顶尖系列

高中

湖南教育版

顶尖课课练

数学（选修1－2）

computer code

福建人民出版社

顶尖系列

高中

湖南教育版

顶尖课课练

数学（选修1－2）

computer code

China's outstanding multiplication table>>

福建人民出版社

主　编

张鹏程（福建师范大学数学与计算机科学学院中学数学教学研究室主任）

编写人员（按姓氏笔画排序）

方秦金　叶文榕　叶青柏　汤锦德　李新岳　陆集宁　陈　言　陈　腾
陈中峰　陈天雄　陈蓓璞　卓道章　林　风　林　婷　林元武　林嘉慧
姚承佳　柯跃海　赵祥枝　倪政翔　黄　雄　黎　强

顶尖课课练·数学（选修1—2）（湖南教育版）
DINGJIAN KEKELIAN · SHUXUE

出　　版：福建人民出版社
地　　址：福州市东水路76号　　**邮政编码：**350001
电　　话：0591-87604366（发行部）　87521386（编辑室）
电子邮件：zmnyssx@126.com
网　　址：http://www.fjpph.com
发　　行：福建省新华书店
印　　刷：福州千帆印刷有限公司
地　　址：福州市南平路金诚投资区　　**邮政编码：**350012
开　　本：787毫米×1092毫米　1/16
印　　张：9.5
字　　数：232千字
版　　次：2008年8月第1版　　2008年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-211-05739-9
定　　价：15.30元

本书如有印装质量问题，影响阅读，请直接向承印厂调换

编写说明

“顶尖课课练”（原“高中步步高”）根据课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅关注学生夯实基础知识、基本技能，还关注学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅关注培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还关注培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持“三参与”原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

“顶尖课课练”按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）一般设：“学习目标”、“要点透析”、“方法指津”、“自我评估”、“探究应用”、“拓展视野”、“归纳整合”、“单元质量检测卷”等栏目。

“学习目标”是根据各章（或单元）应达到的目标提出具体要求。“要点透析”是以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或单元）内容的重点、难点。“方法指津”通过对精选的经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。“自我评估”在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法。题目既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、合作性。“探究应用”特别注重吸收密切联系生产、生活实际的有趣题目，加强探究性习题的训练。“拓展视野”对本章（或单元）知识进行拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章（或单元）内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。“归纳整合”以树形图、方框图或表格等形式对本章（或单元）知识进行梳理、归纳、整合，使学生对整章（或单元）知识间的逻辑关系有个清楚的认识。经过系统的训练后，通过“单元质量检测卷”与“模块质量检测卷”对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。“质量检测卷”和“部分参考答案”一般做成活页的形式，以方便使用。

“顶尖课课练”实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

本丛书在编写过程中引用了一些作者的作品，在此，对这些作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编　者

目录 CONTENTS

第4章 典型统计案例

4.1 随机对照试验案例

学习目标

1. 结合具体的问题情境，理解通过试验采集数据时随机对照试验的必要性和重要性.
2. 学会设计随机对照试验，理解提高试验数据精度的对照组方法和“安慰剂”方法.

要点透析

1. 数据收集方法：抽样与实验.

2. 试验设计——随机对照试验：选取试验组与对照组，通过试验分别采集试验组与对照组的数据进行数据分析.

3. 提高样本试验数据代表性的有效方法.

(1) 随机抽取构成试验组的对象.

随机选择试验组能有效地抵消个体差异造成的对试验结果的影响.

(2) 使用“安慰剂”.

有些试验使用“安慰剂”是非常必要的，正确理解“安慰剂”的统计含义.

方法指津

科学技术的迅猛发展，将人类社会带入了数字化时代，各种各样的统计数字和图表充斥着媒体. 由于数字给人的印象直观具体，所以让数据说话成为许多广告的常用手法. 或因唯利是图而不惜冲击社会诚信，或因广告设计者本身知识缺陷，现实媒体中大量充斥着不实广告.

