引力N体问题计算机模拟

The Computer Simulation of The Gravitational N-Body Problem

刘步林 著

學苑出版社

[illegible]

The Computer Simulation of
The Gravitational N-Body Problem

[illegible]

[illegible]

引力N体问题计算机模拟

The Computer Simulation of The Gravitational N-Body Problem

刘步林 著

學苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

引力N体问题计算机模拟/刘步林著.—北京：学苑出版社，2001.12
ISBN 7-80060-820-4

Ⅰ.引… Ⅱ.刘… Ⅲ.天体力学—多体问题—计算方法 Ⅳ.P132

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第091146号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街11号 100036
北京忠信诚胶印厂 新华书店经销
889×1194 16开本 11.5印张 290千字
2002年2月北京第1版 2002年2月北京第1次印刷
定价：30.00元

内容简介

本书是使用牛顿运动方程等微分方程的数值方法，对星系的计算机模拟，研究星系的形成和演化；本书是国内天文学领域中，此类课题的首创著作。由于本书具有系统性、实用性和新颖性等显著特点，是天文动力学前沿研究的必备资料，是培养天文学研究生难以替代的教材之一，是从事数学、物理科研教学工作者有益的参考资料，也是天文、数学和物理等专业大学生拓展知识面的读物。

序言

在晴朗无月的夜晚，繁星密布的天空，往往引起人们无尽的遐想。稍微仔细地观察，我们就会发现，在广阔的宇宙中，星星只是以一个个亮点散布在空间。即使用大型的天文望远镜观测，情况也是这样。这些天体之间的距离如此之大，以至于它们本身的体积的大小可以忽略不计，因此,天文学家作出恰如其分的科学的假设——把天体当作质点看待。研究天体在相互引力作用下的动力学问题（例如天体的运动，天体系统的结构和演化等），称为引力N体问题（或称为N体问题，亦称为多体问题）。引力N体问题的分析研究，二三百年来历尽沧桑，取得不少进展，但未获得关键突破，就连N=3的三体问题至今还没有获得分析解。自从20世纪40年代电子计算机发明以来，特别是其后的高速计算机的出现。数值方法应用于引力N体问题的研究中，尤其是蒙特卡罗方法的使用，一下子激发它的潜力，在星系和宇宙学领域的应用研究中，一改引力N体问题的老态龙钟，爆发出旺盛的青春活力，打破了自古以来，以观测作为获得天文学知识和从事天文研究的单一手段，计算机模拟作为强有力的实验手段，使得一门新的学科——实验恒星动力学崭露头角，而载入史册。

实验恒星动力学（即引力N体问题计算机模拟），由于具有的实用性，能立竿见影，在国际天体物理学领域中，是个火热的学科。国内天文学界，向来也十分重视引力N体问题计算机模拟，虽说势单力薄，也取得点滴成果，受到同行们的关注。1991年9月，本书作者奉中国科学技术大学天体物理学中心周又元教授之邀，赴合肥，作了引力N体问题计算机模拟讲座。为了这次讲座，还赶写了一份英文讲稿。这一讲稿成了撰写本书的第一次尝试，也可以说是本书的一个蓝本。当然，这次撰写作了较大的增补，特别在系统性、严密性、实用性和可推广使用方面，有所加强。希望这本书能使读者知道，什么是引力N体问题计算机模拟，引力N体问题计算机模拟有什么用，和怎样用引力N体问题计算机模拟；但因水平有限，是否能达到目的，得由读者评说。其中的缺点和错误也恳请读者批评指正。

目 录

Contents

第一章 概论

§1-1 什么是引力N体问题

天文学是研究天体，并用以服务于人类的科学。早期天文学主要研究天体的运行，天体之间距离，天体在空间的分布及天体组成的各种系统；后来发展到研究天体的物理情况，天体的结构和化学组成，天体的起源和演化以及宇宙的结构和发展等。以牛顿万有引力定律为基础，研究天体的运动和形状的科学，是天文学的一个分支学科——天体力学。在广阔的宇宙中，星星只是以一个个亮点散布在空间，这些星体之间的距离如之大，以至于它们本身的体积的大小可以忽略不计，因此可以把天体看作质点（质量全部集中在质心），研究它们在相互引力作用下的动力学问题，则称为引力N体问题（或称为N体问题，亦称为多体问题；当N很小时，也有称为少体问题）。按照传统的学科分类来说，引力N体问体应是天体力学的子课题。但它的应用远远超出经典天体力学所研究的太阳系范围，它的基本原理和方法已经在星系和宇宙的结构和发展研究中显示出力量，而引起广泛兴趣。所以，有时又把用于星系动力学研究的引力N体问体归入天体物理范畴。

