



基于提出问题的

数学教学研究

夏小刚 / 著

$$a^2+b^2=c^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} (n \in \mathbb{N})$$

$$y^2=2px(p>0)$$

贵州人民出版社



基于提出问题的数学教学研究

夏小刚 著

贵州人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

基于提出问题的数学教学研究 / 夏小刚著. — 贵阳: 贵州人民出版社, 2008. 8

ISBN 978 - 7 - 221 - 08219 - 0

I. 数… II. 夏… III. 数学课—教学研究—中学 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 136015 号

书 名	基于提出问题的数学教学研究
作 者	夏小刚 著
责任编辑	钱海峰 刘晓岚
封面设计	唐锡璋
出版发行	贵州人民出版社
印 刷	贵阳兴顺发彩色印务有限公司
规 格	850 × 1168 毫米 1/32
印 张	10.5
字 数	300 千字
版 次	2008 年 8 月第 1 版 第 1 次印刷
印 数	1000 册
书 号	ISBN 978 - 7 - 221 - 08219 - 0/G · 2677
定 价	21.00 元

前 言

数学的发展始于“提出问题”(Problem posing),是一个由“提出问题”与“解决问题”(Problem solving)不断交织的过程。由于提出问题特别是提出“新问题”、“新的可能性”以及“从新的角度去看旧的问题”需要有创造性的想象力,因此,许多杰出的数学家和数学教育家(如 Freudenthal, 1973; Polya, 1954; Silver, 1994)认为,提出数学问题应该成为数学教育的一个重要方面。

二十多年来,随着建构主义学习理论的兴起、对以“问题解决”为核心的数学教育改革运动的反思以及知识经济社会对数学教育培养创新人才的要求的提出,如何引导和鼓励学生在问题意识的驱使下去发现问题和提出问题,进而促进学生问题意识和探究能力的发展,已成为各国数学教育改革的一个重要话题。

20 世纪 90 年代末,贵州师范大学数学教育研究所与美国特拉华大学蔡金法(Jinfa Cai)博士合作开展了“中美学生数学问题提出与问题解决能力”的调查研究。该研究表明,我国学生提出问题的能力明显低于解决问题的能力,也低于美国学生的提出问题能力,其问题意识和提出问题能力令人担忧。

为了改变我国学生提出数学问题能力低下、解决问题只重视结果不重视过程的现状,改革中国传统数学教育的诸多弊端,由贵州师范大学吕传汉教授和汪秉彝教授领导的课题组(2000)提出了一种培养学生创新意识和实践能力为宗旨的数学教学模式——



“数学情境与提出问题”教学模式。该模式强调教师的引导作用和学生知识的主动探究与索取,注重教学中问题情境的创设,重视“情境-问题”学习链的构建及其作用的发挥,主张将学生基于数学情境的“置疑”、“提问”与“自主学习”贯穿在教学过程的始终。其实质就是一种以“问题”驱动的数学教学。

自2001年起,“数学情境与提出问题”教学的实验研究开始在贵州省的部分中小学进行。随着研究工作的不断深入,实验学校 and 实验班级逐年递增,实验地区逐年扩展。几年来,实验研究已从贵州拓广到了云南、四川、重庆、浙江、广东等地,有上百所实验学校和上千个实验班级,涉及从小学一年级到高中三年级的各个学段。实践表明,“数学情境与提出问题”教学对学生的数学兴趣、提出问题能力以及数学学习能力具有显著的促进作用。

“数学情境与提出问题”教学模式被誉为“一项植根于中国、具有中国特色并借鉴了发达国家先进教学经验的现代课堂教学模式”(顾明远,2005)。2005年,中国教育学会第十八次学术年会将“数学情境与提出问题”教学实验研究成果作为典型经验向全国推介。2006年,贵州省教育厅发文(黔教办学[2006]40号文)向全省中小学推广这一教学研究成果。

目前,课题组已出版《数学情境与数学问题》(北京师范大学出版社,2005)、《中小学数学情境与提出问题教学研究》(贵州人民出版社,2006)等学术著作7部,并在《比较教育研究》、《数学教育学报》、《人民教育》、《Frontiers of Education in China》等中英文期刊(刊物)发表论文几十篇。