例1 某减肥药的广告称，其减肥的有效率高达75%，在同类药物中减肥效果是最好的. 你能对75%这个数据提出一些质疑吗？

答 可以提出类似以下的质疑，如：数据是否来源于有效的统计试验？该药在多少人身上做过试验？试验组是怎样产生的？是“方便”样本吗？是“有利”样本吗？有无对照组？对照组又是如何产生的？是否是科学的随机对照试验？

例2 某化妆品广告称：“它含有某种成分可以彻底地消除脸部皱纹，只需10天，就能让肌肤得到改善”. 见此广告，你能提什么问题？

答 此广告的特点是数据（10天）明确，但效果（能让肌肤得到改善）模糊. 对此，可以提出以下问题：试验的人数有多少？在什么人的皮肤上做试验？不用此药肌肤是否就不能得到改善？有无对照组？等等.

评注 此类问题具有开放性的特点，是培养学生发现问题和提出问题能力的好素材．让学生针对广告内容提出质疑，质疑的问题可以是对广告物的使用价值方面的，也可以是数据方面的．对于数据问题，可以从学到的统计知识出发，用统计学的方法、观点提出质疑，体现数学“来源生活，又回归生活”的基本理念．

自我评估

1. 从你所在班级的 5 名数学成绩最好的同学中，选取 3 名代表本班参加年级数学学科竞赛活动，下列选举方法最能体现全班同学的真实意愿的是（　　）．

   A. 在全班中对 5 名同学逐个采用同意举手的办法进行表决

   B. 在全班中对 5 名同学逐个采用不同意举手的办法进行表决

   C. 全班同学采用记名投票

   D. 全班同学采用无记名投票

2. 在调查某药物是否能有效预防某一动物传染病时，设计试验方案为：在附近的某养殖场随机抽取 50 只，让其服用此药后，观测其发病情况，再根据发病实际情况作出判断．①若没有发现任何一只被试动物发病，则可判断此药物有防治效果；②若发现仍有若干只被试动物发病，则可判断此药物没有防治效果；③若发现被试动物都染有此种传染病，则可判断此药没有预防效果．以上三个判断中正确的个数为（　　）．

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 在调查某药物是否能有效预防某一动物传染病时，设计试验方案为：在附近的某养殖场随机抽取 50 只构成试验组，余下的全部归为对照组；让试验组对象服用此药后，观测其发病情况，再对比服药动物与未服药动物的发病情况作出预防效果判断．①若没有发现任何一只被试动物发病，而养殖场的未服药动物却有若干只发病，则可判断此药物一定有防治效果；②若养殖场未服药动物与被试动物均有发现发病动物，则可判断此药物没有防治效果；③若被试动物都没有发病，则可判断此药一定有预防效果．以上三个判断中正确的个数是（　　）．

   A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

4. 在进行随机对照试验时，对于试验组与对照组，下列说法正确的是（　　）．

   A. 对照组一定要使用“安慰剂”

   B. 对照组与试验组容量一定要相等

   C. 试验组要求随机抽取，以确保代表性，而对照组则可随意抽取

   D. 确定试验组对象时，可以根据问题的具体情况，灵活选用抽样方法

5. 关于“安慰剂”，下列理解正确的是（　　）．

   A. 凡是关于药物检验的随机对照试验都应使用“安慰剂”

   B. 统计学中的“安慰剂”，指的是一种替代的“针剂”或“食物”

   C. 使用“安慰剂”的目的是提高试验组数据的精度

   D. 使用“安慰剂”的目的是提高对照组数据的精度

6. 随机对照试验是：____________________．

7. 试验组是指____________________．

8. 对照组是指____________________．

9. 某医药广告在推介某种新开发的“肿瘤”药物时，列举了大量通过使用此种药物而

延长生命或提高了生活质量的真实事例. 用统计学的观点，谈谈你对这种广告的看法.

10. 根据你的生活经验，列举几个随机对照试验案例. 思考试验组与对照组对象的确定是否科学？有无必要使用“安慰剂”？所使用的“安慰剂”指的是什么？

4.2 事件的独立性

学习目标

1. 理解独立性试验的含义，了解样本空间的概念.
2. 掌握等可能样本空间的概率计算公式.
3. 掌握相互独立事件同时发生的概率计算公式.

