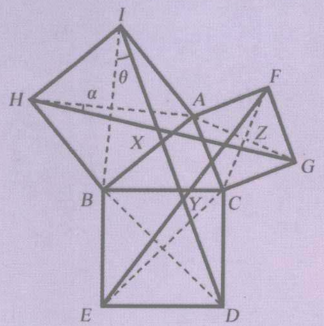

初等数学复习及研究(平面几何)

梁绍鸿 编著

CHUDENG SHUXUE
FUXI JI YANJIU
(PINGMIAN JIHE)

哈爾濱工業大學出版社

CHUDENG SHUXUE FUXI JI YANJIU (PINGMIAN JIHE)

初等数学

复习及研究(平面几何)

梁绍鸿　编著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书原为师范院校开设的《平面几何》课程的试用教材，以平面几何的复习及研究为主要内容。此次为了满足需要而重新排版印刷的。

本书可作为师范院校数学系的教学参考书，也可作为中学数学教师的教学参考书，还可作为数学竞赛培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学复习及研究．平面几何/．梁绍鸿著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.8

ISBN 978－7－5603－2735－8

Ⅰ．初…　Ⅱ．梁…　Ⅲ．①初等数学－教学研究－师范大学－教材　②平面几何－教学研究－师范大学－教材　Ⅳ．G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 098293 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　唐　蕾
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 37　总字数 647 千字
版　　次　2008 年 9 月第 1 版　2008 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－2735－8
印　　数　1～3 000 册
定　　价　58.00 元

序　言

大哉几何之为用

在数学的大花园里，几何是最美丽的部分．它既有优美的图形，令人赏心悦目；又有众多的问题，供人思考探索．它的论证严谨而优雅，命题美丽而精致．入门不难，魅力无限，因此吸引了大批业余的数学爱好者（包括叱咤风云的拿破仑一世），在这里大显身手．一些历史上有名的大数学家，像费马（Fermat）、帕斯卡（Pascal）、牛顿（Newton）、欧拉（Euler）、高斯（Gauss）他们，也禁不住在这里流连驻足，为花园增添奇葩．

伟大的物理学家爱因斯坦（Einstein）在《自述》中曾这样回忆道：

> “在我 12 岁时，我经历了另一种性质完全不同的惊奇：这是在一个学年开始时，当我得到一本关于欧几里得平面几何的小书时所经历的．这本书里有许多断言，比如，三角形的三条高交于一点，它们本身虽然并不是显而易见的，但是可以很可靠地加以证明，以致任何怀疑似乎都不可能．这种明晰性和可靠性给我造成了一种难以形容的印象．……我记得在这本神圣的几何学小书到我手中以前，有位叔叔

曾经把毕达哥拉斯定理告诉了我.经过艰巨的努力以后,我根据三角形的相似性成功地‘证明了’这条定理.……对于第一次经验到它的人来说,在纯粹思维中竟能达到如此可靠而又纯粹的程度,就像希腊人在几何学中第一次告诉我们的那样,是足够令人惊讶的了."

(《爱因斯坦文集(第一卷)》湖南科学技术出版社)

无独有偶,不久前在上海文汇讲堂上,华裔著名数学家菲尔兹奖得主丘成桐教授也再次力挺平面几何.他说:"我本人对数学的兴趣是从平面几何开始的.念平面几何,由公理导出很多有趣的定理,我觉得很有意义.现在的学生不见得愿意去推理,怎么引发他们做这个事情,我想是很重要的事情."(《文汇报》2008年5月30日第4版)

面对平面几何世界这笔丰厚的遗产,难怪H·G·弗德会说出这样的话:"谁看不起欧氏几何,谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡."几何学的特点之一是其历史的悠久.早在古希腊时代,几何学就逐渐形成一门独立的学科.以泰勒斯(Thales)为首的爱奥尼亚学派,其贡献是开始了几何命题的证明,为建立几何的理论形式迈出了第一步.其后的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派,他们研究直线形,将数学从具体的事物中抽象出来.到了古典时期,经欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius)等人的发扬,几何学可谓已蔚为大观.欧几里得的《几何原本》,是用公理方法最早建立起演绎的数学体系的典范,影响十分深远,堪称数学最有代表性的经典之一.平面欧几里得几何学,就算从欧几里得算起,也已经有两千多年的历史.

几何学的特点之二是其内容的丰富.美国数学史家E·T·贝尔(E.T.Bell)说过:"几何学的浩瀚的文献比算术和代数的加在一起还要多,其广泛的程度至少和分析的文献相当,这是比数学的其他部门更有意思的、然而是半遗忘的东西组成的丰富的宝库,但是匆忙的一代人无暇去欣赏它."整个欧氏几何确实像是一座丰富的宝藏,经过两千多年的采掘,大部分菁华已经落入人类的手中.到了一个多世纪前,又涌现出了一大批新的瑰宝,发现了数以百计的优美定理,形成了所谓的近代欧氏几何学.