作为古老天文学科中，一个具有悠久历史的引力N体问题。长期以来，在分析研究方面未获得重大突破，就连N=3的三体问体，至今也未获得分析解。这里我们简单回顾一下寻找三体问题积分[1]的历史，对其艰难历程可以领悟一二。一般三体问题的运动方程为十八阶的常微分方程组，早在18世纪，就已经知道，引力N体问题已经存在十个初积分，这就是说，如果能再求出八个初积分，则三体问题就能解决。1843年，雅可比确认寻找三体问题新积分是解决三体问题的重要途径，并对此作出重要贡献，也给以后产生重要影响。1887年，布伦斯证明，如果以坐标和速度分量作为基本变量，则三体问题不存在新的代数积分（即积分变量的代数函数）。1889年，庞加莱又证明，如果用轨道要素的组合作为基本变量，则新的单值解析积分也不存在。1898年，潘勒韦进一步证明，表示为速度分量的代数函数形式的新积分也不存在。不仅一般三体问题，就是特殊三体问题，例如平面圆型限制性三体问题，运动方程只有四阶，已有一个雅可比积分，只要再求出一个新积分就可以求解。但是，1941年，西格尔证明，平面圆型限制性三体问题除雅可比积分外，不存新的代数函数形式的积分。针对这个困难局面，20世纪50年代以后，又提出两条寻找三体问题新积分的途径。一条是寻找级数形式的新积分。例如，1965年，希腊康托普洛斯找到一个用级数表示的新积分。虽说，级数的系数原则上可以逐步求出，但是这个积分的收敛性还没有证明。另一个途径想用数值方法证明新积分是否存在。综上所述，寻找新积分是极其困难的，直到现在还没有解决。分析方法如此困难，自然而然想到数值方法，虽说想到，但是，由于没有理想的计算工具，浩繁的计算量，也使人望而生畏。

§1-2 引力N体问题计算机模拟及发展简史

自从20世纪40年代电子计算机发明以来，广泛用于天文学的繁重计算中。用数值方法得到的N体问题的解，具有相当高的精度。例如，外行星的坐标已用数值方法推算出400年结果。特别是其后的高速计算机的出现，一改引力N体问题的老态龙钟，爆发出旺盛的青春活力，打破了自古以来，以观测作为获得天文学知识和从事天文研究的单一手段（当然，天文观测仍然是获得天文学知识和从事天文研究的主要手段！），计算机模拟作为强有力的实验手段，使得一门新的学科——实验恒星动力学[2,3,6]崭露头角，而载入史册。这里所说的实验是指，根据天文学的基本理论，用数值方法在计算机上模拟天体或天体系统的形成和演化，就如同在实验室里做物理实验那样直观，可以随时观测它的发展和演变。当然，实验恒星动力学是天文学和天体物理学理论工作的一部分，它和分析工作，是相互促进，互为补充，相辅相成，而不是替代分析工作。简而言之，实验恒星动力学就是从基本方程出发，由蒙特卡罗

方法产生所研究问题的初值，用数值方法研究天体系统动力学性质的引力N体问题计算机模拟。

实验恒星动力学是计算天文学的重要分支之一。它最早可以追溯到1941年Holmberg[4]的见解，他认为，对于星系动力学中的一些难点，可以用模拟来作为解决这些问题的突破口。最早实践引力N体问题的计算机模拟的人，要数von Hoener[5]1960年对星团的研究。真正得到蓬勃发展是1970年国际天文学会在英国剑桥大学召开的“引力N体问题”专题学术讨论会之后。Hohl[6]，Aarseth和Lecar[3]将星系形成和演化的计算机模拟称为实验恒星动力学。自那以后，这个名字逐步为更多的同行们接受。其后，1988年，在芬兰召开的少体问题专题会议。1989年，在美国召开的互绕星系会议。1990年，在德国海德堡召开的作用星系动力学专题会议，1998年在日本召开的“数值天体物理学”等。这些都是和恒星动力学方面密切相关的学术会议，也是一个个重要的学术里程碑标记。当然，引力N体问题的计算机模拟在其中占有很重要的份量。这些年来，有不少科学家，例如，Miller， Hohl， Hockney，Aarseth和Toomre等人，为实验恒星动力学的发展作出杰出的贡献。国内天文学界向来十分重视引力N体问题的计算机模拟的研究和发展，但由于势单力薄，未形成一支队伍，进步不快，与国际水平仍有较大差距。有待迅速赶上。

