一个偏序集.

偏序 R 今后常用 $\leqslant$ 表示 (有时也用 $<$ 表示), $x \leqslant y$ 也记为 $y \geqslant x$. $(x, y) \in\leqslant$ 简记为 $x \not\leqslant y$. 记 $\leqslant$ 的子集 $\leqslant \backslash \Delta(X)$ 为 $<$, 其中 $\Delta(X) = \{(x, x) | x \in X\}$, 即对于 $\forall x, y \in X$,

$$x < y\ 当且仅当\ x \leqslant y\ 且\ x \neq y.$$

这时, 称 x 小于 y 或者 y 大于 x.

例 1.3.1 实数集 $\mathbb{R}$ 上通常的 "小于等于" 关系 "$\leqslant$" 是 $\mathbb{R}$ 上的一个偏序.

例 1.3.2 关系 $\leqslant = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m\ 整除\ n\}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个偏序. 例如, $3 \leqslant 9$, 但 $3 \not\leqslant 7$ 且 $7 \not\leqslant 3$. 这样的两个元 3 与 7 称为是不可比的元.

例 1.3.3 设 X 是一个集合, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, 其中 $\mathscr{P}(X)$ 是 X 的幂集 (即 X 的所有子集所构成的集合), 则

(1) 关系 $\leqslant = \{(A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} |\ A \subset B\}$ 是 X 上的一个偏序, 偏序集 $(\mathscr{A}, \leqslant)$ 今后记为 $(\mathscr{A}, \subset)$;

(2) 关系 $\leqslant = \{(A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} |\ A \supset B\}$ 也是 X 上的偏序, 偏序集 $(\mathscr{A}, \leqslant)$ 并且今后记为 $(\mathscr{A}, \supset)$.

上述例子用偏序的定义容易直接验证, 留给读者. 下面在偏序集给出最大元、最小元与上、下确界的概念.

定义 1.3.2 设 $(X, \leqslant)$ 是一个偏序集, $A \subset X$, $a \in A$.

(1) a 称为是 A 的最大元, 如果 $\forall x \in A$, $x \leqslant a$, 这时记为 $a = \max A$; a 称为是 A 的最小元, 如果 $\forall x \in A$, $x \geqslant a$, 这时记为 $a = \min A$;

(2) a 称为是 A 的极大元, 如果 $x \in A$ 并且 $x \geqslant a$, 则 $x = a$; a 称为 A 的极小元, 如果 $x \in A$ 并且 $x \leqslant a$, 则 $x = a$.

定义 1.3.3 设 $(X, \leqslant)$ 是一个偏序集, $A \subset X$, $a, b \in X$.

(1) 称 a 是 A 的一个下界, 如果 $\forall x \in A$, $x \geqslant a$; 称 b 是 A 的一个上界 $\forall x \in A$, $x \leqslant a$;

(2) 称 a 是 A 的下确界, 如果 a 是 A 的一个下界并且 a 是 A 的一切下界中的最大元, 记为 $a = \inf A$; 称 b 是 A 的上确界, 如果 b 是 A 的一个上界并且 b 是 A 的一切上界中的最小元, 记为 $b = \sup A$.

例 1.3.4 (1) 偏序集 $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subset)$ 有最小元 $\varnothing$ 和最大元 $\mathbb{N}$;

(2) 令 $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})\backslash\{\varnothing\}$, 则每个单元集 $\{m\}$ 是偏序集 $(\mathscr{A}, \subset)$ 的极小元, 但 $(\mathscr{A}, \subset)$ 没有最小元;

(3) 令 $\mathscr{B} = \mathscr{P}(\mathbb{R})\backslash\{\mathbb{R}\}$, $\mathscr{U} = \{B \in \mathscr{B} |\ 2 \in B$ 并且 B 是无限集 $\}$, 则 $\mathscr{U}$ 在 $(\mathscr{B}, \subset)$ 内没有上界且 $\inf \mathscr{U} = \{2\} \notin \mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ 没有极小元, 但有无限多个极大元, 事实上, $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, 有 $\mathbb{R}\backslash\{a\} \in \mathscr{U}$ 并且 $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个极大元.