要点透析

1. 基本概念.

(1) 样本点：试验的可能结果称为试验的元素，也称为样本点.

(2) 样本空间：所有样本点构成的集合称为试验的全集，也叫样本空间，一般记为 Ω.

(3) 试验的独立性：两个试验发生的结果相互之间没有影响，则称两个试验是独立的.

(4) 两个样本空间之间的关系：记 Ω_1 为第一个试验的样本空间，Ω_2 为第二个试验的样本空间. 如果两个试验是独立的，则称 Ω_1 和 Ω_2 是独立的；如果两个试验不是独立的，则称 Ω_1 和 Ω_2 不独立.

(5) n 个样本空间之间的关系：记 Ω_i 为第 i 个试验的样本空间 ($i=1, 2, \cdots, n$). 如果 n 个试验是相互独立的，则称 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n 是相互独立的.

2. 相互独立事件同时发生的概率公式.

(1) 设 Ω 为样本空间，$P(A)$表示事件 A 发生的概率，$n(A)$表示集合 A 的元素个数，若 Ω 的元素个数有限，$A\subseteq\Omega$，Ω 中的元素发生具有等可能性，则 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

(2) 当样本空间 Ω_1 和 Ω_2 独立时，若 $A\subseteq\Omega_1$，$B\subseteq\Omega_2$，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

(3) 如果样本空间 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n 是相互独立的，$A_1\subseteq\Omega_1$，$A_2\subseteq\Omega_2$，…，$A_n\subseteq\Omega_n$，则有

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

课时1　两个相互独立事件同时发生的概率

方法指津

例1　投掷一枚骰子，掷得点数为1，2，3，4，5，6的事件分别记为a，b，c，d，e，f，掷得点数为偶数和奇数的事件分别记为g，h，掷得点数为1或2的事件记为i，掷得点数为3，4，5，6的事件记为j. 设$\Omega_1=\{a, b, c, d, e, f\}$，$\Omega_2=\{g, h\}$，$\Omega_3=\{i, j\}$，$\Omega_4=\{i, j, g, h\}$，$\Omega_5=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$，且事件$A\subseteq\Omega$，则以上能使公式$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$成立的$\Omega$有（　　）个.

A. 5　　　　B. 4　　　　C. 3　　　　D. 2

分析　公式$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$成立的充分条件为：$\Omega$的元素个数有限，$A\subseteq\Omega$，$\Omega$中的元素发生具有等可能性.

解　∵掷得点数为1，2，3，4，5，6的概率都为$\dfrac{1}{6}$，掷得点数为偶数和奇数的概率都为0.5，掷得点数为1或2的概率为$\dfrac{1}{3}$，掷得点数为3，4，5，6的概率为$\dfrac{2}{3}$.

∴Ω_1，Ω_2各元素发生的可能性相同，而Ω_3，Ω_4，Ω_5中各元素发生的可能性不相等，根据公式$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$成立的充分条件知应选择答案D.

评注　通过本例学会辨析公式$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$成立的前提条件.

例2　统计以往考试情况，得到甲同学数学单元考或模块考试得优的频率为0.7，乙同学则为0.6，如果本模块终结考试难度要求与以往的平均水平基本相当，两位同学本模块学习的认真程度与以往也基本相当，求本模块终结考试两人中至少有1人得优的概率.

分析　相互独立事件同时发生的概率计算公式和互斥事件有一个发生的概率计算公式；当正面直接求解有困难或比较麻烦时，可以考虑采取“正难则反”的解题策略.

解法一　用A表示甲本模块考试得优，B表示乙本模块考试得优，

则$P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(\overline{A})=0.3$，$P(\overline{B})=0.4$.

$A\cap B$表示两人都得优，$\overline{A}\cap B$表示甲不得优但乙得优，$A\cap\overline{B}$表示乙不得优但甲得优.

∵A，B之间独立，$\overline{A}$与B之间独立，A与$\overline{B}$之间独立

∴$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.42$，$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B)=0.18$，

$P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.28$.

