经济类专业
研究生教材

高级经济学数学基础

Mathematical Basis of Advanced Economics

崔殿超 编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

经济类专业
研究生教材

高级经济学数学基础

Mathematical Basis of Advanced Economics

崔殿超 编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高级经济学数学基础/崔殿超编著. —哈尔滨:黑龙江大学出版社,2008.7

(黑龙江大学学术文库)

ISBN 978-7-81129-058-5

Ⅰ.高… Ⅱ.崔…Ⅲ.经济学数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 097046 号

责任编辑 袁建平 国胜铁

封面设计 张 骏

高级经济学数学基础

GAOJI JINGJIXUE SHUXUE JICHU

崔殿超 编著

出版发行 黑龙江大学出版社
地　　址 哈尔滨市南岗区学府路 74 号 邮编 150080
电　　话 0451-86608666
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江新华印刷厂
版　　次 2008 年 7 月 第 1 版
印　　次 2008 年 7 月 第 1 次印刷
开　　本 787×1092 毫米 1/16
印　　张 17.375
字　　数 247 千字
书　　号 ISNB 978-7-81129-058-5/F.5

定　　价 36.00 元

前 言

本书内容是高级宏观经济学数学模型经常使用的基础知识，是学习高级宏观经济学不可或缺的。本书共分六章，在简要介绍本科学过且高级宏观经济学常用的数学知识后，重点补充本科阶段没有涉及的高级宏观经济学数学基础知识。

第一章是微积分。除了概括性地给出了本科阶段所学的导数、微分、积分知识外，还增加了含参变量积分的求导、曲线积分、三角级数与傅立叶(Fourier)级数等内容。含参变量积分的求导是宏观经济模型推导中经常遇到的，曲线积分、三角级数与傅立叶(Fourier)级数等内容则是为学习复变函数作准备。

第二章是线性代数。在矩阵、向量、线性方程组、特征值之外，新增了海赛行列式和加边海赛行列式、矩阵和二次型的求导，前者是判断最优化条件所必备的知识，后者则在动态最优化推导中经常涉及。

第三章是测度论。测度论是高等概率论的基础，没有测度论知识就无法学习概率理论的公理化体系。本来应该在学习实变函数论之后学习测度论，但本书直接对测度论作了一个简要的介绍。虽然只是一章，但基本上概括了测度论的主要内容。

第四章在基础理论和应用两个层次上介绍概率论。既注重原理，也兼顾应用以及两者的衔接，尤其是补充了本科阶段没有涉及的概率论知识，如数学期望的多种积分表示、多种条件期望定义、正态随机向量、概率分布的多种积分表示等。

第五章是随机过程与时间序列分析。这章介绍了经济学常用的几种随机过程，如泊松过程、马尔可夫过程、布朗运动、鞅过程。随机微积分或随机分析是本章的另一重要内容，其中重点介绍了伊藤随机微积分、伊藤随机微分方程。最后介绍了白噪声过程、单位根过程、随机游走、协方差生成函数、谱密度函数等时间序列分析方面的内容。

第六章是复变函数和积分变换。这章以简介的形式概括了复变函数理论，以增加学生的数学修养。经济学对复变函数包括积分变换使用不多，所以，本章作为全书的最后一部分出现。

本书突出了随机数学方面的理论，这部分内容对经济学专业的研究生来说是最欠缺的。即使读过数学专业本科，像测度论以及以此为基础的高等概率论、随机过程、时间序列分析也未必学过，或未必学懂。另一方面，近些年来，经济学中的随机模型越来越多，对随机数学的需求有逐渐上升的趋势。对随机数学内容的编写兼顾了理论与应用两个层次，目前经济学对这两个层次的随机数学都有使用。

本书采用了许多经济数学教材的风格，对每一个概念、定理尽量说明它的含义，以便于学生理解，避免许多专业数学教材只给出数学表达式的做法。

本书主要是为经济学专业的研究生学习经济学基础理论提供的经济数学教材，其中的随机数学部分与金融数学有很大的交叉，可以供该专业的研究生作教材使用或参考，同时也可以作为数理统计及其他理工科专业的参考书。