§1-3 计算机模拟的科学成果

如果从1970年国际天文学会在英国剑桥大学召开的“引力N体问题”专题学术讨论算起，引力N体问题计算机模拟已经走过三十个年头。计算机模拟在恒星和星系动力学中的应用，已经取得很多有用的结果。Miller[7]和Kovalevsky[8]在1989年作了很好地总结，就是今天来看，仍然是十分重要的，这里不妨列出来。近十年来，当然又有许多可喜成果有待去总结。

(1) 论证了引力N体问题是个混沌。混沌是个广为人知的词汇，混沌无所不在，它是既模糊又细致，既有结构而又不可预言，给人以难以捉摸的非难。尽管如此还是可以研究的。对物理学家来说，混沌是过程的科学而不是状态的科学，是演化的科学而不是存在科学。混沌研究的进展，是近年来非线性科学最重要的成就之一。它正在消除对于统一的自然界的决定论和概率论两大对立描述体系的鸿沟，使复杂系统的理论开始建立在“有限性”这个更符合客观实际的基础之上[9,10]。使天文学家更深入的认识太阳系，星系和宇宙。

(2) 论证了薄盘星系不是动力学的稳定的形式。最重要的不稳定原因不是在于它的轴对称。这个结论导致Ostriker和Peebles提出一个有名的建议：从稳定性考虑，星系周围是由大量暗物质包裹。而暗物质对于宇宙学理论来说是极为重要的。

(3) 确认旋涡星系的密度波图象。一般认为，盘状星系大多存在着大尺度的宏图，并表现为螺旋结构。林家翘[11]等将B. Lindblad提出的密度波概念予以创新，发展成螺旋结构理论的密度波学说，其中的QSSS基本假设，认为螺旋结构本质上是一种波动现象。在准稳螺旋结构的假设下，利用理论物理学中的WKBJ方法作短波长的渐进处理，发展成一种純粹的引力理论，可以解释螺旋结构的持续性问题。计算机模拟能证明螺旋结构的密度波理论，并能演示密度波图象。

(4) 对于快速转动的恒星系统来说，论证了类似棒结构的天体系统（也就是绕旋转椭球中的短轴旋转）是动力学的最佳形式。

(5) 在星系相遇至碰撞过程中，发现星系的强收缩现象。这个基本物理过程就如同星系主径向脉冲模式的激发。

(6) 论证了在星系团内部，星系内部动力学的影响是星系存在的结果。例如，在星系团引力场中，由于潮汐作用引起星系转动的减速，就是星系团影响的一个例子。再例如，喷焰形成壳层和条带结构，甚至在一些极端情况下造成瓦解。

(7) 通过试验，检验了不稳定扰动的理论增长率，如同在盘和三维星系中一样。稳定的界限也得到研究和确认。基本上所有的理论模型的稳定性都经过试验。

（8） 通过试验，检验了膨胀宇宙的扰动增长率，并被确认为2-3%。

（9） 原始星系的塌缩，如果一开始就和周围的物质有联系的，将平滑形成具有扁的转动曲线的星系（密度为r^{-2}）。这和大多数旋涡星系的转动曲线是一致的；而一开始就和它周围物质分开，原始星系将经历更猛烈的塌缩，密度下落到r^{-3}。这样密度的星系投影到天球上，产生椭圆星系明亮的轮廓（de Vaucouleurs轮廓）。差别好像是和周围的晃动有关。由某种方式引起震动的星系也可能变化到r^{-3}的密度轮廓。这就更加强和晃动的联系。总之，计算机模拟的这一发现，帮助我们认清两种规则星系（旋涡星系和椭圆星系）的形成。

（10） 发现了速度分布强各向异性的球状星系的动力学不稳定性。

（11） 发现星系核是绕着它的质量中心转动的。而且星系核区域不是静稳态系统。

§1-4 计算机模拟的应用范围

什么样的问题能用引力N体问题计算机模拟方法去研究呢！这是一个很重要的问题。一般地讲，只要是点质量构成的质点系统，就可用引力N体问题计算机模拟方法去处理。具体来讲，结合天文学的实际情况，Sellwood[12]指出下面几个问题适合用计算机模拟方法去研究。