∵两人中至少1人得优的事件包含两人都得优，甲不得优但乙得优，乙不得优但甲得优三个事件，且这三个事件之间两两互斥，

∴两人中至少有1人得优的概率$=0.42+0.18+0.28=0.88$.

解法二　用A表示甲本模块考试得优，B表示乙本模块考试得优，则$P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(\overline{A})=0.3$，$P(\overline{B})=0.4$.

$\overline{A}\cap\overline{B}$表示两人都不得优，$\overline{A}$，$\overline{B}$独立，所以$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.3\times0.4=0.12$.

∵至少1人得优与两人都不得优这两个事件是对立事件，

$\therefore$本模块终结考试两人中至少有 1 人得优的概率$=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.88$.

评注 通过本例复习事件独立性的判断和计算相互独立事件同时发生、互斥事件有一个发生的概率计算方法，并学会选择较简单的解决问题方法.

自我评估

1. 设 Ω 为样本空间，$P(A)$表示事件 A 发生的概率，$n(B)$表示集合 B 的元素个数：①Ω 的元素个数有限；②$A\subseteq\Omega$；③Ω 中的元素发生具有等可能性；④Ω 的元素个数不限. 则公式 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$成立的充分条件为（　　）.

   A. ②③④　　B. ①②　　C. ②④　　D. ①②③

2. 下列关于事件 A，B 的推论正确的是（　　）.

   A. 若 A 与 B 互斥，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

   B. 若 A 与 B 对立，则 A 与 B 独立

   C. 若 A 与 B 独立，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

   D. 若 A 与 B 独立，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

3. 投掷一枚骰子和两枚硬币，则骰子出现 1 点，且硬币出现正面向上的概率是（　　）.

   A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{1}{24}$

4. 设甲物理实验考查通过的概率为 0.9，乙化学实验考查通过的概率为 0.8，则甲物理实验考查获得通过且乙的化学实验考查未获通过的概率是（　　）.

   A. 0.18　　B. 0.8　　C. 0.72　　D. 0.2

5. 当事件 A 与 B 互斥时，$P(A\cap B)=$______；当事件 A 与 B 对立时，$P(A)+P(B)=$______；当事件 A 与 B 独立时，$P(A\cup B)$______$P(A)+P(B)$.

6. 第一养殖场的鸡患某种病的概率为 0.4，第二养殖场的鸭患此病的概率为 0.2，从第一养殖场买到一只鸡，第二养殖场买到一只鸭，则不买到患此病的鸡和鸭的概率是________.

7. 第一养殖场的鸡患某种病的概率为 0.4，第二养殖场的鸭患此病的概率为 0.2，从第一养殖场买 2 只鸡，第二养殖场买 2 只鸭，求买到患此病的鸡或鸭的概率.

8. 在春节团拜活动中举行抽奖活动，中奖率为 0.7. 求：

(1) 抽 1 张，没中奖的概率；

(2) 有放回地逐张抽取，抽 3 次都没中奖的概率；

(3) 有放回地逐张抽取，抽 2 次至少中奖 1 次的概率；

(4) 甲有放回地逐张抽取，抽 3 次都没中奖，乙有放回地逐张抽取，抽 2 次至少中奖 1 次的概率.

探究应用

9. 求小张掷两次硬币都正面向上，而小李掷 3 次硬币都反面向上的概率.

10. 求投掷两枚骰子点数都是 5，抛掷 2 枚硬币正面不全向上的概率.

拓展视野

若 A 与 B 独立，则 $P(A\cup B)$ 与 $P(A)+P(B)$ 的大小关系如何？我们从下面的例子来说明大小关系.

设事件 A 表示小张掷 1 枚骰子掷得点数为奇数，事件 B 表示小李掷 1 枚骰子掷得点数为 1.

因为事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，所以 A，B 同时发生的概率 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{12}$.

而 $P(A\cup B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A\cap B)=\frac{7}{12}$，$P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$，所以有 $P(A\cup B)>P(A)+P(B)$.

