捷进书系

主编：洪鸣远

中华题王
ZHONGHUA TIWANG

精选好题+方法内化+灵活运用=成功

走进课堂，讲练互动

高中数学·必修4
配江苏版

新蕾出版社

捷进书系

中华题王

高中数学·必修4

配江苏版

本册主编：吉沙娟

新蕾出版社

图书在版编目(CIP)数据

中华题王:江苏版．数学．4:必修/张伟主编．—天津:新蕾出版社,2007

ISBN 978-7-5307-4067-5

Ⅰ.中...　Ⅱ.张...　Ⅲ.数学课—高中—习题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098835 号

中华题王·高中数学必修4(配江苏版)

出版发行　新蕾出版社

E-mail:newbuds@public.tpt.tj.cn

http://www.newbuds.com

地　　址　天津市和平区西康路 35 号(300051)

出 版 人　纪秀荣

电　　话　总编办:(022)23332422

　　　　　发行部:(022)27221133,27221150

传　　真　(022)23332422

经　　销　全国新华书店

印　　刷　北京同文印刷有限责任公司印刷

开　　本　880×1230　1/16

字　　数　215 千字

印　　张　8.5

版　　次　2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5307-4067-5

定　　价　16.00 元

★★★ 为课堂添效益 ★★★

★★★★★ Wei Ke Tang Tian Xiao Yi ★★★★★

学生课业负担重，学习压力大，学习效率是决定成绩好坏的关键因素。走出盲动误区，摒弃题海战术，为课堂添效益，向练习要成绩，是您走向成功的最佳选择。

由国家著名教育考试研究专家洪鸣远老师精心策划，由国家级课程改革实验区一线骨干教师倾心打造的《中华题王》高中新课标版脱颖而出。它犹如璀璨的启明星，为在题海中左奔右突的学子指明了前进的方向，拥有了它，就可以傲视天下，引领群雄。

《中华题王》---讲与练双向激活，教与学师生互动

一、丛书特点和功能---同步助学辅导用书

★以例题带动讲解，以思路分析和解后反思串连讲解过程，以对应巩固训练提高思维的效率和正确性。

★左右双栏，讲练对照，左讲右练的互动形式，巩固基础，解决难点问题，提升课堂教学效果。

★走进课堂，师生共用，全程模拟教学过程，有例题有练习，教师选例题，学生做练习。

★互联高中学段知识网络，帮助学生自我构建完整的知识体系.

★配备自我检测方案，定时检测学习效果，帮学生及时查缺补漏.

★依据课改精神，展示考点并选择最近三年的高考样题，使学生在同步学习中零距离体验高考氛围。

二、使用特点提炼---星级指数

★★★☆☆	难度中上，适合全体学生，
★★★★☆	题目新颖，题型全面经典
★★★★★	讲：练=3：7，讲与练的比例适当
★★★★★	配套新课标各版本必、选修教材、人教大纲版高二教材。

三、热卖理由---随讲随练，及时巩固，适用面广，针对性强

★即讲即练，指导解题，及时巩固和提升课堂教学效果。激活学生的思维潜能，深入反思方法和规律。

★荟萃专家智慧，编写理念与新课标一致，体例新颖，师生使用方便。

★课前预习、课堂讲解、随堂练习、课后复习、单元总结，自测水平，触摸高考，全程模拟教学进程。

★重教材，抓基础，重难点，抓方法，激活高品质思维方式。

学科导读图示

课前感知

——明确学习内容和目标，梳理教材知识点、重点和难点，并解答简单问题。

即讲即练

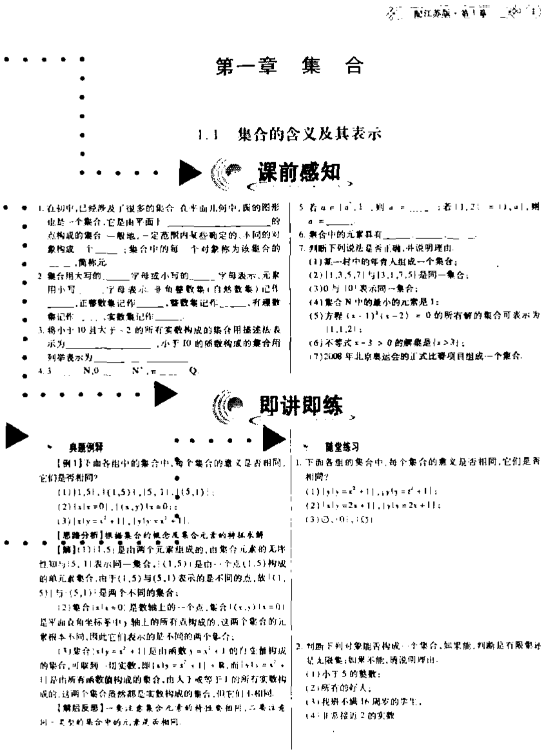
——讲练互动，边学边练，及时巩固课堂效果。

典题例释

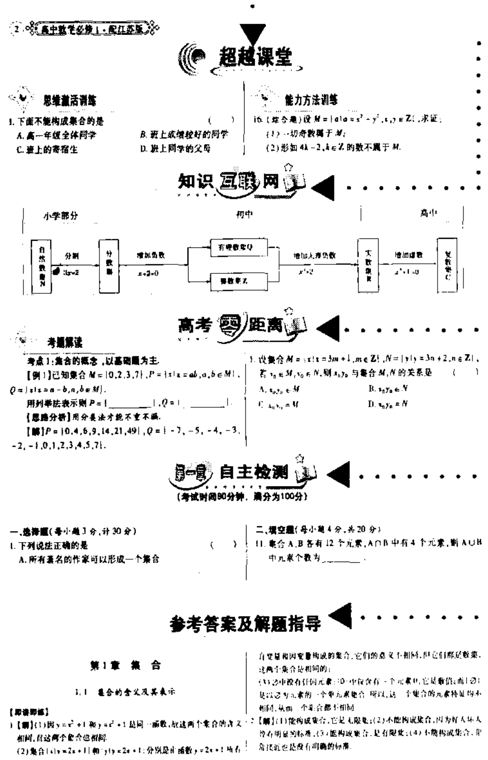
——对应讲解，选择略高于教材难度的例题，以抓基础和深挖掘为手段，以思路分析、解题步骤、解后反思为串连，揭示解题方法和技巧，反思解题思想和规律。达到巩固知识，提升能力的目标。