为了对“数学情境与提出问题”教学研究作进一步的理性提升和实践拓展,本书立足于“提出问题”的视角,结合国内外的相关研究,对提出问题教学研究的缘起与发展作了简要概述,在此基础上,从提出问题的含义与特征、提出问题教学的实质、提出问题教学中的基本问题、提出问题的方法及其教学策略、提出问题教学

模式及运用、提出问题能力的评价探析等方面,对基于提出问题的数学教学进行了理论探讨和分析,接着从提出问题的教学设计、基于提出问题的数学校本教研、基于提出问题的数学教学实验研究等方面,就提出问题如何由课程理念向教学现实的转化作了探索。相信,这不仅可以丰富有关提出问题的数学教学理论,而且有助于新课程背景下提出问题教学的有效实施。

本书只是在提出问题的教学研究方面抛砖引玉,对于书中的不足诚望各位尊敬的读者给予批评和匡正。

目 录

前 言	(1)
第1章 绪 论	(1)
一、提出问题教学研究的源探	(2)
(一)提出问题:数学发展的基础	(2)
(二)提出问题教学研究源探	(6)
二、提出问题教学研究的现实背景	(18)
(一)由数学教师课堂提问所引发的思考	(19)
(二)学生数学能力发展中存在的问题	(23)
(三)数学课程标准与提出问题教学	(30)
三、研究的意义与价值	(37)
(一)完善课堂教学提问的全过程,促进以知识生成 为特征的课堂教学环境的形成	(37)
(二)促进新课程下提出问题教学的有效实施	(38)
(三)丰富数学教育跨文化研究的理论与实践	(39)
四、研究的思路与方法	(41)
第2章 提出问题教学的基本认识	(44)
一、提出问题的含义与特征	(44)
(一)对数学问题的基本认识	(44)



(二)提出问题的基本含义	(53)
(三)提出问题的作用与价值	(55)
(四)提出问题的两种属性	(60)
(五)学生提出问题与教师课堂提问的区别	(62)
(六)学校数学与科学数学之间提出问题的 共性与差异	(64)
(七)提出问题的实质	(65)
二、提出问题教学的实质	(66)
(一)提出问题教学的含义	(66)
(二)提出问题教学存在的必然性	(68)
(三)提出问题教学的存在形式	(69)
(四)提出问题教学中的情境创设	(71)
(五)提出问题教学的基本环节	(82)
(六)提出问题教学的实质	(83)
三、提出问题教学实施的基本要求	(84)
(一)具有提出问题教学的知识和技能	(84)
(二)非形式化的教学处理方式	(86)
(三)明确的教学目标	(88)
(四)民主与和谐的课堂气氛	(88)
四、提出问题教学中的基本问题	(90)
(一)情境创设:误区与跨越	(90)
(二)“提出问题”与“解决问题”	(105)
(三)教学引导	(108)
第3章 提出问题的方法及其教学策略	(112)
一、提出问题的几种方法	(112)
(一)以询问数学初始条件来分	(113)

(二)以数学思想方法来分	(121)
二、学生提出的问题类型	(129)
(一)按问题的性质进行分类	(129)
(二)根据语义的复杂程度进行分类	(133)
(三)按是否拓展初始数学条件进行分类	(136)
(四)按问题的价值进行分类	(137)
(五)根据问题的显现程度进行分类	(138)
(六)按照问题的难易程度进行分类	(139)
三、提出问题的教学策略	(140)
(一)提出问题教学策略面面观	(140)
(二)提出问题教学的基本策略	(144)
第4章 提出问题的教学模式及运用	(157)
一、提出问题教学模式的含义及功能	(157)
二、提出问题教学的基本模式	(159)
(一)“情境-问题”教学模式	(160)
(二)“质疑-发展”式提出问题教学模式	(173)
(三)“合作-探究”式提出问题教学模式	(179)
三、提出问题教学模式的综合运用	(185)
第5章 提出问题能力的评价探析	(194)
一、提出问题能力的基本认识	(195)
二、提出问题能力评价的目的与作用	(197)
三、提出问题能力评价标准的建立	(199)
(一)问题的数量	(201)
(二)问题的种类	(203)
(三)问题的新颖性	(207)
四、提出问题能力评价的实施	(208)