相关链接：

http：//www.bfjjw.com/jiaoan/

课时 2　n 个相互独立事件同时发生的概率

方法指津

例 1　以投掷一枚骰子为试验背景，写出几个样本点具有等可能性的样本空间.

分析　在一次试验中出现的可能结果作为元素，由这些元素构成的集合称为样本空间. 同一个试验可以构造出若干个样本空间.

解　掷得点数为 1，2，3，4，5，6 的事件分别记为 a，b，c，d，e，f，掷得点数为偶数和奇数的事件分别记为 g，h，掷得点数为 1 或 2 的事件记为 i，掷得点数为 3，4，5，6 的事件记为 j. 设 $\Omega_1=\{a, b, c, d, e, f\}$，$\Omega_2=\{g, h\}$，$\Omega_3=\{i, j\}$，$\Omega_4=\{i, j, g, h\}$，$\Omega_5=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$，其中，$\Omega_1$，$\Omega_2$ 内的样本点具有等可能性，其

发生的概率分别为$\frac{1}{6}$和$\frac{1}{2}$，Ω_3，Ω_1，Ω_5 的样本点不具有等可能性.

评注 通过本例理解样本空间的概念，领会使公式 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$成立的样本点等可能性前提条件.

例 2 统计以往考试情况，得到同学甲数学单元考或模块考试得优的频率为 0.7，而同学乙为 0.6，同学丙为 0.5，如果本模块终结考试难度要求与以往的平均水平基本相当，三位同学本模块学习的认真程度与以往也基本相当.

（1）指出此问题背景的样本空间，说明样本空间之间是否互相独立；

（2）计算本模块终结考试三人中至少有 1 人得优的概率.

分析 试验独立是对应的样本空间（试验的全集）独立的充分条件. 当正面直接求解有困难或比较麻烦时，可以考虑采取“正难则反”的解题策略.

解法一 （1）由同学甲模块考试获得的成绩等级为元素构成的集合 Ω_1，由同学乙模块考试获得的成绩等级为元素构成的集合 Ω_2，由同学丙模块考试获得的成绩等级为元素构成的集合 Ω_3. 这三个样本空间是此问题所涉及的三个样本空间，由于三人的考试成绩之间不相互影响，因此，三个样本空间之间是相互独立的.

（2）分别用 A 表示同学甲本模块考试得优，用 B 表示同学乙本模块考试得优，用 C 表示同学丙本模块考试得优. 则 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(C)=0.5$，$P(\overline{A})=0.3$，$P(\overline{B})=0.4$，$P(\overline{C})=0.5$.

$A\cap B\cap C$ 表示三人都得优，$\overline{A}\cap B\cap C$ 表示只有甲不得优，$A\cap\overline{B}\cap C$ 表示只有乙不得优，$A\cap B\cap\overline{C}$表示只有丙不得优，$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$表示只有甲 1 人得优，$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$表示只有乙 1 人得优，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ 表示只有丙 1 人得优.

$\because A$，B，C 之间独立，$\overline{A}$，B，C 之间独立，A，$\overline{B}$，C 之间，A，B，$\overline{C}$之间独立，A，$\overline{B}$，$\overline{C}$之间独立，B，$\overline{A}$，$\overline{C}$之间独立，C，$\overline{A}$，$\overline{B}$之间独立.

$\therefore P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=0.21$，$P(\overline{A}\cap B\cap C)=P(\overline{A})P(B)P(C)=0.09$，$P(A\cap\overline{B}\cap C)=P(A)P(\overline{B})P(C)=0.14$，$P(A\cap B\cap\overline{C})=P(A)P(B)P(\overline{C})=0.21$，$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})=0.14$，$P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})=P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})=0.09$，$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)=0.06$.

$\therefore$三人中至少 1 人得优的事件包含三人都得优，只有甲不得优，只有乙不得优，只有丙不得优，只有甲得优，只有乙得优，只有丙得优，且这七个事件之间两两互斥.

$\therefore$三人中至少有 1 人得优的概率$=0.21+0.09+0.14+0.21+0.14+0.09+0.06=0.94$.

解法二 （1）同解法 1.

