21世纪高等院校教材

大学文科数学

（第二版）

张饴慈 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

大学文科数学

（第二版）

张饴慈　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是北京市教育委员会“高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革”项目的研究成果，是专为文、史、哲、政治、语言等专业本科生编写的一本数学教材. 全书共分4章，包括微积分大意、随机数学的基本思想、关于代数和几何的几个专题、无穷的比较. 根据文科的特点，书中突出对数学基本思想的理解，强调学生的数学思维训练，淡化形式计算，有利于提高文科学生数学知识水平.

本书可作为大学本科文、史、哲、政治、语言等专业的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/张饴慈编著. —2版. —北京：科学出版社，2008
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-020036-5

Ⅰ. 大… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第004565号

责任编辑：姚莉丽/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年7月第 二 版 印张：12
2008年7月第八次印刷 字数：218 000
印数：23 001—26 000

定价：21.00元

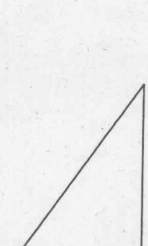
(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

序　一

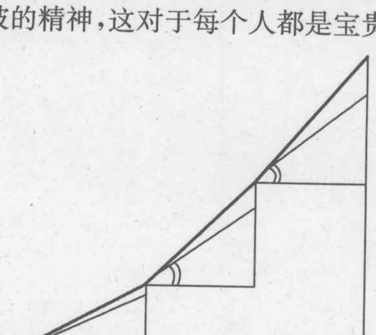
数学已经成为大学的公共课，是大学理性教育不可缺少的. 对于非理科学生，要开哪些数学课程，已达成共识的有微积分、线性代数和随机数学，该书也不例外地要讲这三方面的内容.

线性代数与中学内容相接近，无非是将中学的只有两三个变量的线性方程组推广到多个变量的线性方程组，而在计算机时代后者已越来越被需要. 对于文科学生来说，也许更重要的是从中能学到数学的研究方法，即那种由多到少、逐步降级的思想，以及在大规模问题中的规律程序化的重要性. 要学习这些思想和方法，数学是再好不过的示范.

然而，微积分的传统教学与中学有着很大距离. 许多中学生由于听说微积分具有无穷性而对大学理工科望而生畏，所以，微积分成为大学数学改革的重点. 笔者认为，造成大学和中学切开的教学方法应该改变，也就是说，大学教育必须重视与中学教育的衔接. 笔者的经验是：告诉学生，大学与中学的区别在于中学研究直的图形，而大学研究曲的图形. 可是，在曲的图形中取出一小段，在放大镜之下观察，又跟直的没有什么两样. 也就是说，在放大镜之下，大学就是中学. 于是，我们可以根据中学的经验，来做大学的事情. 在中学里，一个直角三角形的高可以通过底角的斜率和底边长求出来，如图(a)；在大学里，每一小段曲图形的高也可以通过这个小段底角的斜率和底边长求出来，大段曲图形的高是许许多多小段图形的高的叠加，如图(b). 这就是微积分基本定理的方法和结论. 笔者对微积分的这种经验，或直觉的、发明的观点，已被该书用来证明微积分基本定理. 从这种证明中，可以看到分而治之，化大为小，化难为易，各个击破的精神，这对于每个人都是宝贵的——每



图(a)



图(b)

个人不妨用这种精神来解剖自己所遇到的事物.

微积分很有用,连人口的增长也可以通过它来预报.社会生活中大量的随机现象(见该书第二章),也可以通过它来描述.

以上讲的线性代数和微积分,随机数学也在微积分中一带而过.