第6章 提出问题教学设计及案例分析	(214)
一、提出问题教学设计的基本要求	(214)
二、提出问题教学设计的两种类型	(221)
(一)主题式“提出问题”教学设计	(222)
(二)单元式“提出问题”教学设计	(230)
三、基于探究的提出问题教学设计及案例分析	(246)
第7章 基于提出问题教学的校本教研	(258)
一、校本教研的含义	(259)
二、校本教研对农村地区教师专业发展的适切性	(261)
三、民族地区乡镇中学校本教研的现状	(263)
四、区域内校际合作式校本教研的提出	(264)
五、区域内校际合作式校本教研活动的开展	(266)
六、问题与思考	(269)
第8章 基于提出问题的数学教学实验研究	(272)
一、实验的目的	(273)
二、实验的主要内容和措施	(273)
三、实验研究的基本成效	(276)
四、结论与讨论	(280)
第9章 数学情境与提出问题教学研究阶段性成果	(283)
一、数学情境与数学问题个案	(285)
二、数学情境与提出问题教学案例	(296)
主要参考文献	(317)
后 记	(325)

第1章 绪论

- * 提出问题教学研究的源探
- * 提出问题教学研究的现实背景
- * 研究的意义和价值
- * 研究的思路与方法

在中小学数学教学中,教师通常会给学生提供一些需要完成的数学问题,如数学证明、代数运算、数值检验等。这些问题大多属于陈述清楚、目标明确的数学问题,显然,它们有助于学生对数学知识与技能的掌握,但远不是数学活动的全部。事实上,数学无论作为一门科学学科,还是作为一种学科活动,都涉及两个层面:“提出问题”与“解决问题”。因此,当我们把“问题”看作是数学的心脏时,“问题”就不只是一种“解题”对象,还是一种蕴涵创造力的数学发现。

提出问题是数学创造活动的一个重要特征。近二十年来,国际数学教育界普遍认为,把“提出问题”纳入中小学数学课程内容,使之成为数学教学的基本目标和教学的重要手段,这有助于学生在问题意识的驱动下去发现问题、提出问题和解决问题,促进学生创新意识和实践能力的发展。

近年来,随着《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》和《普通高中数学课程标准(实验)》的相继颁布,“提出问题”成为我



国中小学数学课程的重要组成部分。如何使学生在问题意识的驱动下去发现问题和提出问题,进而得到提出问题、分析问题和解决问题能力的协调发展,已成为国家基础教育数学课程改革的一个重要话题。

本章拟对提出问题教学研究的缘起及其发展作简要回顾,在此基础上对提出问题教学研究的现实背景进行分析。

一、提出问题教学研究的源探

(一) 提出问题:数学发展的基础

数学的发展源于人类生活、生产的需要。事实上,数学活动的最早期的遗迹及美索不达米亚和埃及的数学文化已为人们提供了大量物证,譬如在公元前 1000 年玛雅文明所留存至今的少数遗迹中,人们发现了一种现今被叫做“点和线”的记号雕刻的石碑或石柱,在这些石碑或石柱上,玛雅人用一个点表示“1”,一条竖线代表“5”,还有一个表示“0”的符号^①。不过,随着数概念和运算方法的产生,数学逐渐呈现出自身发展的特点,数学问题成为显现数学学科特征一个重要标志。

• 古希腊人早就知道边长为 3,4,5 的三角形是直角三角形,我们也很容易找出所有满足于方程 $a^2 + b^2 = c^2$ 的正整数解 a, b, c ——毕达哥拉斯三元数。进一步地,如果把没有公因子的毕达哥拉斯数(a, b, c)称之为素的毕达哥拉斯三元数,那么可以看到:对任意 $v > u$ 的正整数 v 和 u ,如果 u 和 v 没有公因子且不同时是奇数,则公式 $a = v^2 - u^2, b = 2uv, c = u^2 + v^2$ 产生了全部的素毕达哥拉斯数。

^① [美]理查德·曼凯维奇. 数学的故事. 冯速译. 海口:海南出版社,2002:12~13

然而,对于给定的正整数指数 $n > 2$, 方程 $a^n + b^n = c^n$ 能否有正整数解 a, b, c 呢? 费马提出了这样的问题, 并在古代数学家丢番图的手稿的空白边缘上写上了这样的评注: 对于任意的 $n > 2$, 方程 $a^n + b^n = c^n$ 在自然数中是不可解的。

1995 年, 普林斯顿大学的维尔斯 (Andrew Wiles) 在当代最权威的数学杂志普林斯顿的《数学年刊》上发表了 108 页的论文《模曲线与费马大定理》。经过 350 年的努力, 费马定理最终被维尔斯证明。