随堂练习

——右栏练习，选择与左栏知识点、解题方法对应的练习题，巩固基础，解决难点问题。以理清解题思路，掌握方法为目标。左右栏讲练互动，教师可选择适当例题和对应的习题，在课堂之上，边讲边练，及时巩固和检测教学效果。学生也可当堂检测自己对知识的掌握程度。



超越课堂——根据学生的认知差异，设计不同层次的课后练习题。“思维激活训练”重在巩固基础。“能力方法训练”侧重突破重难点。



知识互联网——提炼每章的知识网络结构，链接相关知识并形成体系，展示知识间的内在联系，体验所学知识在整个高中学段的地位和价值。

高考零距离——考点左右对应，互动讲练，左栏“考题解读”列举高考的考点和出题档次，配合三年内的高考真题和各地的模拟题，以思路分析和解后反思串连，剖析解题过程。右栏“体验成功”对应左面的考点设置对应性训练题目，深化对解题方法的理解和掌握，同步演练应考技能。

章末自主检测——自我检测本章的学习效果，卷面结构仿照高考题型、题量设置，帮助学生找到差距，查漏补缺。

参考答案及解题指导——呈现标准答案，指导学生如何解题。“理解题目—找到办法—呈现步骤—解后反思”层层深入，帮助学生提高思维品质。

全向激活你的思维潜能　深入反思解题方法和规律

目录

第1章　三角函数

§1.1　任意角、弧度

1.1.1　任意角

课前感知

1. 角的概念的推广

任意角 $\begin{cases}\text{正角}\\\text{负角}\\\text{零角}\end{cases}$

2. 象限角与轴线角

为便于研究，常以角的顶点为______，角的始边为______，建立平面直角坐标系. 这样，角的终边（除端点以外）在第几象限，就说这个角是______，若角的终边落在坐标轴上，则称这个角为______.

3. 终边相同的角

一般地，与角 α 终边相同的角的集合为______.

即讲即练

典型例释

【例1】在 $0°\sim360°$ 的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并分别指出它们是哪个象限的角：

(1) $-330°$；(2) $1223°18'$；

(3) $-804°53'$；(4) $900°$.

【思路分析】只需将这些角表示成 $k\cdot360°+\alpha$ 的形式，其中 $0°\leqslant\alpha<360°$.

【解】(1)因为 $-330°=-360°+30°$，所以 $-330°$ 的角与 $30°$ 的角终边相同，是第一象限角；

(2)因为 $1223°18'=3\times360°+143°18'$，所以 $1223°18'$ 的角与 $143°18'$ 的角终边相同，是第二象限角；

(3)因为 $-804°53'=-3\times360°+275°07'$，所以 $-804°53'$ 的角与 $275°07'$ 的角终边相同，是第四象限角；

(4)因为 $900°=2\times360+180°$，所以 $900°$ 的角与 $180°$ 的角终边相同，是轴线角.

【解后反思】终边相同的角的表示方法要理解并熟记，要明确：(1) k 是整数，即终边相同的角相差 $360°$ 的整数倍，对常用的数据要有意注意；(2)在求终边相同的角的问题中，关键是找到一个与其终边相同的某一角；(3)区分象限角与轴线角的概念，抓住其终边所在位置的本质区别.

【例2】写出终边在 y 轴上的角的集合（用 $0°$ 到 $360°$ 的角表示）

【思路分析】由于角的终边是射线，因而要分终边落在 y 轴的正半轴上，终边落在 y 轴的负半轴上这两种情形研究.

【解】在 $0°$ 到 $360°$ 的范围内，终边在 y 轴上的角有两个，即 $90°,270°$ 的角；因此，终边在 y 轴上的角的集合是 $S=A\cup B$. 其中

$A=\{\alpha|\alpha=2k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{\alpha|\alpha=k\cdot360+270,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，

随堂练习

1. 若 α 是第四象限角，则角 $180°-\alpha$ 所在象限是（　　）
   A. 第一象限
   B. 第二象限
   C. 第三象限
   D. 第四象限
2. 下列命题中正确的是（　　）
   A. 终边相同的角一定相等
   B. 第一象限的角都是锐角
   C. 锐角都是第一象限的角
   D. 小于 $90°$ 的角都是锐角
3. 已知集合 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于 $90°$ 的角$\}$，下列四个命题：① $A=B=C$；② $A\subseteq C$；③ $C\subseteq A$；④ $A\cap C=B$. 其中正确的命题个数是（　　）
   A. 0个　　B. 1个
   C. 2个　　D. 3个
4. 与 $1125°$ 终边相同的角中绝对值最小的角是______.
5. 终边在直线 $y=-x$ 上的所有角的集合是（　　）
   A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+135°,k\in\mathbf{Z}\}$
   B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-45°,k\in\mathbf{Z}\}$
   C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+225°,k\in\mathbf{Z}\}$
   D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°-45°,k\in\mathbf{Z}\}$
6. 在直角坐标系中，若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则 α 与 β 的关系为（　　）
   A. $\alpha=-\beta$
   B. $\alpha=\beta-k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

因此 $S=\{\alpha|\alpha=180°\cdot n+90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

【解后反思】充分理解角的概念进行分类讨论，利用整数可以分为奇数和偶数，创造出 $180°\cdot n+90°,n\in Z$ 的形式. 利用同样的方法可得终边落在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$，终边在坐标轴上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

【例3】如图，写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.

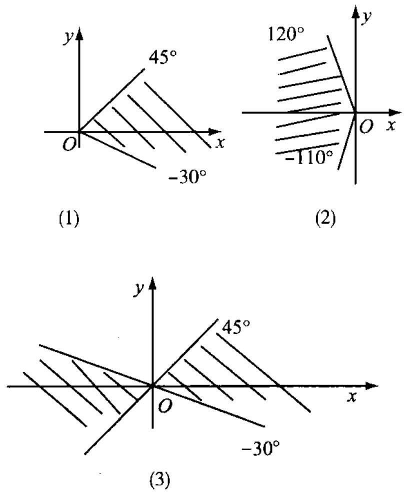


图1-1.1-1

【思路分析】利用终边相同的角的表示方法，有时还需进行角的变换，同时注意不能出现矛盾不等式.

【解】(1)所求角的范围是

$\{\alpha|k\cdot360°-30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2)所求角的范围是

$\{a|k\cdot360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+250°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(3)所求角的范围是

$\{\alpha|k\cdot180°-30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$.

