双博士系列

■ 花费20%的时间，成就80%的分数
■ 经典例题，完全应试技巧
■ 考前应急背诵，成绩快速提高

DAXUE SHUXUE GONGSHI SHOUCE

大学数学公式手册

■ 主编 北京大学数学科学学院 张新国
■ 编写 双博士数学课题组

科学技术文献出版社

大学数学公式手册

主　　编　北京大学数学科学学院　张新国
编　　写　双博士数学课题组
编写人员　胡东华　刘　茜　李菊川　刘　英
陈　丰　刘晓龙　熊国平　高永军
狄　懿　垄　伟　李　亮　刘立新
郭　娟　刘治国　杨　军　乔海玲
刘　津　刘大庆　汪　萍　胡星期
刘治佳　张　望　韩　彬　林娟娟
丁　晓　刘楣林　胡在斌　朱　傲
蔡贵娟　王绣英　李利娟　闵　伟
高　睿　李秀红　刘素枚　李　芹
韩　珍　周丽红　温　晴　包凌燕
钟崇光　韩　福　高　鑫　温桂荣
韩　琴　郭海权　史　进　温　军
王鸿发　郭洪杰　徐桂株　徐英杰
刘峥嵘　白春红　褚　峥　孙文涛
伍　鹏　刘　阳　杜　鹃　白春燕
总 策 划　胡东华

科 学 技 术 文 献 出 版 社
Scientific and Technical Documents Publishing House
・北京・

图书在版编目(CIP)数据

大学数学公式手册/张新国主编.-修订本.-北京:科学技术文献出版社,2008.9

ISBN 978-7-5023-3306-5

Ⅰ.大… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-公式(数学)-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 123776 号

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话 (010)51501739
图书发行部电话 (010)51501720,(010)51501722(传真)
邮 购 部 电 话 (010)51501729
网 址 http://www.stdph.com
策 划 编 辑 科 文
责 任 编 辑 李 蕊 杜 娟
责 任 出 版 王杰馨
发 行 者 科学技术文献出版社发行
全国各地新华书店经销
印 刷 者 富华印刷包装有限公司
版 (印) 次 2008 年 9 月修订版第 1 次印刷
开 本 787×1092 48 开
字 数 200 千
印 张 6
印 数 1～6000 册
定 价 12.00 元

前　言

时光如白驹过隙，转瞬四载春秋已逝。回首大学生活，最令我感到自豪的是我的数学成绩一直名列前茅。在今年的硕士研究生入学考试中，我数学考得很不错，145 分(总分 150 分)。这或许是一种幸运，但我更相信是自己找到了合适的学习方法。很多考生朋友“怂恿”我将经验介绍给大家，加之编辑老师的鼓励，我就以濮人献玉的心态将复习时的一些做法和想法行之成文，与大家共同探讨。

我认为对知识点的掌握要有三个层次，第一个层次是理解与运用，要理解与知识点相关的公式定理的内涵与外延，并且在做题时能灵活运用。第二个层次是融汇贯通，要在第一阶段的基础上熟记与知识点相关的公式定理，做模拟题及真题时结合各部分的知识点，把知识点间建立起横向和纵向的联系。第三个层次是触类旁通，通过背诵，一看到试题即可反映出相应的公式定理。

也许很多人会奇怪，学习英语要背单词，学习政治要背理论，学习数学难道也有要背的吗？

当然，我能考 145 分，很大程度上归功于背公式。背，贯穿于我学习的每个阶段。在第一阶段，我发现很多公式定理都知道，但记得要么不完整，要么不准确，要么应用公式的条件没有掌握。题目做错，在很大程度上是这些原因。每次考完试，总有朋友说我都做了，但得分并不高。所以，我觉得要把公式记完整，记准确，而不只是一个

模糊的轮廓，定理应用的条件也要掌握，不能只记得一个结论。但需要强调的是，我说的背公式是在已经掌握公式和定理的基础上，使其在头脑中的映像更准确、更清晰，而不是单纯的为了背而背。

我有一个小本子，我把我认为重要的公式、定理抄在上面，不时地拿出来看看。我把相应的解题方式等也记在上面，每当我看到自己的笔记时，我就会想起出题的方法，做过些什么样的题目，有些什么样的经典题型。这样，每次公式、定理——解题方法——经典题型在头脑中过一遍，效果非常好。掌握基本的公式和定理，附以相应的习题，演练是提高数学能力的基础。同样，选择一本好的参考书也很重要。

一个很偶然的机会，我认识了双博士图书的总策划胡东华先生，并和他讲了我数学考 145 分的经验，特别是我背公式的经历，他觉得这是一个很有实效的做法，值得向更多的考生推广，于是组织了数位权威考研辅导专家编写了这本集公式、典型例题、解题方法于一身的《大学数学公式手册》。