本书的出版得到了黑龙江大学及经济与工商管理学院、研究生处、黑龙江大学出版社的帮助和支持。经济与工商管理学院院长焦方义教授对本书的写作出版给予了特别的支持和帮助。本书由作者独立完成，在写作的过程中得到了研究生孙亚男、陈维华的大力支持，他们在资料整理过程中付出了很多劳动，在此对他们一并表示感谢。由于时间仓促，文中难免有错误，恳请专家学者批评指正。

崔殿超

2008 年 2 月 21 日

目　录

第一章 微积分

微积分是高等数学的基础，本章的大部分内容都是本科阶段学过的，所以本章有两个特点，第一，我们只纳入有用的内容；第二，内容介绍是简要的，但对本科阶段没有学过的部分要尽可能详细. 本章增加了本科阶段没有学过的“曲线积分”、“傅立叶级数”等内容，为后面学习复变函数和积分变换打基础.

1.1 微分法则

1.1.1 导数的含义

（一）导数的定义

导数：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 $\Delta x \neq 0$ 时，相应地函数 $f(x)$ 取得 Δy，$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果当 $\Delta x \to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $y'|_{x=x_0}$，即

$$y'|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1-1}$$

也可记作 $f'(x_0)$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$，上式中的 $\Delta x = x - x_0$.

导数的定义式也可采取不同的形式，常见的有

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{1-2}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{1-3}$$

（二）导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$

在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，即 $f'(x_0) = \tan\alpha$，其中 α 是切线的倾角.

注意：**函数在某一点的导数与导函数是不同的，前者是一个数，是导函数在某一点的具体值，后者是一个函数.**

1.1.2　导数的基本公式与运算法则

函数的和、差的导数

若 u,v 都是 x 的可导函数，则 $y = u \pm v$ 也是 x 的可导函数，并且

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{1-4}$$

函数积的导数

若 u,v 都是 x 的可导函数，则 $y = uv$ 也是 x 的可导函数，并且

$$y' = (uv)' = uv' + u'v. \tag{1-5}$$

特殊地，当 $u = C$（C 为常数）时，

$$y' = (Cv)' = Cv'. \tag{1-6}$$

公式（1－5）可推广到有限个函数之积的情形，即

$$(u_1u_2\cdots u_n)' = u'_1u_2\cdots u_n + u_1u'_2u_3\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_{n-1}u'_n$$

函数商的导数

若 u,v 都是 x 的可导函数，且 $v \neq 0$，则函数 $y = \dfrac{u}{v}$ 也是 x 的可导函数，并且

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{1-7}$$

常数的导数

设 $y = C$（C 为常数），则 $y' = 0$. （1－8）

幂函数的导数

设 $y = x^n$（n 为正整数），则 $y' = nx^{n-1}$. （1－9）

指数函数的导数

设 $y = a^x$（$a > 0, a \neq 1$），则 $y' = (a^x)' = a^x\ln a$. （1－10）

特殊地，当 $a = e$ 时，有 $(e^x)' = e^x$. （1－11）

对数函数的导数

设 $y = \log_a x$（$a > 0, a \neq 1$），则 $y' = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

（1－12）

特殊地，当 $a=e$ 时，得到自然对数的导数 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. (1-13)

三角函数的导数

$$(\sin x)'=\cos x; \tag{1-14}$$

$$(\cos x)'=-\sin x; \tag{1-15}$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x; \tag{1-16}$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x; \tag{1-17}$$

$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x; \tag{1-18}$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x. \tag{1-19}$$

反函数的导数

若函数 $y=f(x)$ 在某区间 I_x 上连续、单调、可导并且 $f'(x)\neq 0$，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间上也可导，并且有

$$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}. \tag{1-20}$$

复合函数的导数

若函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 可导，且有

$$[f(g(x))]'_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot g'(x_0). \tag{1-21}$$

反三角函数的导数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{1-22}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{1-23}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}; \tag{1-24}$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{1-25}$$

取对数求导法

在某些情况下，利用对数求导法求导数比通常的方法更简便. 这种方法就是先对方程 $y=f(x)$ 的两边取对数，再求出 y 的导数. 以下举例来说明这种方法.

例如：求函数 $y=x^{2x}$ 的导数.

这个函数既不是幂函数也不是指数函数，通常称为**幂指函数**. 求这

个函数的导数，可先对方程两边取对数，得

$$\ln y = 2x\ln x,$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1),$$

于是得到

$$y' = 2y(\ln x + 1) = 2x^{2x}(\ln x + 1).$$

幂指函数的一般形式为

$$y = u^{v}(u > 0) \tag{1-26}$$

其中 u,v 是 x 的函数.