【解后反思】(1)始终抓住变化中的不变：角的始边是 x 轴的正半轴；(2)确保始边角小于终边角；(3)当两个区域的边界互为反向延长线时，将其中一个区域绕原点旋转 $180°$ 的整数倍得到另一个区域，因而两区域可一并表示.

【例4】已知角 α 为第一象限角，求 $2\alpha,\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在何处?

【思路分析】首先要知道题中角的范围，然后再把其转化为 $0°\sim360°$ 的角的终边所在象限.

【解】因为角 α 为第一象限角，所以 $k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

(1)因为 $2k\cdot360°<2\alpha<2k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

所以 2α 是第一或第二象限角或是终边在 y 轴非负半轴上的角；

(2)因为 $k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}$,

若 k 为偶数，设 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$，则

$n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+45°,n\in Z$，所以此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；

若 k 为奇数，设 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$，则

$n\cdot360°+180°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+225°,n\in\mathbf{Z}$，所以此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

综上所述，$\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

C. $\alpha=\beta+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

D. $\alpha=-\beta+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

7. 设集合 $A=\{\alpha|\alpha=(4n-1)\cdot180°+18°,n\in Z\}$，集合 $B=\{\beta|\beta=(2n+1)\cdot180°+18°,n\in\mathbf{Z}\}$，则 ( )

A. $A=B$　B. $A\subseteq B$　C. $A\supseteq B$　D. $A\cap B=\varnothing$

8. 若角 α 与角 β 的终边关于原点对称，则角 α 与角 β 的关系是 = ________.

9. 如图1-1.1-2，写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.

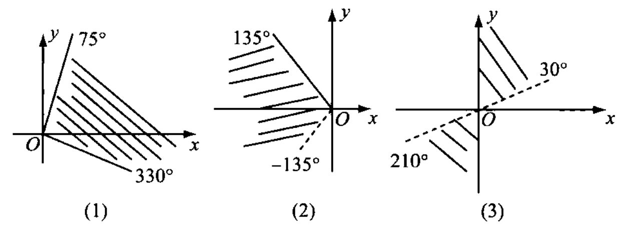


图1-1.1-2

10. 已知角 α 为第二象限角，则 2α 是 ( )

A. 第三象限角

B. 第四象限角

C. 第三或第四象限角

D. 第三或第四象限或 y 轴上负半轴上的角

11. 已知角 α 为第二象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ( )

A. 第二或三象限角　B. 第二或四象限角

C. 第一或三象限角　D. 第三或四象限角

12. 已知角 2α 的终边在 x 轴的上方，那么 α 是 ( )

A. 第一象限角　B. 第二或三象限角

C. 第一或三象限角　D. 第一或四象限角

13. 若角 α 小于 $360°$ 而大于 $0°$，它的7倍角的终边又与自身终边重合，求角 α.

【解后反思】(1)根据α的范围求其他角的范围时，不能以偏概全，如用$0°<\alpha<90°$代替第一象限的角；(2)考虑问题要全面，终边落在坐标轴上的角不属于任何象限；(3)角2α，$\frac{\alpha}{2}$终边所在位置与k的取值有关，因此要对k的取值情况进行讨论.

14. 若角α是第三象限角，那么$-\alpha$，2α，$\frac{\alpha}{2}$的终边落在何处？

超越课堂

思维激活训练

1. $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$小于$90°$的角$\}$，则$A\cap B$等于（　　）

A. {锐角}　　B. {小于90°的角}

C. {第一象限角}　　D. 以上都不对

2. 以下四个命题中，正确的个数是（　　）

①小明将慢15分钟的手表拨到准时，分针转的角是90°；

②若角α的终边在第一象限，则角α是正角；

③若角α的终边在第四象限，则角α是负角；

④角的概念推广后，角的取值范围是$[-360°,360°]$.

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

3. 下列命题中，正确的是（　　）

A. 终边和始边都相同的两个角一定相等

B. $-135°$是第二象限角

C. 若$450°<\alpha\leqslant540°$，则$\frac{\alpha}{4}$是第一象限角

D. 相等的两个角终边一定相同

4. 在$-720°$到$720°$之间与$-1050°$终边相同的角的集合是（　　）

A. $\{-690°,-330°,-30°,30°\}$

B. $\{-690°,-330°,-30°,390°\}$

C. $\{-330°,-30°,30°,390°\}$

D. $\{-690°,-330°,30°,390°\}$

5. 若角α与角β的终边关于y轴对称，则有（　　）

A. $\alpha+\beta=90°$

B. $\alpha+\beta=90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

C. $\alpha+\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

D. $\alpha+\beta=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$

6. 角α在区间$(-180°,-90°)$内，则角α的终边所在象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

7. 已知角α与角β的终边相同，则$\beta-\alpha$的终边在（　　）

A. x轴的正半轴上　　B. y轴的正半轴上

C. x轴的负半轴上　　D. y轴的负半轴上

8. (易错题)集合$M=\{x|x=k\cdot90°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，集合$N=\{x|x=k\cdot45°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，则有（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$

C. $M\supseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

9. 如图1-1.1-3，终边落在阴影部分的角的集合是（　　）

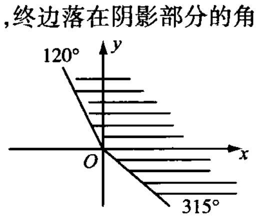


图1-1.1-3

A. $\{\alpha|-45°\leqslant\alpha\leqslant120°\}$

B. $\{\alpha|120°\leqslant\alpha\leqslant315°\}$

C. $\{\alpha|k\cdot360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\cdot360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+315°,k\in\mathbf{Z}\}$

10. 若角α为第一象限角，则$-\frac{\alpha}{2}$是（　　）

A. 第一象限角　　B. 第四象限角

C. 第二或第三象限角　　D. 第二或第四象限角

11. 时针走过2小时40分，则分针转过的角度是______.

12. 角α的终边经过点$(1,-\sqrt{3})$，且角$\alpha\in(-1440°,-1080°)$，则$\alpha=$______.

13. (1)终边落在第一、三象限的角平分线上的角的集合为______；

(2)终边落在第二、四象限的角平分线上的角的集合为______；

(3)终边落在函数$y=|x|$的图象上的角的集合为______.

14. 在直角坐标系中，角α与角β的终边互相垂直，则角α与角β之间的关系是______.

15. 已知$18°<\alpha<\beta<60°$，求$\alpha-\beta$的范围，并判断其终边所在象限.