（1） 星系内部动力学，包括是否有核球或晕的椭圆系统或盘系统。

（2） 星系和小的伴星系的相互作用。例如卫星（即伴星系）轨道的衰减，围绕着椭圆星系壳层的形成和盘星系中环星系的形成。

（3） 接近等质量星系之间的相互作用，主要是盘星系和椭圆星系等系统之间的并合问题。

（4） 星系群问题。

（5） 膨胀宇宙中的星系团问题。

第二章 基本方程

§2-1　运动方程

运动方程是讨论引力N体问题的基本出发点。设有n个质点：$P_1, P_2, \cdots, P_n$。它们的质量和初始直角坐标分别为m_i和ξ_i, η_i, ζ_i。这里下标$i = 1,2,\cdots,n$。令Δ_{ij}是质点P_i和质点P_j在t时的距离：

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2$$

那么，由于其它$n-1$个质点的吸引，在质点P_i处的势为：

$$G(\frac{m_1}{\Delta_{i1}} + \frac{m_2}{\Delta_{i2}} + \cdots + \frac{m_n}{\Delta in}) = G\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{m_j}{\Delta_{ij}}$$

于是质点$P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$的运动方程可以表示为：

$$m_i\ddot{\xi}_i = Gm_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \qquad (2\text{-}1)$$

对于质点P_i的另外两个分量η和ζ，有类似于方程（2-1）的形式。如果令

$$U = G\sum_{j=i+1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \qquad (2\text{-}2)$$

则U对ξ_i（或η_i, ζ_i）的偏导数只包含其中含m_i的项，即为（2-1）式右端各项，注意$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$。因此运动方程可写为

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (2\text{-}3)$$

由（2-3）式可知，U对坐标的偏导数，即为引力在该坐标轴上的分量，因此把U叫做力函数。由（2-2）式可知，它同坐标系的选则无关。从理论力学可知，N体系统的力函数U的力学意义是整个系统位能的反号。（2-3）式就是以力函数表示的质点运动方程。

§2-2　引力N体问题的初积分

为了和上一节使用的符号一致。我们仍然设$P_1, P_2, \cdots, P_n$为空间n个天体。它们的质量为$m_1, m_2, \cdots, m_n$。如果除了它们之间的引力外，再没有其它的作用力，则该N体系统是一个封闭系统。由理论力学可知：封闭系统的总能量守恒，总动量守恒，总动量矩守恒，系统的质量中心作匀速直线运动。这里我们直接从运动方程（2-3）出发，推导[13]运动方程的积分。从而描述封闭系统的几个主要特点。

将（2-1）式运动方程的三个分量写完全

$$m_i\ddot{\xi}_i = Gm_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}, m_i\ddot{\eta}_i = Gm_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}, m_i\ddot{\zeta}_i = Gm_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}} \qquad (2\text{-}4)$$

这里 $i = 1,2,\cdots,n$， $j \neq i$。其中$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}$代入并求偏导数之后的运动方程为

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\xi}_i = -G\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1, j\neq i}^{n}[m_i m_j(\xi_i - \xi_j)]/\Delta_{ij}^3 \quad (j \neq i) \qquad (2\text{-}5)$$

上式右端任一项$i=k,j=m$都有一个对应项$i=m,j=k$，两项只相差一个符号，正好相消，因此上式的右端为零，即

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\xi}_i = 0 \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\eta}_i = 0, \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

将（2-6）式积分一次可得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\xi}_i = \alpha_1, \sum_{i=1}^{n} \dot{\eta}_i = \beta_1, \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\zeta}_i = \gamma_1 \qquad (2\text{-}7)$$

式中的$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$为积分常数。很显然，这就是动量守恒定律。再将（2-7）式积分一次得到

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\xi_i = \alpha_1 t + \alpha_2, \sum_{i=1}^{n} m_i\eta_i = \beta_1 t + \beta_2, \sum_{i=1}^{n} m_i\zeta_i = \gamma_1 t + \gamma_2 \qquad (2\text{-}8)$$

式中的$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$也为积分常数。我们知道，当系统的质量中心作匀速直线运动时，则它的坐标和时间应成比例。（2-8）式正体现了这一特点。所以说封闭系统的质量中心是作匀速直线运动的。