数学的学习是来不得半点虚伪的，只讲方法不讲努力是空谈，只讲努力不讲方法也是白费力气。只有既讲努力又讲方法才能双赢。

在此，祝各位考生能在考研中能取得好成绩！

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率统计

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

本章知识网络图

- 函数
  - 性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性
  - 分类：复合函数、反函数、分段函数和隐函数
  - 基本初等函数：定义、性质、图形
  - 应用：简单应用问题函数关系的建立
- 极限
  - 定义
    - 数列极限（$\varepsilon-N$ 定义）
    - 函数极限（$\varepsilon-\delta$ 定义）
      - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
      - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
      - 左、右极限
      - 极限存在充要条件
  - 性质
    - 单调性
    - 夹逼定理
  - 无穷小（大）量
    - 定义
    - 阶的分类
      - 高阶无穷小
      - 等价无穷小
      - 同阶无穷小
      - k 阶无穷小
  - 求极限的方法
    - 单调、有界数列
    - 夹逼定理
    - 利用极限运算法则及函数的连续性
    - 两个重要极限
    - 无穷小量乘有界变量
- 连续
  - 函数连续的概念
  - 间断点的类型
  - 初等函数的连续性
  - 闭区间上连续函数的性质
    - 有界性
    - 最值
    - 介值定理

§1.1 函数

一、常用函数的定义域

$y=\dfrac{1}{x}$	$D_f: x\neq 0$, $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}$	$D_f: x\geqslant 0$, $(0,+\infty)$
$y=\log_a x$,	$D_f: x>0$, $(0,+\infty)$
$y=\tan x$,	$D_f: x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$
$y=\cot x$,	$D_f: x\neq k\pi$, $k\in Z$
$y=\arcsin x$（或 $\arccos x$）,	$D_f: \lvert x\rvert\leqslant 1, [-1,1]$

名师点睛

求解复杂函数的定义域，一般是求由简单函数的定义域所构成的不等式的解集.

二、六个常见的有界函数

$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$,	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	$(-\infty,+\infty)$
$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$,	$[-1,1]$
$\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$	$\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$,	$(-\infty,+\infty)$

名师点睛

求解一般是将函数取绝对值，然后用不等式缩放法；或借助导数求最大(小)值法处理.

三、常用的奇偶函数

偶函数：	$\lvert x\rvert$	$\cos x$	x^{2n}（n为正整数）
奇函数：	x	$\sin x$	x^{2n+1}（n为正整数）

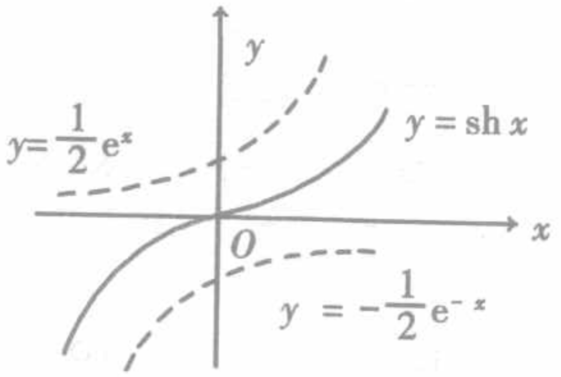
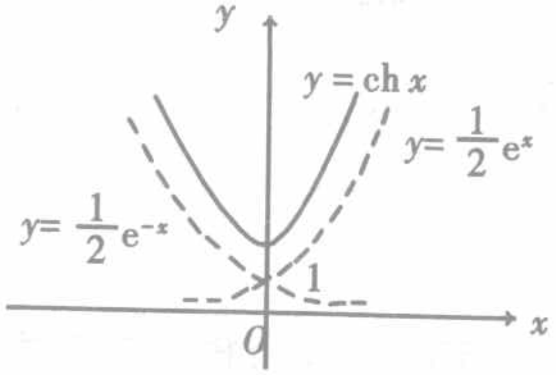
名师点睛

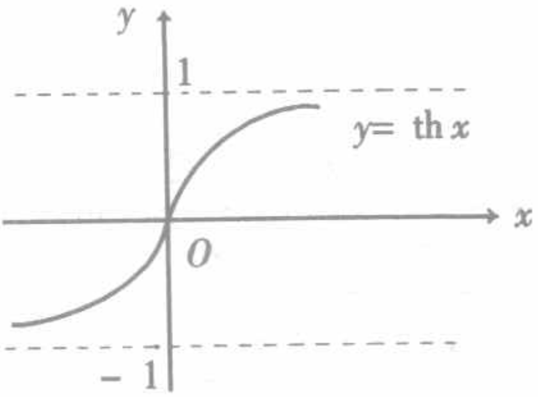
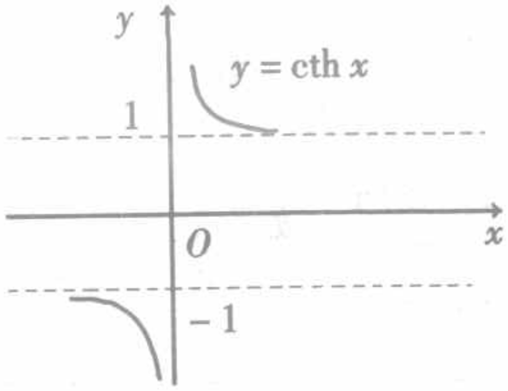
1. 常用 $f(x)+f(-x)=0$ 判别奇函数.