16. 试求与$-560°$的角的终边相同的最大负角和绝对值最小的角.

能力方法训练

17. 对于四个集合：

$P=\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

$Q=\{x|x$是第一或第二象限的角$\}$；

$R=\{x|x=k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$；

$S=\{\alpha|k\cdot360°+45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$. 则（　　）

A. $R\subseteq Q\subseteq S\subseteq P$　　B. $P\subseteq Q\subseteq S\subseteq R$

C. $R\subseteq P\subseteq Q\subseteq S$　　D. $R\subseteq S\subseteq Q\subseteq P$

18. 集合 $A=\{\alpha|k\cdot360°+60°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+300°,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{\beta|k\cdot360°-120°\leqslant\beta\leqslant k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

19. (探究题)若角 α 是第一象限角,求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限,并将 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围在坐标系中表示出来,以此探究 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限的判断方法.

20. 如图 1-1.1-4 所示,半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点,点 P 从 $A(1,0)$ 出发,依逆时针方向等速沿单位圆周旋转,已知点 P 在 1 秒钟内转过的角度为 $\theta(0°<\theta<180°)$,经过 2 秒钟到达第三象限,经过 14 秒钟后又恰好回到出发点 A,求 θ.

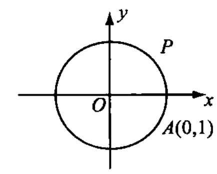


图 1-1.1-4

1.1.2 弧度制

课前感知

初中已学过角的度量,采用的是角度制,除此之外,在科学研究中还常采用弧度制:

1. 弧度制

(1)弧度制的单位符号是 rad,读作弧度,1rad 是指_____;

(2)用弧度表示角的大小时,可以省略单位;

(3)正角的弧度数是正数,负角的弧度数是负数,零角的弧度数是零.

2. 角度制与弧度数之间的换算

360° = ______rad;1° = ______rad;1rad = ______°.

3. 弧长公式与扇形面积公式

(1)由 $|\alpha|=\frac{l}{r}$,可以得到 $l=|\alpha|r$

即弧长等于弧所对的圆心角(的弧度数)的绝对值与半径的积;

(2)扇形面积公式:$S=\frac{1}{2}rl$

其中 l 是扇形的弧长,r 是扇形所在圆的半径.

4. 角度制和弧度制都是______的方法,______表示角时运算更简便,有一定的优越性.

即讲即练

典型例释

【例 1】下列命题中,假命题的是 ( )

A. "度"与"弧度"是度量角的两种不同的度量单位

B. 一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$,一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义,180°一定等于 π 弧度

D. 不论是用角度制还是弧度制度量角,它们与圆的半径大小有关

【思路分析】由定义知,无论是角度制还是弧度制,角的大小与圆的半径大小无关,而是跟弧长与半径比值有关.

【解】D

【解后反思】本例考查了基本概念,对于概念类题目,要从定义入手,仔细分析每一句话,并注意与概念叙述的异同点.

【例 2】已知角 α 的终边在如图 1-1.1-5 所示的阴影区域内.

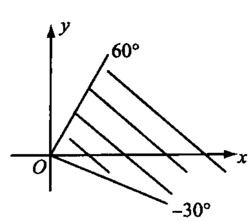


图 1-1.1-5

随堂练习

1. 下列命题中,真命题的是 ( )

A. 一弧度是一度的圆心角所对的弧

B. 一弧度是长度为半径的弧

C. 一弧度是一度的弧与一度的角之和

D. 一弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角,它是角的一种度量单位

2. 在半径不相等的两个圆内,1 弧度的圆心角 ( )

A. 所对的弧长相等

B. 所对的半径相等

C. 所对的扇形周长相等

D. 所对的弧长等于各自的半径

3. 长度等于半径的 2 倍的圆弧所对的圆心角为______.

4. 若 $\alpha=-2$,则 α 的终边在 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 下列两个角终边相同的是 ( )

A. $k\pi+\frac{\pi}{4}$ 与 $2k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$

（1）用弧度制表示角 α 的集合；

（2）试判断 $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}$ 是第几象限角.

【思路分析】前面已经研究过此类题型，现在只要用弧度数表示即可.

【解】（1）因为在 $[-\pi,\pi]$ 内 α 的范围是 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，所以角 α 的集合是

$\left\{\alpha|2k\pi-\frac{\pi}{6}<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$；

（2）当 $2k\pi-\frac{\pi}{6}<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{3}$，

得 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

所以当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}$ 是第一象限角；

当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}$ 是第三象限角.

【解后反思】对于大小确定的角，只要在 $0\sim2\pi$ 内找出与其终边相同的角，便能确定其象限.对于大小不确定的角，求出角的范围是判定其所在象限的关键，但要注意终边可能在坐标轴上的情形.

【例3】若钟表的时针与分针在3点与4点钟之间重合，求重合时间是3点几分？

【思路分析】因为时针与分针在3点时夹角为 $\frac{\pi}{2}$，故从3点起分针与时针第一次重合时，它们旋转的角度相差 $\frac{\pi}{2}$.

【解】设从3点起经过 t 小时，时针与分针第一次重合，则 $-2\pi t-\left(-\frac{\pi}{6}t\right)=-\frac{\pi}{2}$，得 $t=\frac{3}{11}$，所以重合时间为3点 $16\frac{4}{11}$ 分.

【解后反思】处理钟表的时针、分针旋转的角度需注意两点：（1）时针与分针所转的角均为负角；（2）时针1小时旋转 $-\frac{\pi}{6}$，分针1小时旋转 -2π.

【例4】已知扇形 AOB 的周长是6 cm，当扇形的面积最大时，求扇形的圆心角 α 的大小.

【思路分析】建立面积 S 关于某个变量的目标函数，转化为函数的最值问题.

【解】设扇形的半径为r，弧长为 l，面积为 S，则由已知可知 $l+2r=6$，即 $l=6-2r$.

所以 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(6-2r)=-\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

由 $\begin{cases}r>0,\\l>0,\end{cases}$ 得 $0<r<3$，

即当 $r=\frac{3}{2}$ 时，$S_{\max}=\frac{9}{4}$.

此时 $l=3,\alpha=\frac{l}{r}=2(\mathrm{rad})$.

故当扇形的面积最大时，扇形的圆心角 α 为2 rad.

【解后反思】通过建立目标函数将最值问题转化函数的最值问题来解决，是解决最值问题的常用方法.