定义 1.3.4 (1) 关系 $\leqslant$ 称为是集合 X 上的一个全序或者线性序, 如果 $\leqslant$ 是 X 上的一个偏序, 并且对于 $\forall x, y \in X$, 必有 $x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$, 这时, $(X, \leqslant)$ 称为是一个全序集, 或者线性序集, 或者链;

(2) 关系 $\leqslant$ 称为是集合 X 上的一个良序, 如果 $\leqslant$ 是 X 上的一个偏序, 并且 X 的每个非空子集有最小元;

(3) 设 $(X, \leqslant)$ 是一个偏序集并且 $A \subset X$, 则关系 $\leqslant_A = (A \times A) \bigcap \leqslant$ 是 A 上的一个偏序, 称偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 是偏序集 $(X, \leqslant)$ 的一个偏序子集, 简记为 $(A, \leqslant)$.

例 1.3.5 (1) 每个良序集显然是全序集;

(2) $\mathbb{R}$ 上实数的 "小于或等于" 关系是一个全序, 称为是 $\mathbb{R}$ 上的**通常全序**, 但 $\leqslant$ 不是良序, 例如, $\mathbb{R}$ 的开区间 $(0,1)$ 是非空子集, 它没有最小元. 此外, $(\mathbb{N}, \leqslant)$ 是 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 的一个良序子集. 事实上, 如果 A 是 $\mathbb{N}$ 的任意一个非空子集, 任取 $m \in A$, 则有限集 $\{1, 2, \cdots, m\} \bigcap A$ 中必有最小元 m_0, m_0 是 A 中最小元.

下面是集合论中的几个基本公理.

1904 年, Zermelo 证明了一个轰动数学界的定理: "任何集合都可以良序化". 同时也引起了一场争论, 争论的焦点是: 定理的证明正确与否在于是否承认选择公理. 在多数数学家承认选择公理的前提下, 有如下集合论中非常重要并且非常基本的等价命题. 现在, 这些基本结果已成为理论数学的基础性结果.

定理 1.3.1 以下三个命题等价:

(1) **选择公理**. 对于任何一个两两不相交的非空集合所构成的集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, 必存在一个集合 S, 使得 $\forall\alpha\in\Gamma$, $S\bigcap A_\alpha$ 为单元素集.

(2) **Zorn 引理**. 设 X 是一个偏序集, 如果 X 的每一个全序子集都有上界, 则 X 至少有一个极大元.

(3) **Zermelo 良序原理**. 每一个集合都可以良序化.

关于这一定理的证明, 在一般的集合论著作中都能找到, 读者可参见文献 [83].

1.4 序数与超限归纳法

本节从集合的观点引入序数的概念并介绍在序数集合上的超限归纳法. 这主要是为第 9 章和第 10 章的专题研究提供必要的知识准备.

我们可以按如下方法归纳地定义自然数: 规定 $0=\varnothing$(空集), $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$, $3=\{0,1,2\}$, 一般地, $n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$. 于是, 每个自然数都具有下面的两个性质:

(A1) 若 $m\in n$, 则 $m\subset n$;

(A2) $m\in n$ 当且仅当 $m<n$, 从而, $(n,\in)$ 是一个良序集.

定义 1.4.1 每个非负整数都是序数, 非负整数集 $\omega=\{0,1,\cdots,n\}$ 也是一个序数. 序数作为自然数的推广, 可以无限制地定义下去. 例如, 下列集合都是序数:

$$\begin{gathered}
\omega+1=\omega\bigcup\{\omega\},\omega+2=(\omega+1)\bigcup\{\omega+1\},\cdots,\\
2\omega=\omega+\omega=\omega\bigcup\{\omega,\omega+1,\cdots,\omega+n,\cdots\},\\
2\omega+1=(2\omega)\bigcup\{2\omega\},\cdots,3\omega=2\omega+\omega,\cdots,\\
n\omega=(n-1)\omega+\omega,\cdots,\omega^2=\omega\cdot\omega=\bigcup\{\omega,2\omega,\cdots,n\omega,\cdots\},\cdots,\\
\omega^3=\omega^2\cdot\omega=\bigcup\{\omega^2,2\omega^2,\cdots,n\omega^2,\cdots\},\cdots,\\
\omega^{n+1}=\omega^n\cdot\omega=\bigcup\{\omega^n,2\omega^n,\cdots,k\omega^n,\cdots\},\cdots,\\
\omega^\omega=\omega\bigcup\{\omega,\omega^2,\cdots,\omega^k,\cdots\},\cdots.
\end{gathered}$$

下面定义序数的大小.

定义 1.4.2 设 α 和 β 是两个序数, 称 β 是大于 α 的 (或者 α 是小于 β 的), 如果 $\alpha\in\beta$, 并记为 $\beta>\alpha$(或者记为 $\alpha<\beta$).