（2）用 A 表示同学甲本模块考试得优，B 表示同学乙本模块考试得优，C 表示同学丙本模块考试得优，则 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(C)=0.5$，$P(\overline{A})=0.3$，$P(\overline{B})=0.4$，$P(\overline{C})=0.5$.

$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$表示三人都不得优，$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$相互独立，所以

$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.3\times0.4\times0.5=0.06$.

$\because$至少 1 人得优与三人都不得优这两个事件是对立事件，

$\therefore$本模块终结考试三人中至少有 1 人得优的概率$=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=0.94$.

评注　通过本例复习事件独立性的判断和计算相互独立事件同时发生、互斥事件有一个发生的概率计算方法，并学会选择较简单的解决问题方法.

自我评估

1. 某实验获得的各种结果为元素构成的样本空间记为 Ω，那么：①Ω 内的事件一定具有等可能性，②Ω 内的事件之间一定相互独立，③Ω 内的元素一定相互独立，④Ω 内的元素一定具有等可能性. 以上四个判断正确的个数为（　　）.

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2. 由 n 个互相独立的试验得到的 n 个样本空间，n 个事件分别是这 n 个样本空间的子集，那么：①这 n 个事件之间一定互相独立；②这 n 个事件之间一定两两互斥；③这 n 个事件之间一定两两互相对立；④设 A，B 为这 n 个事件中的两个，则 $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1+P(A)P(B)-P(A)-P(B)$. 以上四个判断正确的个数为（　　）.

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设甲物理实验考查通过的概率为 0.9，乙化学实验考查通过的概率为 0.8，丙生物实验考查通过的概率为 0.7，则甲物理实验考查与丙生物实验考查都获得通过且乙化学实验考查未获通过的概率是（　　）.

   A. 0.126　　B. 0.56　　C. 0.504　　D. 0.14

4. A，B，C，D 四人射箭射中 10 环以上的概率分别为 0.95，0.9，0.85，0.8. 四人进行射箭比赛，各射 1 次，则 C，D 均射中 10 环以上，而 A，B 均射中 10 环以下的概率是（　　）.

   A. 0.004275　　B. 0.5814　　C. 0.5　　D. 0.0034

5. 当事件 A，B，C 两两互斥时，$P(A\cap B\cap C)=$______；当事件 A，B，C 两两独立时，$P(A\cap B\cap C)$______$P(A)+P(B)+P(C)$.

6. 第一养殖场的鸡患某种病的概率为 0.4，第二养殖场的鸭患此病的概率为 0.2，第三养殖场的鱼患病的概率为 0.01，从第一养殖场买 2 只鸡，第二养殖场买 2 只鸭，第三养殖场买 2 条鱼，求买到患病的鸡或鸭或鱼的概率.

7. 在春节团拜活动中举行抽奖活动，中奖率为 0.7. 求甲有放回地逐张抽取，抽 3 次都没中奖，乙有放回地逐张抽取，抽 2 次至少中奖 1 次，丙抽 1 次有中奖的概率.

8. 若 A，B，C 三人篮球定点投篮的投中率都为 p，三人进行投篮比赛，约定每人只投两次决定名次.

(1) 求 A 投中 2 次，B 投中 1 次，C 都没投中的概率；

(2) 求 A 投中 2 次，B 与 C 共投中 2 次的概率.

探究应用

9. 甲、乙、丙三人定点投篮的投中率分别为 a，b，c，规定投 6 次有 4 次投中为合格. 求甲、乙都合格但丙不合格的概率.

10. 某年级有 12 个班，本学期在数学选修系列 4 中，将选专题 1、2、3 者分别编成程度相当的 5 个、3 个、4 个教学班，并把班级代号分别定为 SZ411，SZ412，… SZ415，SZ421，SZ422，SZ423，SZ431，SZ432，SZ433，SZ434. 求某同学恰好被编入代号为 SZ411，SZ421，SZ431 的教学班的概率.

4.3 列联表独立性分析案例

学习目标

了解应用独立性检验的必要性，体会统计方法应用的广泛性，认识统计方法在解决现实问题中的决策作用；掌握独立性检验的基本步骤，认识统计方法的特点，体会独立性检验的基本思想.