B. $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

C. $k\pi+\frac{\pi}{3}$ 与 $k\pi-\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$

D. $(2k+1)\pi$ 与 $3k\pi,k\in\mathbf{Z}$

6. 若 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则 $\pi-\alpha$ 与 α 的终边 （　　）

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 以上都不对

7. 下列表示中不正确的是 （　　）

A. 终边在 x 轴上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

B. 终边在 y 轴上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

C. 终边在坐标轴上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

D. 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

8. 设集合 $M=\{x|x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则 （　　）

A. $N\subsetneqq M$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

9. 走时准确的钟表上，分针的角速度等于 （　　）

A. $\frac{\pi}{30}$ 弧度/分　　B. $-\frac{\pi}{30}$ 弧度/分

C. $\frac{\pi}{60}$ 弧度/分　　D. $-\frac{\pi}{60}$ 弧度/分

10. 一只正常的时钟，自零点开始分针与时针再一次重合，分针所转过的角的弧度数是多少？

11. 若2弧度的圆心角所对弧长为4 cm，则这个圆心角所夹的扇形的面积是 （　　）

A. $\pi\ \mathrm{cm}^2$　　B. $4\pi\ \mathrm{cm}^2$

C. $2\ \mathrm{cm}^2$　　D. $4\ \mathrm{cm}^2$

12. 圆的一条弧长等于这个圆的内接正三角形的一条边长，那么这段弧所对的圆心角的弧度数为 （　　）

A. $\frac{2\pi}{3}$ rad　　B. 1 rad　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rad　　D. $\sqrt{3}$ rad

13. 下列命题中正确的是 （　　）

A. 若两个扇形的面积之比是1:4，则两个扇形弧长之比为1:2

B. 若扇形的弧长一定，则面积存在最大值

C. 若扇形的面积一定，则弧长存在最小值

D. 任意角的集合可以与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一种一一对应关系

超越课堂

思维激活训练

1. 下列各式中正确的是　　(　　)

A. $\pi=180$　　B. $\pi=3.14$

C. $90°=\frac{\pi}{2}$　　D. $1=\pi$

2. 将$\frac{16\pi}{3}$化成$\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式是　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}+5\pi$　　B. $\frac{4\pi}{3}+4\pi$

C. $-\frac{2\pi}{3}+6\pi$　　D. $\frac{7\pi}{3}+3\pi$

3. 设$k\in\mathbf{Z}$,下列终边相同的角是　　(　　)

A. $(2k+1)\cdot\pi$与$(4k\pm1)\cdot\pi$

B. $\frac{k\pi}{2}$与$k\pi+\frac{\pi}{2}$

C. $k\pi+\frac{\pi}{6}$与$2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

D. $k\pi+\frac{\pi}{3}$与$\frac{k\pi}{3}$

4. 集合$P=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$，则$P\cap Q=$　　(　　)

A. $\varnothing$

B. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$或$0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

C. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$

D. $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant4\}$

5. 一钟表的分针长10 cm,经过35分钟,分针的端点所转过的长为:　　(　　)

A. 70 cm　　B. $\frac{35}{3}$ cm

C. $(\frac{25\pi}{3}-4\sqrt{3})$ cm　　D. $\frac{35\pi}{3}$ cm

6. 两个圆心角相同的扇形的面积之比为1:2,则这两个扇形周长之比为　　(　　)

A. 1:2　B. 1:4　C. $1:\sqrt{2}$　D. 1:8

7. 一个扇形的半径为r,面积为$\sqrt{2}r^2$,则这个扇形的中心角的弧度数为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ rad　　B. $\sqrt{2}$ rad

C. $2\sqrt{2}$ rad　　D. 2 rad

8. 已知弧度数为2的圆心角所对的弦长也是2,则这个圆心角所对的弧长是　　(　　)

A. 2　　B. $\frac{2}{\sin1}$

C. $2\sin1$　　D. $\sin2$

9. 在半径为1的单位圆中,一条弦AB的长度为$\sqrt{3}$,则AB所对圆心角α满足　　(　　)

A. $\alpha=\sqrt{3}$　　B. $\alpha<\sqrt{3}$

C. $\alpha=\frac{2\pi}{3}$　　D. $\alpha=120$

10. 如果弓形的弧所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$,弓形的弦长为4 cm,则弓形的面积是:　　(　　)

A. $(\frac{4\pi}{9}-4\sqrt{3})$ cm^2　　B. $(\frac{4\pi}{3}-4\sqrt{3})$ cm^2

C. $(\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3})$ cm^2　　D. $(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3})$ cm^2

11. 若角α是第三象限角,则$\frac{\alpha}{2}$角的终边在第______象限.

12. 一个圆的半径变为原来的$\frac{1}{2}$,而弧长不变,则该弧所对的圆心角变为原来的______倍.

13. (易错题)在直径为10cm的轮上有一长为6cm的弦,P是该弦的中点,轮子以每秒5弧度的角速度旋转,则经过5秒钟后,点P转过的弧长是________.

14. 已知扇形的周长为20cm,它的最大面积是______.

15. 已知一扇形的圆心角是72°,半径等于20cm,求扇形的面积.

16. 半径为12 cm的轮子,每3分钟转1000转,求:

(1)它的平均角速度(1秒钟转过的弧度数);

(2)轮沿上一点1秒钟经过的距离;

(3)轮沿上一点转过1000°所经过的距离.

能力方法训练

17. 已知集合$A=\{\alpha|\alpha=\frac{3k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{\beta|\beta=\frac{5k\pi}{6},-10\leqslant k\leqslant8\}$,求与$A\cap B$中的角终边相同的角的集合$S$.

18. 自行车大链轮有48个齿,小链轮有20个齿,彼此由链条连接,当大链轮转过一周时,小链轮转过的角度是多少度?多少弧度?

19.(综合题)已知一个扇形的周长为$c(c>0)$,当扇形的弧长为何值时,它有最大面积?并求出面积的最大值.

20.(探究题)有两种正多边形,其中一个正多边形的一个内角的度数与另一正多边形的一个内角的弧度数之比为$144:\pi$,求适合条件的正多边形的边数.

§1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

课前感知

1. 在平面直角坐标系中,角α的终边上任意一点$P(x,y)$到原点的距离$OP=$______.

2. 对任意角α,规定:

比值______叫做α的正弦,记作______,即______;

比值______叫做α的余弦,记作______,即______;

比值______叫做α的正切,记作______,即______.