费马定理在数学上或许并不那么重要, 但是由于试图证明它却在数论中引出许多重要的发现。事实上, 关于费马定理的研究不仅促进了代数数论和算术代数几何的建立, 而且还发展了一系列先进的数学技术, 形成了现代数论无尽的前沿。^①

• 非欧几何是“自希腊时代以来, 数学中的一个重大的革新步骤”(M·克莱因), 它的诞生来自人们对欧氏第五公设的质疑。公元前 3 世纪, 古希腊数学家欧几里得完成了数学史上最光辉的著作《几何原本》。他把之前零碎的数学理论编为一个从基本假设到最复杂结论的整体结构, 数学由此成为基于定义、公理、公设而建立的逻辑体系。然而, 欧氏第五公设“如果一条直线与两条直线相交, 并且在同侧所交出的两角之和小于两个直角, 则这两条直线无限延长后必在该侧相交”却引发了数学家们 2000 多年的思考, 因为它不像其他公理那样显而易见, 甚至有些复杂。数学家们曾为此发出疑问: 第五公设是否独立于其他公理? 或者说, 它是否可以证明呢? 这种质疑以及数学家们在随后 2000 年所付出的努力, 催生了另一个与欧氏几何不同的几何体系——非欧几何, 从而引发了有关公理体系的探讨。

① 张顺燕. 数学的源与流. 北京: 高等教育出版社, 2000: 163 ~ 164



非欧几何的诞生,成为 19 世纪“最富有启发性和最值得注意的成就”(希尔伯特)。对大多数人来说,虽然这一几何体系非但不是“想象的”,而且简直是不可想象的和荒诞的,可是非欧几何后来成为广义相对论的基础之一。

• 希尔伯特 23 个数学问题。1900 年 8 月 8 日年仅 38 岁的希尔伯特在巴黎举行的第二次国际数学家大会上发表演说,提出了新的世纪面临到 23 个问题:

(1)证明“连续统假设”,即证明任一实数集或者能与自然数集建立一一对应,或者能与全体实数集建立一一对应。

(2)研究算术公理的相容性。

(3)两个等底等高的四面体的体积相等。

(4)直线作为两点间最短距离的问题。

(5)李(S. Lie)的连续群概念,不要定义群的函数的可微性假设。

(6)物理学的公理化。

(7)某些数的无理性和超越性。

(8)素数问题。

(9)在任意数域中证明最一般的互反律。

(10)丢番图方程的可解性。

(11)系数为任意代数数的二次型论。

(12)阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广。

(13)不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程。

(14)证明某类完全函数系的有限性。

(15)叔伯特(Schubert)计数演算的严格基础。

(16)代数曲线与代数曲面的拓扑问题。

(17)正定形式的平方和表示。

(18)用全等多面体构造空间。

(19)正则变分问题的解一定是解析的吗?

(20)一般边值问题。

(21) 具有给定单值群的线性微分方程解的存在性证明。

(22) 通过自守函数使解析关系单值化。

(23) 变分法进一步的发展。

这 23 个问题分属四个领域:1~6 是数学基础问题;7~12 是数论问题;13~18 属于代数和几何问题;19~23 属于数学分析。成为照耀 20 世纪数学前进的灯塔。^①

历史表明,数学发展虽然存在文化背景以及研究对象和研究方法的差异,但是,提出有意义的和有价值的数学问题却一直是数学家们的追求。

在 21 世纪的今天,数学家们或许已经无人能提出像希尔伯特那样具有全景式的数学问题,但是,在一定范围内提出有意义和价值的数学问题仍然是数学家们的一个努力方向和期盼。1997 年 6 月,美国数学家、菲尔兹奖(1966)获得者斯梅尔(S·Smale)在加拿大“菲尔兹数学研究所”作的题为“未来世纪的数学问题”的报告中,提出了“黎曼猜想”、“庞加莱猜想”、“ $P=NP?$ ”等 18 个问题。1998 年,我国数学家提出了“路径积分”、“朗兰兹猜想”、“球堆积问题”等 8 个数学问题(见《21 世纪的 100 个科学难题》,吉林人民出版社,1998。)。1999 年 6 月,美国国家科学院院士、普林斯顿高等研究院前院长格里菲斯(P·A·Griffiths)在华盛顿国家图书馆举行的“21 世纪的智力前沿”主题报告会上所作的“千年之交话数学”报告中,提出了几个 20 世纪留给 21 世纪的“最具挑战性的问题”。2000 年 5 月 24 日,为纪念希尔伯特在 1900 年巴黎国际数学家大会上发表提出了 23 个问题的讲演 100 周年,美国克莱茵数学促进会在巴黎法兰西学院宣布设立千年数学奖,对解决所设 7 个数学问题的每一个给予 100 万美元的奖金。