近代欧氏几何学,又称"综合的 Euclid 几何学",它起源于19世纪后半叶.1873年法国人勒穆瓦纳(Lemoine)在里昂学术奖励会开幕式上宣读了题为《三角形的奇异点及其性质》的论文,为其滥觞.后又经格雷贝(Grebe)、卡塔兰(Catalan)、马蒂厄(Mathieu)、施勒米尔希(Schlomilch)、诺伊贝格(Neuberg)、布罗卡尔(Brocard)、泰勒(Taylor)、凯西(Casey)等诸人的研究,把它推向了极致,当时

曾经繁盛一时，到 20 世纪初才逐渐衰替．其内容包括逆平行线、等角共轭、反演、陪位重心、Brocard 点、Brocard 椭圆、Brocard 圆、第一 Brocard 三角形、三乘比圆、余弦圆、Taylor 圆、Tucker 圆系、Schoute 圆系等．正如 M·克莱因（M. Kline）在《古今数学思想》中所指出的："这些成果，或许重要性不大，然而显示出这门古老学科的新的主题和几乎无穷无尽的丰富多彩．"

然而，数学也与服装一样，讲究时尚．"20 世纪的几何学家早就虔诚地把这些珍品送进了几何博物馆，历史的尘埃很快地把这些珍品的光泽湮没"（贝尔．《数学的发展》，第 323 页）．随着时间的推移，几何在上个世纪的发展遭受挫折，曾一度步入低谷．布尔巴基学派的代表人物之一狄多涅（Dieudonne），在《我们应该讲授新数学吗？》一文中提出过"欧几里得滚蛋"的说法，试图动摇欧氏几何在数学课程中的基础地位，其影响面极广，以致在一些西方国家课程改革中欧氏几何体系不复存在，而被其他的一些结构观念所取代．但他的主张当即就遭到许多人的非议，引起了激烈的争论．法国数学家托姆（Thom，突变理论的创始人，拓扑学家，菲尔兹奖获得者）认为"几何思维可说是人类理性活动的正常发展中不能省略的阶段"，并建议恢复欧氏几何体系的教学．经过近半个世纪来的实践和反思，人们对此有了重新认识．1995 年《美国数学月刊》刊出了《三角形几何学的兴起、衰落和可能的东山再起：微型历史》一文，全面阐述了"一个被历史的尘埃和灰烬所掩埋的科目能够东山再起吗？"这一饶有意趣的议题，并得出了正面的回答．作者最后坚定地指出：三角形几何过去是为欧几里得精神作证明的实践的基地，如今已变成了决定性、证明和发现定理策略的实验基地．由计算机带来的三角形几何的变革，以及其他领域中的这种变革，已经重新证实和加强了人类在"做数学"美妙活动中的根本作用．

梁绍鸿先生的这部《初等数学复习及研究（平面几何）》，就是国内初等几何学方面的一部集大成之著．它初版于 1958 年 11 月，曾作为高等师范院校开设的平面几何课程的通用教材，风行大江南北，培育出了一大批基础扎实的中学数学教师．

学习一门学问，最为有效的方法之一就是直接接触经典．

这里所谓的"经典"，指的是这门学科中众所公认的、内容久经考验的出色的著作．梁先生的这部著作，就堪称这门学科足具代表性的经典之作．

刘培杰数学工作室在这部杰作初版面世 50 年后又推出其新版，无疑是经典几何这门学科在中国得以复兴的重要标志．

数年前，笔者曾怀着景仰的心情，来到北京师范学院内一处僻静的教工宿舍，这里曾是梁绍鸿先生 5 的旧居．老夫人还健在，与我谈起梁先生生前的寂

寞,找不到与他探讨问题者.当时他那幢楼中有个女孩子上初中了,梁先生特别高兴,说以后就会有人来问他几何问题了.

古来圣贤皆寂寞,也许正应验了曲高和寡这句成语吧.在这寂寞中所透出的那份苍凉的美丽,是否能让人联想起那个时代知识分子特有的苦境呢?梁先生的人生道路应该说也是坎坷的.早年自学成才,自刻长篇几何论著《朋力点》,印刷发行后方被人识……20世纪50年代初经傅种孙和华罗庚等前辈的提携,才得以从广西百色调往北京师范大学,最终成为一名大学副教授.1952年辅仁大学与北京师大合并后,数学系共有教师22人,其中教授有傅种孙、张禾瑞、魏庚人等5人,副教授有赵慈庚等3人,讲师有:王世强、钟善基、梁绍鸿等4人,助教有:吴品三、刘绍学、严士健、郝炳新等10人,在如此高手云集之地,一个自学者能跻身其间,足见其功力不凡.