3. 由三角函数定义可知:

正弦函数$\sin\alpha$的定义域为______________;

余弦函数$\cos\alpha$的定义域为______________;

正切函数$\tan\alpha$的定义域为______________.

4. 由三角函数定义可知正弦、余弦、正切函数值在各象限的符号(填入下表)

函数	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	备注
$\sin\alpha$					与y的符号同
$\cos\alpha$					与x的符号同
$\tan\alpha$					取决于x,y同号、异号

5. 有向线段

若有向线段AB在有向直线l上或与有向直线l平行,根据有向线段AB与有向直线l的方向相同或相反,分别把它的长度添上正号或负号,这样所得的数,叫做有向线段的数量,记为AB.

6. 动笔画图:在平面直角坐标系中,以原点为圆心画单位圆,并分别作出正弦线、余弦线、正切线.

即讲即练

典型例释

1. 任意角的三角函数定义

【例1】(1)已知角α终边上一点$P(-\sqrt{3},q)$,且$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{39}}{13}$,求实数$q$及$\tan\alpha$的值;

(2)已知角α的终边过点$P(4a,-3a)(a\neq0)$,求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值.

【思路分析】根据定义,由点的横坐标和纵坐标求出r可得.

【解】(1)根据题意得

$\because x=-\sqrt{3},y=q,$

$\therefore r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+q^2}=\sqrt{3+q^2},$

$\therefore \sin\alpha=\frac{2\sqrt{39}}{13}=\frac{q}{\sqrt{3+q^2}},$

得 $q=6,\therefore \tan\alpha=\frac{q}{-\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}.$

随堂练习

1. 已知角α的终边过点$P(4,-3)$,则下面各式中正确的是 ( )

A. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ B. $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

C. $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$ D. $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$

2. 若点$P(3,y)$在角α的终边上,且满足$y<0,\cos\alpha=\frac{3}{5}$,则$\tan\alpha$的值为 ( )

A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{4}{3}$

3. 已知角α的终边过点$P(-m,\sqrt{3}m)(m<0)$,则$\sin\alpha=$______,$\cos\alpha=$______,$\tan\alpha=$______.

4. 已知角α的终边过点$P(3a-9,a+2)$,且$\cos\alpha\leqslant0,\sin\alpha>0$,

(2)$r=\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}=\sqrt{25a^2}=5|a|$.

当 $a>0$ 时，$r=5a$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$；

当 $a<0$ 时，$r=-5a$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

【解后反思】当角的终边上的点的坐标以参数形式给出时，要根据问题的实际及解题的需要对参数进行分类讨论.

【例2】判定下列各式的符号：

(1)$\sin2004°\cos2004°\tan2005°$；

(2)$\tan191°-\cos191°$；

(3)$\sin2\cos3\tan4$.

【思路分析】角度确定了，所在的象限就确定了，三角函数值的符号也就确定了. 因此只需确定角所在的象限，即可进一步确定各式的符号.

【解】(1)因为 $2003°=1800°+203°=5\times360°+203°$，

$2004°=5\times360°+204°$，$2005°=5\times360°+205°$都是第三象限角，所以 $\sin2003°<0$，$\cos2004°<0$，$\tan2005°>0$，

即 $\sin2004°\cos2004°\tan2005°>0$；

(2)因为 $191°$是第三象限角，所以 $\tan191°>0$，$\cos191°<0$，即 $\tan191°-\cos191°>0$；

(3)因为$\frac{\pi}{2}<2<\pi$，$\frac{\pi}{2}<3<\pi$，$\pi<4<\frac{3}{2}\pi$，所以 2 和 3 是第二象限角，4 是第三象限角，即 $\sin2>0$，$\cos3<0$，$\tan4>0$，

所以 $\sin2\cos3\tan4<0$.

【解后反思】能准确判定角的终边位置是判断该角的三角函数值符号的关键；要熟记三角函数值在各象限的符号规律.

【例3】若 α 是第二象限角，则 $\sin2\alpha$、$\cos2\alpha$、$\cos\frac{\alpha}{2}$、$\tan\frac{\alpha}{2}$中能确定为正值的有 ( )

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

【思路分析】找到 2α，$\frac{\alpha}{2}$的终边所在的范围是解题的关键.

【解】B

【例4】求函数 $y=\sqrt{\sin x}-2\sqrt{\tan x}$的定义域.

【思路分析】根据三角函数的定义.

【解】$\because\sin x\geq0$，$\tan x\geq0$，

$\therefore$ 角 x 的终边只能在第一象限或 x 轴的非负半轴上，

故 $2k\pi\leq x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即所求函数的定义域为$\{x|2k\pi\leq x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

【解后反思】在取交集时可利用数形结合的数学思想.

2. 任意角的三角函数——三角函数线

【例5】在单位圆中画出符合下列条件的角 α 的终边：

(1)$\sin\alpha=\frac{2}{3}$；(2)$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$；(3)$\tan\alpha=2$.

【思路分析】只要在单位圆中找到相应的点，再与原点相连即为 α 的终边.

则实数 a 的取值范围是______.

5. 已知角 α 的终边过点 $P(-5a,12a)(a\neq0)$，求 $\sin\alpha+2\cos\alpha$ 的值.

6. 下列各式不成立的一个是 ( )

A. $\cos260°<0$　　B. $\tan(-1232°)>0$

C. $\sin(-\frac{6}{5}\pi)>0$　　D. $\tan\frac{17}{3}\pi>0$

7. $\sin1\cos2\tan3$ 的值是 ( )

A. 正数　　B. 负数

C. 零　　D. 不存在

8. 若 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$，则角 α 在 ( )

A. 第一象限　　B. 第三象限

C. 第二、三象限　　D. 第二、四象限

9. 设角 x 的终边不在坐标轴上，求函数

$y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$的值域.

10. 若 $\sin\alpha<0$，且 $\tan\alpha>0$，那么 ( )

A. $\sin\frac{\alpha}{2}>0$　　B. $\cos\frac{\alpha}{2}>0$

C. $\tan\frac{\alpha}{2}>0$　　D. $\sin2\alpha>0$

11. 已知 α 是第四象限角，则点 $P(\cos\frac{\alpha}{2},\sin2\alpha)$ 在第______象限.

12. 已知$(\frac{1}{2})^{\sin2\theta}<1$，则 θ 一定是第______象限角.

13. 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\tan x}$的定义域.