要点透析

1. 基本概念.

(1) 分类变量与定量变量：

分类变量也称属性变量或定性变量，取值一定是离散的；其取值不一定用实数表示，当用实数表示分类变量时，该实数只有某种属性的符号含义，不再具备实数的一般意义，如大小关系、运算关系.

定量变量的取值一定是实数，具有实数的一般意义和运算性质.

(2) 2×2 列联表：

两个分类变量，且每个分类变量只取两个值，这样的列联表叫 2×2 列联表：

变量 Y / 变量 X	属性 Y_1	属性 Y_2	总计
属性 X_1	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
属性 X_2	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
总计	n_{+1}	n_{+2}	n

表中数据基本关系：具有属性 X_1 的总数 $n_{1+}=n_{11}+n_{12}$，具有属性 X_2 的总数 $n_{2+}=n_{21}+n_{22}$，具有属性 Y_1 的总数 $n_{+1}=n_{11}+n_{21}$具有属性 Y_2 的总数 $n_{+2}=n_{12}+n_{22}$，样本总容量 $n=n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}$.

(3) χ^2 计算公式：

$$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}，其中\ n=n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}.$$

(4) χ^2 临界值表及使用方法：

显著水平 $\alpha=P(\chi^2\geqslant k_\alpha)$	0.5	0.4	0.25	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
临界值 k_α	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

使用举例：设取显著水平为 $\alpha=0.01$，计算 χ^2 → 查临界值 $k_\alpha\approx6.635$ → 当 $\chi^2\in[6.635,+\infty)$ 时，至少有 99%的把握认为两变量有关系：当 $\chi^2\notin[6.635,+\infty)$ 时，则说明反对原假设的证据不够充分.

2. 独立性检验的基本思想.

(1) 基本思想：

利用随机变量 χ^2 来确定在多大程度上可以认为“两个分类变量有关系”的方法称为两个分类变量的独立性检验，是检验两个分类变量是否有关系的一种统计方法.

独立性检验的思想来自于统计中的假设检验思想，是假设检验的一个特例，类似于反证法.

独立性检验其基本思路是：构造随机变量 χ^2（χ^2 的大小表示两变量有关系的可能性大小）；假设两变量没有关系（χ^2 应该很小），但实际求出的 χ^2 又很大，以此说明命题“两个变量没有关系”成立的可能性很小，从而得出命题“两个变量有关系”成立的可能性很大.

(2) 独立性检验方法与反证法的异同比较：

共同点：假设结论不成立，在结论不成立的前提下推出“矛盾”，以此断定结论成立.

不同点：反证法的“矛盾”是因发生了不符合逻辑的事件而产生的；假设检验的“矛盾”是因发生了不符合逻辑的小概率事件而产生的（在结论不成立的假设下，却发生了有利于结论成立的小概率事件）.

3. 独立性检验的基本步骤.

证明变量 X，Y 有关系，可按照下列步骤进行：

(1) 建立 2×2 列联表；

(2) 提出原假设 H_0：改变量 X，Y 没有关系；

(H_0 的反面 H_1：变量 X，Y 有关系，称其为备择假设)

(3) 计算检验指标（检验统计量）：

$$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}，其中 n=n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}.$$

(4) 解释结果：

类型 1　事先约定当 $\chi^2\in[k,+\infty)$ 时，可以断定变量 X，Y 有关系.

若 χ^2 值 $\in[k,+\infty)$，则回答“变量 X，Y 有关系”；若 χ^2 值 $\notin[k,+\infty)$，则回答“否定变量 X，Y 没有关系的证据不充分”.

类型 2　要求回答判断变量 X，Y 有关系的可靠程度.

查 χ^2 值对应的显著水平 α，回答“有 $(1-\alpha)\times100\%$ 的把握认为变量 X，Y 有关系”.