几何呢？数与形乃是数学大厦的两大基石,而且甚至形比数更是数学的基石.这是因为人类对于数经过了很长时间的训练,而对于形的认识则是本能具有的.大多数学生对几何比对代数有更深的印象,也就是这个道理.可是,中学几何尚未揭示几何最本质的东西,即几何只是一些公理的结论,公理变了结论也要变.而几何公理是人类生活空间的一种经验,未必经得起理性的推敲.例如平行公理,谁曾经对一条直线段做过无限延长的实验呢？该书第三章的非欧几何就要回答这个问题.结论是一个物理世界可以有三种不同的几何,从逻辑思维的观点,这三种几何同样合理.这个现象够刺激的——凡爱思考的人都会为它神魂颠倒.更重要的,非欧几何充分体现了人类的理性追求,而这是每个人都必须具备的品质.

数学太奇妙了,也太需要了.希望该教材能体现这些.

林　群

2001年春节于北京中关村

序　二

目前高等数学已成为大学文科学生的必修课，在大学文科学生的教育中起到越来越重要的作用. 因此编写一本符合文科需求，适应时代发展的好的文科高等数学教材，已成为一种时代的需求. 文科高等数学的编写开始于 20 世纪 90 年代初. 最初的一些教材多是理科教材的删繁就简，与文科的实际要求相距甚远. 近几年来，情况发生了令人鼓舞的变化，大家逐渐认识到，从本质上讲，对文、史、哲类大学生的数学教育不是技术教育，而是一种素质教育，至少目前阶段是如此. 因此在内容编写上应当淡化细节，强调思想. 最近陆续出版了一些新的文科高等数学教材，很有新意，令人高兴. 张饴慈先生编写的《大学文科数学》就是其中突出的一本.

该书最为精彩的部分是概率论与数理统计，在目前已出版的文科高等数学教材中，这部分是写得最好的. 篇幅虽不大，但把要讲的基本问题都讲清楚了. 该书重点放在阐明思想，而不在于公式的推导. 对照目前许多数学教科书，多是从公式到公式，很少讲到思想性，结果学生学不到实质性的东西，课一结束就忘了.

在微积分部分，将积分学放在前面，这种处理方法是可取的. 但大部分微积分教材都不是这种处理方式. 西方分析学的权威 R. 柯朗(Richard Courant)在他的巨著《微积分和数学分析引论》一书中就采用了这种处理方式. 这种安排易于被学生所接受，因为积分学是静态的，比微分学的概念好理解，又与历史的发展顺序相符合. 微分学的概念是动态的和瞬间的，瞬间的概念涉及两个无穷小量比的极限概念，更难于理解. 在学生有了较高的数学素养，对极限概念有了更深的理解后，再引入，较为适当. 此外，虽然微分学的概念只涉及瞬间的事情，但数学家心中想的却是“以暂定久，以瞬入常”，他们的野心是刻画整个运动过程，理解到这一点需要花时间.

总之，我觉得该书很有新意，对加强大学文科学生的数学素质教育很有助益. 美中不足者，全书各章未能做到首尾如一. 是为序.

张顺燕

于北京大学燕北园

第二版前言

很高兴《大学文科数学》能得到一些学校的欢迎.我们的教材和传统的教材有所不同.但是,当初我们只是有一些想法,还没有经过教学实践;由于时间匆忙,有些想法也没有落实到教学之中.现在,本书出版已经有 6 年了,科学出版社希望作者能进行修订改版.这给了我们更好地落实自己想法的机会.

不幸的是,我们四个作者之中,王汇淳老师已经过世;而都长清老师又体弱多病;焦宝聪老师除了教学、科研外,还有繁重的行政工作.我们再也无法合作讨论了.因此,修改的任务就只能由我一个人来完成了.由于现在的这个第二版,只能代表我个人的意见,我决定改写部分内容.无论在内容的取舍上还是结构上,都作了根本的改变.

这本教材保留了原书中的三章内容:第一章微积分大意,第二章概率统计初步和第五章无穷的比较(第五章在本书中变成第四章).也保留了原书中前言的大部分,因为这个前言很好地说明了我对文、史、哲这类学生学习数学的看法.即他们为什么还要学一些数学、应该学什么样的数学等.原书中林群院士和张顺燕教授的序言主要是针对该书的第一章和第二章,由于这两章基本没变,因此,这两个序言也保留了.