将（2-4）式的第二式乘ξ_i，第一式乘η_i并相减得

$$m_i(\xi_i\ddot{\eta}_i - \eta_i\ddot{\xi}_i) = Gm_i\sum_{j=1}^{n}[\frac{m_j\eta_i(\xi_i-\xi_j)}{\Delta_{ij}^3} - \frac{m_j\xi_i(\eta_i-\eta_j)}{\Delta_{ij}^3}]$$

对i求和，有

$$\sum m_i(\xi_i\ddot{\eta}_i - \eta_i\ddot{\xi}_i) = G\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3}(\xi_i\eta_j - \eta_i\xi_j) \qquad (2\text{-}9)$$

（2-9）式右端也是任一项都有一个对应项，且两项只相差一个符号，因此上式的右端为零。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\xi_i\ddot{\eta}_i - \eta_i\ddot{\xi}_i) = 0, \sum_{i=1}^{n} m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i - \zeta_i\ddot{\eta}_i) = 0, \sum_{i=1}^{n} m_i(\zeta_i\ddot{\xi}_i - \xi_i\ddot{\zeta}_i) = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

将（2-10）式积分一次可得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i) = c_3, \sum_{i=1}^{n} m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i) = c_1, \sum_{i=1}^{n} m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i) = c_2 \qquad (2\text{-}11)$$

c_1,c_2,c_3为积分常数。（2-11）式即表示封闭系统的总动量矩守恒定律。也称为面积积分。

将（2-4）式中的三个方程依次乘以$\dot{\xi}_i,\dot{\eta}_i,\dot{\zeta}_i$，然后相加并对$i$求

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\xi}_i\ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i\ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i\ddot{\zeta}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\dot{\xi}_i + \frac{\partial U}{\partial\eta_i}\dot{\eta}_i + \frac{\partial U}{\partial\zeta_i}\dot{\zeta}_i)$$

上式可写成

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \frac{dU}{dt}$$

积分得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) - U = c \qquad (2\text{-}12)$$

c为积分常数。（2-12）式即为能量守恒定律。力函数U的反号（$-U$）就是系统的位能。

到此，我们已经得到运动方程（2-3）的10个积分，并包含10个互相独立的积分常数。前面提到的封闭系统的总能量守恒定律，即以c为积分常数的（2-12）式；总动量守恒定律（含三个初积分），即以$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$为积分常数的（2-7）式；总动量矩守恒定律（含三个初积

分），即以c_1,c_2,c_3为积分常数的（2-11）式；系统的质量中心作匀速直线运动（含三个初积分），即以$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$为积分常数的（2-8）式。（2-3）式是6n阶的微分方程组，是引力N体问题的基本方程。遗憾的是，对N大于等于3的问题不能完全解出。

§2-3　N体系统的发散和全碰撞[13]

设有n个天体：$P_1,P_2,\cdots,P_n$。它们的质量为m_i，在一惯性系里的位置矢量为$\mathbf{r}_i$，下标$i=1,2,\cdots,n$。由力函数的定义（2-2）式容易证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\cdot\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}=-U \tag{2-13}$$

N体系统对坐标原点的转动惯量I为

$$\mathrm{I}=\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i^2 \tag{2-14}$$

将I对时间t求二次导数（设m_i与t无关），则有：

$$\ddot{I}=2(\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2+\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i\cdot\ddot{\mathbf{r}}_i)$$

$$\ddot{I}=2(2T+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\cdot\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i})$$

这里T为系统动能，将（2-13）式代入上式得

$$\ddot{I}=2(2T-U)=2(T+E)=2(U+2E) \tag{2-15}$$

E表示系统的总能量。（2-15）式称为N体问题的雅可比公式。我们知道，系统总动能T总是正的，而总能量E可正也可负（即当位能大于动能时）。从（2-15）式可看出，如果$2T>U$，或者$T>|E|$时，转动惯量$\ddot{I}>0$，即

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i^2)>0$$

故$d(\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i^2)/dt$随时间$t$无限增大，这说明至少有一个个天体的位置矢量$\mathbf{r}_i$随时间$t$无限增加，这时系统是发散的。因此要使N体系统不发散，则必须满足$E<0$，并且$|E|>T$。当然，这只是一个必要条件，并非充分条件。因为，如若$\ddot{I}<0$，$d(\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i^2)/dt$随时间而减小，但这并不排除系统中有些天体的位置矢量$\mathbf{r}_i$随时间t无限增加，因此系统仍然是不稳定的。