不过在经典几何步入低谷的20世纪后半叶,这部著作仅被作为师范院校的普通教材,虽曾广为流传,还不可算有着"寂寞的命运".如1978年曾以粗糙的纸张多次加印,数量达百万之巨,迄今还不时能在旧书店中见到.但另一方面平面几何教与学也确实越来越不受重视,相关课程逐年减缩,以至梁先生晚年改为到外系讲授高等数学去了.在1979年7月29日*,他因突发高血压而过早地离世,享年62年岁.

不过知音总还是会有的,就在梁先生的有生之年,当时安徽省马鞍山市一位十几岁的青年朋友登门前去拜访,将这部经典中的习题全部演绎推算了一遍,后来还通过一家出版社得以出版面世.这位青年就是后来我国数学奥林匹克的高级教练、目前就任深圳市教委教研室主任的尚强兄.

当今,借助网络,越来越多的人意识到这书的价值所在了,开始细加品读,渐渐兴起了一股网络上的读书热潮.例如,今年初,我结识了一位仅读初二的少年朋友,外号叫frankvista的,虽尚未与之谋面,但通过邮件不时互相沟通研读梁书及其习题的心得.不久前他甚至独立得到这样一条深刻优美而属于射影几何范畴的命题:"与四条固定直线相截所得交比为定值的动直线,必属于一条与这四条定直线同时相切的二次曲线的切线."处于这等年龄,就能有如此独到的创获,可称得上是神奇了,但他背后苦苦啃读梁书,故实亦不可谓非此书之功.倘若梁先生地下有知,必会为这等后生才子作知己而欣慰吧!

而直至20世纪末,还有一些自命不凡的人打着种种旗号,拣起20世纪60年代以失败而告终的所谓"新数学运动"的唾余,试图将平面几何内容"请出"义

---

* 原文写的是1981年,经刘培杰与梁先生之长女梁映森电话核实是1979年7月29日.

务教育,以为本着“大众数学”的思路,就可以不让公民掌握数学中的公理化思想.几何的严谨性和明晰性遭到了强暴的摈弃,一些不伦不类的实验手段和含糊不清的说理模式被堂而皇之地“请入”殿堂,取代了数学中的论证和推理.与此同时,一些重要的几何概念和优美的定理被大量删削,真可谓是“黄钟毁弃,瓦釜雷鸣”.甚至连“直径所对的圆周角是直角”这样的最基本的几何遗产也不能幸免,被某些新编教材剔除在外.以致学生对古希腊人就已掌握的数学常识都不具备,不知道严密论证究竟为何物,连解决一些简单习题的基本功夫都未能学到手.这真是对现行教育制度的一种莫大讽刺.殊不知弃亲忘本、轻视几何、拾人牙慧以为时髦等这一系列陈旧的做法和观念已大大落后于形势的发展.

在20世纪末高新技术发展的推动下,几何学原理得到了空前的应用.无论是在CT扫描、核磁共振等医疗成像技术上,还是在机器人、光盘、传真、无线电话、高清晰度电视等最新电子产品上,都广泛采用了传统的和现代的几何学理论.在人类进入电子信息社会的今天,几何学对于人类社会发展的贡献越来越大.

1998年美国科学年会上,学者们一致认为21世纪的教育应把几何学放在头等重要的地位.硅谷的马克斯韦尔(Maxwell)等人甚至喊出“几何学万岁”的口号.与会科学家和教育学家大都认为,21世纪教育的一个重要原则是,学校传授给下一代的将不只是知识,更重要的是技能.几何学具有较强的直观效果,有助于提高学生认识事物的能力,应当成为自然科学教育大纲中的首选和重点内容.新泽西州普林斯顿大学数学系的约翰·康威(J.H.Conway)说,几何学早先是大学的课程,现在几何学的许多内容放到中学来教授,其实,最简单的几何学内容完全可以放到小学甚至学前班来教授.他认为应当让孩子们从小接触、了解、认识、熟悉几何这种形象数学,进而从小养成认识事物和形象思维的习惯.华盛顿大学数学系的詹姆斯·金说,他们在华盛顿州帕克市一些中学进行的几何学教学实验表明,几何学教学引进电脑后效果更佳,因为用电脑演示复杂的图形变化过程可以带给学生“看得见的动态立体形象”,而传统方法则要求学生进行抽象思维.