我把有关代数、几何、数学应用的内容删去,重写了一章,即第三章代数和几何的几个专题.之所以如此,主要是:

我想对文、史、哲类的学生,更强调数学的思想,而减少技术与操作方面的东西.更多地让他们了解数学的思想、方法在人类思想史中的地位;体会数学在人类文明进步中的作用.

因此,我想选几个特殊的专题,用它们来体现我的意图.这些专题既不能超出学生能够接受的水平,又要能多少反映出某些近现代数学的重要思想.专题的选择有很大的任意性,我只能根据自己有限的理解和水平来决定.比如,为了说明代数是研究运算体系及其性质的一门学科,用“对称与群”是很不错的一个专题,但考虑到篇幅和难度,我选择了“布尔代数”.

又比如数学的应用问题,虽然应该让学生了解数学的应用在大千世界中无处不在,正如著名数学家华罗庚所说,宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在,凡是出现“量”的地方就少不了数学.但对文、史、哲类的学生,我更希望他们了解数学思想在人类文明中的作用.加上篇幅有限,我就把应用融于各个专题之中.比如,在“数学与密码”一节中,我更看重各种

密码体制的思想，而不是具体密码的构造. 在“布尔代数”中，虽然我讨论了布尔代数在设计开关电路中的实际应用，但我更看重，确定布尔函数时用插值法体现出的那种通性通法，看重它的思想作用；其中最为看重的是，从具体的开关电路、命题演算抽象出布尔代数，又能把它应用于其他领域的这种最一般的思想和能力；希望学生由此能初步体会抽象代数体系的作用和意义.

这里的几个专题大都是关于代数的，几何只有一节. 矩阵一节虽然涉及几何，但主要也是关于代数的. 由于想减少技术与操作方面的东西，有时会缺乏必要的练习. 例如，几何的那一节，对学生来说，有些像数学史讲座. 但它给出了更多地哲学和历史的思考.

原来的三章基本没变，只是原书第一章第 6 节“数学命题”中有问题. “命题”应该是能判断真假的，但原书中却大量出现不能判断真假的语句. 这是极不应有的错误. 原书中的“否命题”，在一般的数学书中应该叫“非命题”或命题的否定. 这都应该改正. 由于这一节还很受一些读者欢迎，我只是把这节中的“命题”一词改为“语句”，使这一节尽量不出现“命题”一词，其他没有太大变化.

本书和传统的教材有很大的不同，即使是矩阵，其讲法也和传统的教材不同. 何况像三等分任意角、密码、布尔代数等，通常都不会在大学文科数学教材中这样出现. 不少人认为这些内容比较高深，理科学生都不易接受，根本无法给文科学生讲授. 这里关键的问题是如何讲. 能不能抛开技术上的细节，直达数学的本质. 作者受著名数学家柯朗《什么是数学》一书的启发，又通过参加《高中数学课程标准》(实验稿)的制定和实验，曾经对一些高中学生和教师按这里的写法讲授这些内容，讲授的效果大大鼓舞了我写本书的信心.

感谢本书第一版的作者和帮助过本书出版的朋友. 缺点和问题肯定存在，欢迎批评意见.

张饴慈

2007 年 3 月 10 日

第一版前言

这是为大学文、史、哲、政治、语言等专业学生而编写的数学教材. 社会科学中其他一些学科，如经济、社会、教育、心理、管理等，由于所需数学知识较多，这些专业的学生应选择其他的教材.