2. 偶数个奇函数之积为偶函数，一奇一偶乘积为奇函数.

3. 定义域不关于原点对称，则不存在奇偶性的问题.

四、双曲函数

名称	定　义	图　形
双曲正弦	$y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	

名称	定　　义	图　　形
双曲正切	$y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$	
双曲余切	$y=\mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$	

名师点睛

实际解题中常用到：

$$y'=(\mathrm{sh}x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$$

$$y'=(\mathrm{ch}x)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$$

经典题型　　【2001年试卷二】

设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0　(B)1　(C)$\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　(D)$\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

【解析】 由 $|f(x)|\leqslant 1$，从而 $f[f(x)]=1$，于是 $f\{f[f(x)]\}=1$.

§1.2 极限

一、数列极限的性质

惟一性	若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则极限值是惟一的
有界性	若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则数列 $\{x_n\}$ 有界
保号性	如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）
收敛数列与子数列的关系性	如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限为 a

二、函数极限的性质

惟一性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限值惟一
有界性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数在 x_0 的某一空心邻域内有界
局部保号性	如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<\vert x-x_0\vert<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）

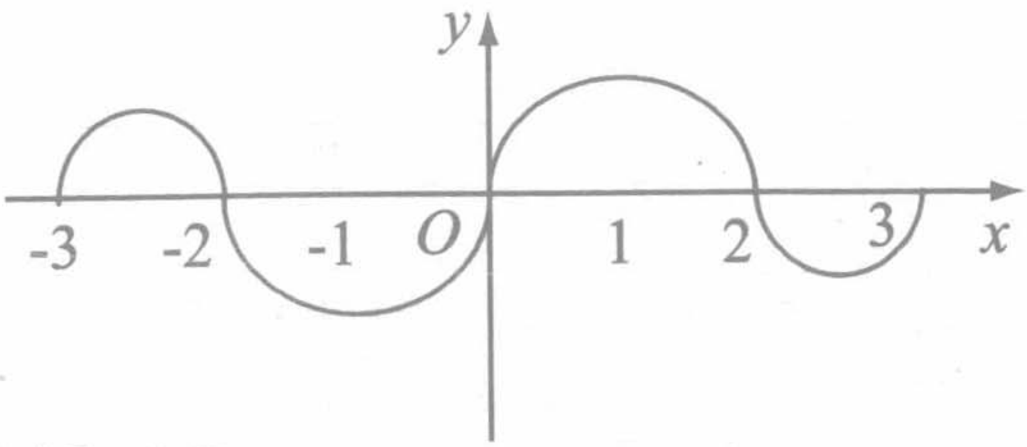
函数极限与数列极限的关系	如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n \neq x_0(n \in N^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

经典题型 【2007 年试卷一】

如图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则下列结论正确的是 ( )

A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



【答案】 (C)

【解析】 由题给条件知，$f(x)$ 为 x 的奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$，由 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，知 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt$

$\underline{\underline{t=-u}}\int_0^x f(-u)d(-u)\ \underline{\underline{f(-u)=-f(u)}}\int_0^x f(u)du=$ $F(x)$，故 $F(x)$ 为 x 的偶函数，所以 $F(-3)=F(3)$. 而

$F(2)=\int_0^2 f(t)dt$ 表示半径$R=1$的半圆的面积，所以 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$，其中 $\int_2^3 f(t)dt$ 表示半径 $r=\frac{1}{2}$ 的半圆的面积的负值，所以 $\int_2^3 f(t)dt=-\frac{\pi r^2}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{\pi}{8}$

所以 $F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}F(2)$

所以 $F(-3)=F(3)=\frac{3}{4}F(2)$，选择 C

三、极限运算法则

运算类别	运算法则
无穷小的运算	有限个无穷小的和为无穷小
	有界函数与无穷小的乘积为无穷小
	常数与无穷小的乘积为无穷小
	有限个无穷小的乘积为无穷小

运算类别	运算法则
$\lim f(x)=A$ 与 $\lim g(x)=B$ 的运算	$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
	$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
	$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0$ 时)
	$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$,其中 C 为常数
	$\lim[f(x)]^n=A^n$
	如果 $f(x)\geqslant g(x)$,那么 $A\geqslant B$
数列极限的运算:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$	$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$
	$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$
	当 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$ 且 $B\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}$

四、极限的存在准则

数列极限存在准则	夹逼定理	给定数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$,满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$($a$ 有限或为 $\pm\infty$)
	单调有界性判别法	单调上升有上界的数列必有极限
		单调下降有下界的数列必有极限