因此,我们认为,面对高科技信息时代所带来的机遇,在现行教育中恢复和加强欧氏几何体系的教学,不仅必要,而且完全有这种可能.

在初等数学中,我觉得如下这种做法是值得提倡的,即问题本身不追求复杂,但不要仅停留于问题表面,以为给出解答就完事了,而应该去做一位“好事之徒”,自已提出深入的课题,并善于把握现象,从中寻出一些好的线索.如果浅

尝辄止,就往往不能深刻体会到初等数学的乐趣所在(国内初等数学研究不够严谨与活跃,我看主要就在于探讨问题还有待更加深入而自觉;而国外,例如德国,似很强调"彻底性"——Grüntlichkeit,这乃是追求学问过程中比较可贵的一方面).在平面几何中,这种想法往往较为容易得以满足,在这块长满小花小草的园地中,我们不时可以感受到天地宇宙的至美.

但经典几何学也有其自身的弱处.现在的人们往往多已遗忘其辉煌的昨日,一些曾被人们熟视的概念和结果对今天大部分读者来说却完全是陌生的.为了将问题说清楚,每次都得解释一大堆的东西,譬如"等角共轭"、"类似重心"、"Brocard 点"、"Nagel 点"……总之,它也许只能作为一种业余的爱好,且甘苦相较,兴许苦还稍占上风,它于功利可谓毫无裨益,仅有孤芳自赏的喜悦,对于一般的爱好者而言是否情愿呢?

说到底,还是为了美——唯有这种对美的执着,才会将自己苦苦驻留在那块果实不丰,只是长满野花的杂园,她的美丽芬芳确也足以让人痴迷其中了.

然而,对于我们这批爱好几何者而言,在这块园地中还意外地得到了另外一种慰藉.一些并不相识的陌生人,正由于这种共同的爱好,而走到了一块儿,彼此间渐成为知心好友,让大家不再感觉得十分孤独,这份乐趣,却又是在别处难以找寻到的.

数学是一门博大精深的学问,学习它的最好方法是自己去发现它;如果浅尝辄止,就不能深刻体会数学中的乐趣所在;唯有对美的执著追求,才会把自己带入到"奇伟、瑰怪、非常"的新境界.平面几何,正提供了这样的一块良好的实验基地,可供爱好们去再现,去创造.

当代英国数学家 M·阿蒂亚(M.F.Atiyah)在《数学的统一性》一书中说得好:数学目的,就是用简单而基本的词汇去尽可能多地解释世界.

数学本身就是一种文化,如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话,我们就必须不断地努力地把它们加以简化和统一.抛弃传统,就会断绝未来.继往开来,才能发扬光大.

愿几何世界中的瑶草琼花迎风绽放,来点缀美丽纷芳的数学百花园.

叶中豪
2008 年 6 月于上海

注　文中部分史料及年代由刘培杰补充.

目　录

第一章 引 言

§1 几何论证的本源

在几何学里经常有两件要做的主要工作:一是为了明确概念而确立定义,一是为了揭示真理而推证定理.

通常每遇一新概念,往往要有明确的定义,使人明白所指的是什么.但是若要求一切概念都有所本,即新概念都要用以前已经明确的旧概念来解释,而旧概念又都须有它自己的定义,这是不可能的.因为从复杂的概念回溯到较简单的概念,这种过程当然不能无止境地继续下去,必须最初先有一些我们从具体事物抽象出来的认为最简单而无需解释的概念,然后所有其余的概念才能由这些原始概念引导出来.所以用旧概念解释新概念,虽然是经常的方法,但追溯上去终究有时而穷,我们不可不事先选定一组基本概念,不加定义,作为解释其余一切概念的本源.这组不定义的基本概念,总称为元词.这些元词中,有的是指单纯的事物的,叫做元名或基本元素;有的是表示事物间的关系的,叫做元谊或基本关系.

证明定理,诚然步步都要根据.可是每见一定理,既追求它所依据的前提,又问此前提所以成立的原因,如此往上追寻,那么何时才可终止呢?事实上,希望每题都证,每证都根据已证的命题,犹之乎要想各各定义,一样是办不到的.因此就有必要采用一套基本命题,不加证明即作为一切定理的基础,而不再追究它的理由.这套不证明的基本命题,称为公理.

选定元词和公理之后,几何的论证便有了明确的本源,此外再无需诉诸直觉或默契.这套选定的元词和公理,彼此相辅而行,组成了所谓公理体系.公理体系乃是奠定本门科学的基石,基石既立,根本才称稳固,一部论证严格而且系统严明的几何学便是由此建立起来了.