幂指函数（1－26）也可表示为

$$y = e^{v\ln u}, \tag{1-27}$$

这样，可直接求得

$$y' = u^{v}\left(v'\cdot\ln u + \frac{u'v}{u}\right). \tag{1-28}$$

1.1.3 微分公式

微分：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，对于自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可以表示为

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微**，$A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记为 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = A\cdot\Delta x.$$

进一步分析和推导可得

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

可微与可导的关系：函数可微必可导，可导必可微，可微与可导是一致的，或者说，函数可微的充要条件是函数可导.

因为 $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，因此要求出微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$，只要求出 $f'(x)$，再乘以 $\mathrm{d}x$ 即可. 以下是微分基本公式：

1. $dC = 0$（C 为常数）; (1-29)
2. $d(x \pm y) = dx \pm dy$; (1-30)
3. $d(xy) = xdy + ydx$; (1-31)
4. $d(Cx) = Cdx$ （C 为常数）; (1-32)
5. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ $(y \neq 0)$; (1-33)
6. $d(x^a) = ax^{a-1}dx$; (1-34)
7. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e \cdot dx$ $(a > 0, a \neq 1)$; (1-35)
8. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$; (1-36)
9. $d(a^x) = a^x \ln a dx$ $(a > 0, a \neq 1)$; (1-37)
10. $d(e^x) = e^x dx$;
11. $d(\sin x) = \cos x dx$; (1-38)
12. $d(\cos x) = -\sin x dx$; (1-39)
13. $d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sec^2 x dx$; (1-40)
14. $d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\csc^2 x dx$; (1-41)
15. $d(\sec x) = \sec x \cdot \tan x dx$; (1-42)
16. $d(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x dx$; (1-43)
17. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $(-1 < x < 1)$; (1-44)
18. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $(-1 < x < 1)$; (1-45)
19. $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$; (1-46)
20. $d(\mathrm{arc\ cot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$. (1-47)

1.1.4 高阶导数和高阶微分

一般地，若函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍然是 x 的函数，则称 $f'(x)$ 的导数为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'', f''(x) 或 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

类似地，二阶导数 $y'' = f''(x)$ 的导数称作函数 $y = f(x)$ 的三阶导数. 记作

$$y''', f'''(x) 或 \frac{d^3y}{dx^3}.$$

一般地，函数 $y = f(x)$ 的 n 阶导数为 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数，即

$$[y^{(n-1)}]' = y^{(n)} \quad (n = 2,3,4\cdots)$$

记作 $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$.

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

由于函数 $y = f(x)$ 的微分 $dy = f'(x)dx$ 也是 x 的函数，因此当 dy 可微时，可再对它作微分运算，称它的微分

$$d(dy) = d^2y = f''(x)dx^2 \tag{1-48}$$

为 y 的二阶微分；类似地，当 d^2y 可微时，称它的微分

$$d(d^2y) = d^3y = f'''(x)dx^3 \tag{1-49}$$

为 y 的三阶微分.

一般地，当 y 的 $n-1$ 阶微分 $d^{n-1}y$ 可微时，称它的微分

$$d(d^{n-1}y) = d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \tag{1-50}$$

为 y 的 n 阶微分.

由此我们可以得出高阶导数与高阶微分之间的关系，即 y 的 n 阶微分等于它的 n 阶导数乘以自变量的微分的 n 次方.

1.1.5 多元函数和偏导数

(一) 偏导数法则

偏导数：设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)$，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$f_x(x_0,y_0),\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或 } z_x\left.\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

也可记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $z_y\left.\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$f_x(x,y),\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}\text{或 } z_x.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$f_y(x,y),\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}\text{或 } z_y.$$

（二）全导数

全导数：如果函数 $x=u(t)$ 及 $y=v(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(x,y)$ 在对应点 (x,y) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(t),v(t)]$ 在点 t 可导，且其导数可用如下公式计算：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\tag{1-51}$$

导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为全导数.

（三）全微分、偏微分

全微分：对于函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

其中 A,B 仅与 x,y 有关，而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则该函数在点 (x,y) 处的偏导