不难得知, 对任何序数 α, 都有 $\alpha<\alpha+1$; $\omega<2\omega<\cdots<\omega^2<\cdots$. 并且有

定理 1.4.1 设 A 是以序数为元素的任一非空集合, 则 $(A,<)$ 是一个良序集.

序数 $\omega+1$ 有小于它的最大序数 ω, 但 ω 没有小于自身的最大序数, 根据序数的这个特点, 我们把序数分成后继序数与极限序数两种.

定义 1.4.3 序数 β 称为是一个后继序数, 如果存在序数 α, 使得 $\beta=\alpha+1$; 序数 β 称为是一个极限序数, 如果 $\beta\neq0$, 并且 β 不是后继序数.

不难得知, $\omega, 2\omega, \cdots, \omega^2, \omega^3, \cdots, \omega^n, \cdots, \omega^\omega$ 都是极限序数.

下面是本书最后两章中经常用到的超限归纳法.

定理 1.4.2 (超限归纳法) 设 A 是一些序数所构成的集合, α_0 是 A 中最小元, $\mathscr{P}(\alpha)$ 是与序数 α 有关的一个命题. 则 $\forall\beta\in A$, 命题 $\mathscr{P}(\beta)$ 是真命题, 如果下列两条被满足:

(B1) $\mathscr{P}(\alpha_0)$ 是真命题;

(B2) $\forall\beta\in A\backslash\{\alpha_0\}$, 当 $\{\mathscr{P}(\alpha):\alpha<\beta,\alpha\in A\}$ 中每个命题真时, 必有 $\mathscr{P}(\beta)$ 是真命题.

证明 如果存在 $\beta_0\in A$, 使得 $\mathscr{P}(\beta_0)$ 不真, 则 $\{\beta\in A:\mathscr{P}(\beta)$ 不真$\}$非空. 由 A 的良序性, $\{\beta\in A:\mathscr{P}(\beta)$ 不真$\}$中有最小元. 不妨仍记该最小元为 β_0.

由 (B1), $\beta_0\neq\alpha_0$, 则 $\alpha_0<\beta_0$. 因此, $\beta_0\in A\backslash\{\alpha_0\}$ 并且 $\{\mathscr{P}(\alpha):\alpha<\beta_0,\alpha\in A\}$ 中每个 $\mathscr{P}(\alpha)$ 真. 根据 (B2), $\mathscr{P}(\beta_0)$ 真. 这与 $\mathscr{P}(\beta_0)$ 不真矛盾. □

练 习 1

1. 设 $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset Y$. 证明: $f(A\bigcap f^{-1}(B))=f(A)\bigcap B$, 并且 $f(A\backslash f^{-1}(B))=f(A)\backslash B$.

2. 设 $f:X\to Y$, 试证明:

(1) 若 $A, B\subset X$, 则 $f(A)\backslash f(B)\subset f(A\backslash B)$, 并举例说明上式不必相等;

(2) 若 $C, D\subset Y$, 则 $f^{-1}(C\backslash D)=f^{-1}(C)\backslash f^{-1}(D)$, 并且特别地, $f^{-1}(D^c)=[f^{-1}(D)]^c$.

3. 设 $f:X\to Y$, 试证明:

(1) 若 $A\subset X$, 则 $A\subset f^{-1}\circ f(A)$; 若 f 是单射, 则 $A=f^{-1}\circ f(A)$;

(2) 若 $B\subset Y$, 则 $f\circ f^{-1}(B)=B\bigcap f(X)$; 若 f 是满射, 则 $f\circ f^{-1}(B)=B$.

4. 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$, 并且 id_X 表示 X 到 X 的恒等映射. 试证明:

(1) 若 $g\circ f=id_X$, 则 g 是满射并且 f 是单射;

(2) $g\circ f=id_X$, $f\circ g=id_Y$ 当且仅当 f 是一个既单又满的映射 (一一对应), 并且 $f^{-1}=g$.

5. 设 $f:X\to Y$, 则 $f^{-1}\circ f$ 是 X 上的一个等价关系; 若 f 是一个满射, 则 $Y\times Y$ 的对角线 $\Delta(Y)=f\circ f^{-1}$.

6. 设 U 是集合 X 上的一个关系, 则

(1) U 在 X 上是自反的当且仅当 $\Delta=\{(x,x)|\,x\in X\}\subset U$;

(2) U 是对称的当且仅当 $U^{-1}=U$;

(3) U 是传递的当且仅当 $U\circ U\subset U$.