在众多数学问题中,黎曼猜想、庞加莱猜想和“ $P=NP?$ ”等问题成为 21 世纪数学家所面临和关注的数学问题(表 1-1)。

^① 张顺燕. 数学的源与流. 北京:高等教育出版社,2000:530~536



表 1-1

序号	问题	内容	备注
1	黎曼猜想	黎曼函数 $\zeta(s) = \text{Re}(s) > 1$ 的所有位于 $0 < \text{Re}(s) < 1$ 中的零点都集中在直线 $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 之上.	希尔伯特第 8 问题
2	庞加莱猜想	可定向的单连通的 3 维闭流形同胚于 3 维球面.	拓扑学
3	$P = NP?$	一个能行可计算的问题是否是一个有效的可计算的问题	计算机科学

——资料来源:孙宏安. 21 世纪的数学问题. 中学数学教学参考, 2002 (5):5

(二) 提出问题教学研究源探

数学的发展历史表明,“提出问题”既是解决数学问题的一种基本手段,也是一种相对独立的数学活动。由于提出问题在数学活动中具有重要的地位和作用,因此,许多杰出的数学家和数学教育家(如 Polya, 1945; Freudenthal, 1973)认为,提出问题应成为数学教育的重要组成部分。

1. 提出问题教学研究的缘起

自 20 世纪 80 年代以来,提出数学问题的教学研究开始引起国内外数学教育界的普遍关注。进一步分析和反思这一教育现象的产生,可以发现有以下两个方面的重要原因:

(1) 以“解决问题”为核心的数学教育改革运动的兴起

众所周知,数学的发展始于数学问题的提出,是一个由“提出问题”与“解决问题”不断交织的过程,因此,当 NCTM(全美数学教师联合会)在 20 世纪 80 年代初提出“解决问题”的口号,并在美国乃至世界掀起一场以“解决问题”为核心的数学教育改革运动以来,作为解决数学问题的一种手段,“提出问题”随之成为美国

等西方数学教育研究的关注对象。

到了80年代末,随着人们对“解决问题”的不断反思,“提出问题”教学研究开始走进课堂,成为数学教师和数学教育研究者共同关注的研究话题。然而,人们在反思“解决问题”的教学实践时发现,尽管数学教师将大量的精力投入到了“解决问题”教学中,但是他们“所关注的是解决一个给出的问题”,却“很少对有关数学问题的产生、表达和提出的知识获取过程给予直接的关注”。^①许多学者对此给予了极大的关注,同时也产生了深深的忧虑,认为这不仅影响了“解决问题”教学的有效实施,而且也制约了学生数学思维能力的发展。以至舍费尔德(1991)——美国“解决问题”的学术带头人之一——在反思十年来的“解决问题”教学实践后指出^②:“我所考虑的是,单纯的解决问题的思想过于狭窄了。我所希望的并非仅仅是教会我的学生解决问题——特别是由别人所提出的问题,而是帮助他们学会数学地思维。”

作为对“解决问题”教学反思的一种结果,NCTM在《学校数学课程与评价标准》(1989)、《数学教学的职业标准》(1991)等文件中对教师明确提出了增加“提出问题”活动的教学要求,即教师在课堂教学中不仅应让学生解决预先提出的数学问题,而且还应重视学生提出数学问题的活动。认为这既有助于学生数学洞察力的培养,也有利于学生对一些重要的数学概念和数学活动本质的理解。正如《数学教学的职业标准》所阐述的那样:应该给学生提供从已给情境中提出问题或通过改变已给问题的条件提出问题的机会。^③2000年,NCTM在《学校数学的原则与标准》中进一步阐述

① Gonzales, Nancy A. Problem formulation; Insights from student generated questions, School Science and Mathematics, 1996, 96(3): 152-157

② 郑毓信,宋唐秦. 创新与数学教育. 中学数学月刊, 2000(10): 1-3

③ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, Va.: NCTM, 1991. 95