14. 已知角 α 的正切线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边在 ( )

A. x 轴上　　B. y 轴上

C. 直线 $y=x$ 上　　D. 直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上

15. 已知角 α 的正弦线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边在 ( )

A. x 轴上　　B. y 轴上

C. 直线 $y=x$ 上　　D. 直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上

16. 若角 α 的正弦线与余弦线的长度相等且符号相同，那么角 α 的值为 ( )

【解】

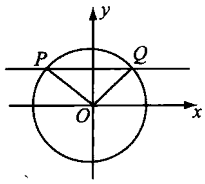


图1-1.2-1

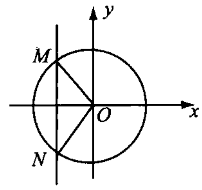


图1-1.2-2

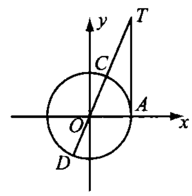


图1-1.2-3

(1)作直线$y=\frac{2}{3}$交单位圆于P、Q两点,则OP与OQ为角α的终边,如图1-1.2-1;

(2)作直线$x=-\frac{3}{5}$交单位圆于M、N两点,则OM与ON为角α的终边,如图1-1.2-2;

(3)在直线$x=1$上截取$AT=2$,其中A的坐标为$(1,0)$,设直线OT交单位圆于C、D两点,则OC与OD为角α的终边,如图1-1.2-3.

【解后反思】三角函数线可以用来求出满足形如$f(\alpha)=m$的三角函数的角α的终边,体现了对三角函数线的深刻理解,同时这也是利用三角函数解决问题的关键.

【例6】已知角α是一个锐角,求证:

(1)$\sin\alpha+\cos\alpha>1$;(2)$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【思路分析】显然"数"的方法较困难,因而考虑借助单位圆中的三角函数线证明.

【解】如图1-1.2-4,设α的终边与单位圆交于点P,作$PM\perp x$轴,垂足为M,过点$A(1,0)$作$AT\perp x$轴,交α的终边于点T,则$\sin\alpha=MP$,$\cos\alpha=OM$,$\tan\alpha=AT$.

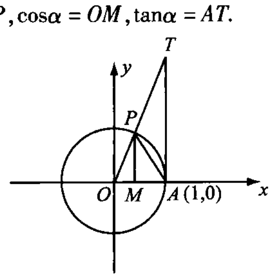


图1-1.2-4

(1)在$\triangle OMP$中,$OM+MP>OP$,

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>1$;

(2)连接PA,则$S_{\triangle OPA}<S_{扇形OPA}<S_{\triangle OTA}$,

即$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot MP<\frac{1}{2}\cdot OA^2\cdot\alpha<\frac{1}{2}\cdot OA^2\cdot AT$

故$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【解后反思】本题采用了数形结合的数学思想,也可利用三角函数的定义解题,即数学知识的根本思想.

【例7】求下列三角函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{2\cos\alpha-1}$;

(2)$y=\lg(3-4\sin^2x)$;

(3)$y=\lg(2\sin2x+\sqrt{3})-\sqrt{9-x^2}$.

【思路分析】根据问题的约束条件,利用三角函数线求解.

【解】(1)如图1-1.2-5,$\because 2\cos x-1\geqslant0$,$\therefore \cos x\geqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore x\in[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$.

(2)如图1-1.2-6,$\because 3-4\sin^2x>0$,$\therefore \sin^2x<\frac{3}{4}$,

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3}{4}\pi$

C. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3}{4}\pi$　　D. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{5}{4}\pi$

17. 已知$\sin\alpha\cos\alpha>0$,且角α的正弦线与余弦线是等长的有向线段,那么角α的终边在 (　　)

A. x轴上　　B. y轴上

C. 直线$y=x$上　　D. 直线$y=-x$上

18. 分别作出$\frac{2}{3}\pi$和$-\frac{3}{4}\pi$的正弦线、余弦线、正切线.

19. 利用三角函数线,求满足下列条件的角α的终边:

(1)$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$;(2)$\cos\alpha=\frac{1}{3}$;(3)$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

20. 若$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$,则下列不等式成立的是 (　　)

A. $\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$　　B. $\cos\theta>\tan\theta>\sin\theta$

C. $\sin\theta>\tan\theta>\cos\theta$　　D. $\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$

21. 设α是第四象限角,则$\sin\alpha$和$\tan\alpha$的大小关系是 (　　)

A. $\sin\alpha>\tan\alpha$　　B. $\sin\alpha<\tan\alpha$

C. $\sin\alpha\geqslant\tan\alpha$　　D. 不能确定

22. 用三角函数线判断1与$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|$的大小关系是 (　　)

A. $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|>1$　　B. $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant1$

C. $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=1$　　D. $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|<1$

23. 已知集合$E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta<2\pi\}$,集合$F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$,则$E\cap F=$ (　　)

A. $(\frac{\pi}{2},\pi)$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$

C. $(\pi,\frac{3\pi}{2})$　　D. $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

24. 利用三角函数线,确定满足条件$|\cos\alpha|>|\sin\alpha|$的角$\alpha$的范围.

即 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore x\in(k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$.

(3)由题意得 $\begin{cases}2\sin 2x+\sqrt{3}>0\\9-x^2\geqslant 0\end{cases}$,即 $\begin{cases}\sin 2x>-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-3\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$.如图1-1.2-7,再利用数轴得定义域为

$[-3,-\frac{\pi}{3})\cup(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{5\pi}{6},3]$.

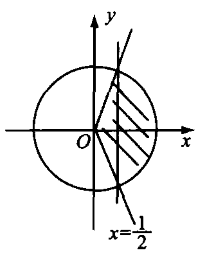


图1-1.2-5

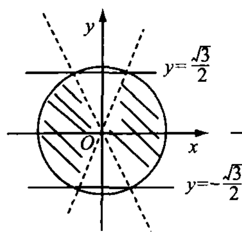


图1-1.2-6

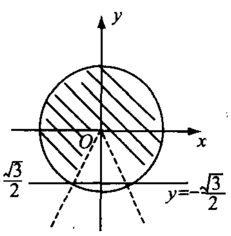


图1-1.2-7

【解后反思】求三角函数的定义域的本质是解三角不等式(组)的解集,常借助于三角函数线解题,对于较复杂的可结合数轴直观简捷地解决,特别要注意边界问题.