系统碰撞和系统的角动量有关，为讨系统的全碰撞，先叙述两个引理。引理1，$f(x)$是定义在$a\le x\le b$内的两次可微函数，且满足$f(x)>0$，$f''(x)>0$，若$f(b)=0$，则有$f'(x)\le 0$。引理2，对于$A=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$，$B=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$，$C=\sum_{k=1}^{n}c_k^2$，则有柯西(Cauchy)不等式：$C^2\le A\cdot B$。

我们将角动量的分量表达式（2-11），改写成角动量的矢量表达式$\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{C}$。于是有

$$C\le\sum_{i=1}^{n}m_i|\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i|\le\sum_{i=1}^{n}m_ir_iv_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{m_i}r_i\cdot\sqrt{m_i}v_i$$

上式中的C为系统总角动量$\mathbf{C}$的模。根据柯西不等式，则有

$$C^2 \le \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = 2IT$$

由（2-15）式得到如下的宋德曼不等式

$$C^2 \le I(\ddot{I} - 2E)。$$

宋德曼定理表明：N个质点不可能发生全碰撞，除非系统的角动量为零。证明如下：

将坐标系的原点选择在系统的质心，则

$$\sum_{j=1}^{n} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j^2 - 2\mathbf{r}_i \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i^2 \sum_{j=1}^{n} m_j = I + M\mathbf{r}_i^2$$

其中$M = \sum_{j=1}^{n} m_j$。将上式两边乘以m_i，并对i求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i m_j \mathbf{r}_{ij}^2 = IM + M\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i^2 = 2IM \tag{2-16}$$

此式表明，若系统发生全碰撞，则$\mathbf{r}_{ij} \to 0$，由（2-16）式可知，则应有转动惯量$I \to 0$，但这是不可能的。因为

理由1，若$t \to \infty$时，$\mathbf{r}_{ij} \to 0$，$I \to 0$。根据力函数的定义，则应有$U \to \infty$。又由（2-15）式，可得出$\ddot{I} \to \infty$。也就是说，必存在某一时刻t_1，当$t > t_1$时，有$\ddot{I} > 1$。将此不等式积分两次得到$I > t^2/2 + At + B$，这里A和B为积分常数。由此看出，当$t \to \infty$时，$I \to \infty$，这与初始假设全碰撞时$I \to 0$相矛盾。因此，N体系统不可能当$t \to \infty$时出现全碰撞。

理由2，若$t \to t_1$时，$\mathbf{r}_{ij} \to 0$，则$I \to 0$，$U \to \infty$，$\ddot{I} \to \infty$。这表明总存在一区间，当$t_2 \le t \le t_1$时使得$\ddot{I} > 0$，又$I > 0$，根据引理1，$-\dot{I} \ge 0$，则$-\dot{I}I^{-1} \ge 0$。将宋德曼不等式两端乘以$-\dot{I}I^{-1}$得

$$-\dot{I}I^{-1}C^2 \le -\dot{I}I^{-1}I(\ddot{I} - 2E) = 2E\dot{I} - \dot{I}\ddot{I}$$

上式两端对t积分（$t > t_1$）得

$$C^2 \ln I^{-1} < 2EI - \dot{I}^2/2 + K \le 2EI + K$$

K为积分为常数，故有$C^2 \le (2EI + K)/(\ln I^{-1})$。因$t \to t_1$时$I \to 0$，$\ln I^{-1} \to 0$，但$C$为积分常数，故只能$C = 0$，否则将不会出现$t \to t_1$时，$\mathbf{r}_{ij} \to 0$的情况。

§2-4 三体问题

二体问题是个可积系统，它已得到完满的解决。而三体问题则完全不同，概论中已经提到，历史上，曾经有许多著名的数学家和力学家对三体问题严格解作过大量工作，在它的慢长的研究道路上，历经艰难，但是一直没有成功。从方程（2-3）可知，一般三体问题的运动方程为十八阶的常微分方程组，由本章第二节可知，引力N体问题存在十个经典积分。

假设P_1, P_2, P_3是三个具有任意质量m_1, m_2, m_3的天体，它们不受其它外力作用，只是在相互引力作用下运动。以它们的质心o为原点，建立一个惯性系$o-\xi\eta\zeta$，使$\xi\eta$平面与三体所在的平面重合，天体$P_k(k = 1,2,3)$在该坐标系中的运动方程为

$$\begin{pmatrix}\ddot{\xi}_k & \ddot{\eta}_k & \ddot{\zeta}_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_k} & \dfrac{\partial V}{\partial \eta_k} & 0\end{pmatrix} \tag{2-17}$$