课时 1　2×2 列联表

方法指津

例　为了解汽车买主是否与性别有关，从某汽车销售处提取一些观测数据. 具体方法是：随机选取某一统计起始时间 t_0，记录走进销售处的客户的属性：用 A_1 表示男性，A_2 表示女性，B_1 表示是汽车买主，B_2 表示不是汽车买主，直到客户总数达到 300 人时终止统计. 记录者向我们提供下列统计数据：有 90 位男性客户不是汽车买主，有 30 位女姓客户是汽车买主，且 $\frac{2}{3}$ 的女性客户不是汽车买主.

(1) 请根据记录者提供的信息设计一个 2×2 列联表；

(2) 用直观的比例关系初步判断光顾销售处的客户中是不是汽车买主与性别是否有关；

(3) 制作一个等高条形图；

(4) 用概率估计值验算相互独立事件同时发生的概率关系.

分析　(1) 列联表的结构与数据关系：

是否买主 / 性别	是	否	总　计
男　性	a	b	$p=a+b$
女　性	c	d	$q=c+d$
总　计	$r=a+c$	$s=b+d$	$n=p+q=r+s$

(2) 男性客户中是买主的比例$\frac{a}{p}$，女性客户中是买主的比例$\frac{c}{q}$，两个比例值相差较大时，能得到“是不是汽车买主与性别有关”的直观印象.

(3) 通过等高条形图也可得到“是不是汽车买主与性别有无关系”的直观印象.

(4) “是否买主（X）和性别（Y）无关”等价于“变量 X 与 Y 独立”（否则两变量不独立）.

引入事件：用 A 表示是买主，$\overline{A}$ 表示不是买主，B 表示男性，$\overline{B}$ 表示女性.

如果变量 X，Y 独立，那么事件 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立. 于是有$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$，$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$. 分别计算概率的估计值（频率）再对上面的式子进行验算.

解 (1) 设计表格并填入部分现成数据得：

性别 \ 是否买主	是	否	总　计
男　性		90	
女　性	30		
总　计			300

$\because \frac{2}{3}$的女性客户不是汽车买主，

$\therefore$不是汽车买主的女性为 60 人，女性客户总数为 90 人，不是汽车买主的总人数是 150 人，是汽车买主的人数为 150 人，其中男性为 120 人.

在总共 300 名客户中扣除女性 90 人后，男性为 210 人.

故得下列 2×2 列联表：

性别 \ 是否买主	是	否	总　计
男　性	120	90	210
女　性	30	60	90
总　计	150	150	300

(2) 男性客户中有 57%是汽车买主，女性客户中有 33%是汽车买主. 因此，光顾销售处的客户中是不是汽车买主与性别有一定关系.

(3) 等高条形图如图 4-1 所示.

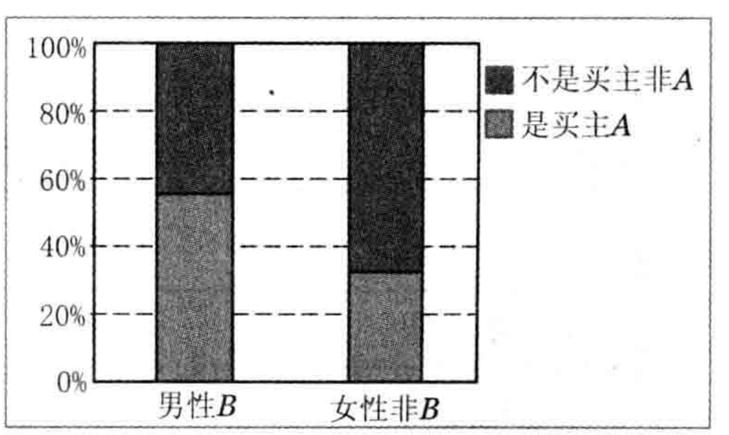

图 4-1

从等高条形图中可得到男性客户中是买主的比例明显高于女性客户中是买主的比例. 因此，光顾销售处的客户中是不是汽车买主与性有一定关系.

(4) 用分类变量 X 表示“是否买主”，分类变量 Y 表示“性别”. “X 与 Y 无关”等价于“变量 X 与 Y 独立”（否则两变量不独立）.