25. 求下列三角函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{2\cos\alpha+1}+\lg(2\sin\alpha-1)$;

(2)$y=\lg(\cos x-\frac{1}{2})-\sqrt{36-x^2}$.

26. 已知 α 为锐角,利用单位圆证明 $1<\sin\alpha+\cos\alpha<\frac{\pi}{2}$.

超越课堂

思维激活训练

1. 若角 α 的终边上有一点 $P(-3,0)$,则下列函数值不正确的是 (　　)

A. $\sin\alpha=0$　　B. $\cos\alpha=-1$

C. $\tan\alpha=0$　　D. $\cos\alpha=0$

2. 若角 α 的终边过点 $P(4a,-3a)(a<0)$,则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值是 (　　)

A. $\frac{2}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$

C. 0　　D. 与 a 的取值有关

3. α 为第二象限角,$P(x,\sqrt{5})$ 为其终边上一点,且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$,则 x 值为 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{2}$

4. 若 θ 是第三象限角,且 $\cos\frac{\theta}{2}<0$,则 $\frac{\theta}{2}$ 是 (　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

5. 设 $\sin 123°=a$,则 $\tan 123°=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$　　B. $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

C. $\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$　　D. $\frac{a\sqrt{1-a^2}}{a^2-1}$

6. 若 $\cos\theta>0$,且 $\sin 2\theta<0$,则角 θ 的终边所在象限是 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

7. 若 α 是第一象限角,则 $\sin 2\alpha,\sin\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2},\tan\frac{\alpha}{2},\cos 2\alpha$ 中能确定为正值的有 (　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 2个以上

8. 设 A 是第三象限的角,且 $|\sin\frac{A}{2}|=-\sin\frac{A}{2}$,则 $\frac{A}{2}$ 是 (　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

9. 已知锐角 α 的终边上一点的坐标为 $(2\sin 3,-2\cos 3)$,则 $\alpha=$ (　　)

A. $3-\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}-3$

C. $\pi-3$　　D. 3

10. 设 $\theta\in(0,2\pi)$,点 $P(\sin\theta,\cos 2\theta)$ 在第三象限,则角 θ 的范围是______.

11. 已知角 α 的终边上的点 P 与 $A(a,b)$ 关于 x 轴对称($a\neq 0$ 且 $b\neq 0$),角 β 的终边上的点 Q 与 A 关于直线 $y=x$ 对称,则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=$______.

12. (1)函数 $y=\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 的定义域是______;

(2)函数 $y=\lg(\sin x)+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域是______.

13. 依据三角函数线,作出如下四个判断:

①$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{7\pi}{6}$;②$\cos(-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}$;

③$\tan\frac{\pi}{8}>\tan\frac{3\pi}{8}$;④$\sin\frac{3\pi}{5}>\sin\frac{4\pi}{5}$.

其中判断正确的有 (　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

14. 设 $\sin\theta>0,\cos\theta<0$,则下列结论成立的是 (　　)

A. $\tan\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　　B. $\tan\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

15. 角 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 的正、余弦线的长度相等，且正、余弦符号相异. 那么 α 的值为　(　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{7\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$

16. sin1、cos1、tan1 的大小关系为　(　)

A. sin1 > cos1 > tan1　　B. sin1 > tan1 > cos1

C. tan1 > sin1 > cos1　　D. tan1 > cos1 > sin1

17. 若 $0<\alpha<2\pi$，且 $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha>\frac{1}{2}$. 利用三角函数线，得到 α 的取值范围是　(　)

A. $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$　　B. $(0,\frac{\pi}{3})$

C. $(\frac{5\pi}{3},2\pi)$　　D. $(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{5\pi}{3},2\pi)$

18. 在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围为　(　)

A. $(\frac{\pi}{4},\pi)$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

C. $(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$　　D. $(\frac{\pi}{4},\pi)\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

19. 满足 $\sin(x-\frac{\pi}{4})\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的集合是　(　)

A. $[2k\pi+\frac{5\pi}{12},2k\pi+\frac{13\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

B. $[2k\pi-\frac{\pi}{12},2k\pi+\frac{7\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

C. $[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

D. $[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{6}]\cup[2k\pi+\frac{5\pi}{6},(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$

20. (易错题) 若 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$，利用三角函数线，可得 $\sin\theta$ 的取值范围是______.

能力方法训练

21. 已知角 α 的终边在直线 $y=kx$ 上，且 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha<0$，则 $k=$______.

22. 集合 $\{x|x=\sin\frac{n}{5}x,n\in\mathbf{Z}\}$ 所有子集的个数为______.

23. 设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，比较 $\alpha-\sin\beta$ 与 $\beta-\sin\alpha$ 的大小 (　)

A. $\alpha-\sin\beta>\beta-\sin\alpha$　　B. $\alpha-\sin\beta<\beta-\sin\alpha$

C. $\alpha-\sin\beta=\beta-\sin\alpha$　　D. 以上都不对

24. (探究题) 设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，试探究函数 $\sin x+\cos x$ 的取值范围.

1.2.2　同角三角函数关系

课前感知

1. 同角三角函数基本关系式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 在______的条件下恒成立；

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$在______的条件下恒成立.

2. 关于 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的齐次分式

$\frac{a\sin^n\alpha Z+b\cos^n\alpha}{c\sin^n\alpha Z+d\cos^n\alpha}\xrightarrow[\text{同除以}\cos^n\alpha]{\text{分子,分母}}$______.

3. $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$.

4. 三角恒等式(除特殊证明的情况外)，都是指在使______情况下的恒等式.

5. 三角函数式的化简、求值和三角恒等式的证明，一要注意基本策略：从繁到简，化异为同. 具体就是：异角化同角、异名化同名、异次化同次；二要注意基本技巧的使用，常用技巧有：化切为弦、"1"的代换等.

6. 三角恒等式的证明的常用方法

(1) 一边推，从等式的哪边开始推证常遵循从繁到简的原则；

(2) 两边挤，即证明左、右两边都等于同一个式子；

(3) 作差法，要证 $A=B$，只要证 $A-B=0$.

即讲即练

典型例释

【例1】已知 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$，则 $\tan\theta$ 等于　(　)

A. $\frac{4-2m}{m-3}$　　B. $\pm\frac{m-3}{4-2m}$

C. $-\frac{5}{12}$　　D. $-\frac{5}{12}$或$-\frac{3}{4}$

随堂练习

1. 已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=0$，则 α 所在的象限是　(　)

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第一、三象限

D. 第二、四象限

2. 若 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$　(　)