目前许多大学都开设了文科高等数学课. 一个大学生在中小学已学过 12 年的数学，数学教育是他所受的最多的教育（和本国的语文教育时间一样长）. 那么，为什么到了大学还要学习数学？特别是对文、史、哲等专业的学生，希望他们学习数学的目的何在？

大家知道，数学的应用近几十年来已经发生了根本的变化. 数学已深入到几乎所有的领域.“高科技本质上是数学”这句话已经越来越得到人们的认同. 正如 A. N. Rao 指出的：“一个国家的科学的进步可以用它消耗的数学来衡量.”

特别需要指出的是，数学的思想和方法对社会科学已产生巨大影响，在许多方面，数学已不再是一个辅助性工具，而成为解决问题的关键所在. 著名数学家 A. Kaplan 指出：“由于最近 20 年的进步，社会科学的许多重要领域已经发展到使不懂数学的人望尘莫及的阶段.”

当前，在语言、历史这样的学科中，也产生了像“数理语言学”、“计量史学”等以数学为工具研究语言、历史的新学科. 数学已成为这些学科中有机的一部分，不学习数学就无法对该学科有真正的理解.

但是，数学除了是科学的工具和语言外，还是一种十分重要的思维方式与文化精神. 美国国家研究委员会在一份题为《人人关心数学教育的未来》的研究报告中指出：“除了定理和理论外，数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断以及运用符号等. 它们是普遍适用的、强有力的思考方式. 应用这些数学思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代里日益重要的一种智力. 它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探索偏见，能估计风险，能提出变通办法. 数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.”

可以说，正是在这个意义上，联合国教科文组织把 2000 年定为“世界数学年”，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙.”

对文、史、哲等专业的学生，我们强调的将不是数学方法的应用，而是对数学作为一种文化精神、思维方式的认识，特别是对贯穿于数学学科中的那种无与伦比的理性精神的认识.

人们都知道，数学追求一种完美的理性认识，要求研究的对象有确切无误的刻画，从简单而明确的命题出发，以准确而令人信服的逻辑推理达到其明确的结论. 数学追求的是一种理性精神，追求的是真、善、美.

F. Klein 指出：“正是这种精神使得人类的思维得以运用到最完善的程度，亦正是这种精神试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活，试图回答有关人类自身存在的问题.”

同样，数学对社会科学产生的影响也决不仅仅是一些数学方法在这些学科的具体应用. 更重要的是，数学的思维方式使得在社会科学的研究中，对基本概念和关键词的确立，课题的论证和表述，以及研究结果的检验与评价，都更加科学、严谨而令人信服.

因此，我们对这本教材有如下一些想法.

首先，这本教材不应是理工科或经济类高等数学教材的删繁就简. 因为，上述教材大多侧重于数学方法的应用，更多强调的是数学的工具性. 许多计算公式、运算方法要求学生熟练掌握，而这对文、史、哲等专业的学生是完全不必要的.

但是，从另一方面讲，这本教材也不能变成只讲数学“思想”而不涉及数学具体内容的科普读物. 事实上，要想使学生在数学的思维方式上有所体会和提高，必须要接触数学的内容，必须要“做”数学，要思考，要分析，不能偷懒图轻松，不做练习.

我们认为，这类理想的教材，是由一个个专题组成的(而不必限于目前高等数学中的微积分、线性代数、概率统计三部分). 每个专题独立成篇，有深刻的思想(最好能反映数学史上重大变革的思想)而无需过多的预备知识. 教师可根据学生的具体情况及学时的多少，自由地选择一些专题来讲授，不必在乎知识的系统性，而要使学生在数学的思维方式上有所收获.

现代教育要求提高学生的素质，其中非常重要的就是学生的数学素质，即学会数学的思维方式、理解数学的真善美、并会把所学的数学知识应用于自己的专业和日常生活. 鉴于目前在中小学中存在片面追求升学率等问题，学生在中学数学学习中，过多的是解题训练，而缺乏真正的理解，这就使得目前大学的数学学习特别显得必要. 对文、史、哲等专业的学生来说，他们今后也许不会再接触数学. 但是，上大学后，在没有了考试、升学的压力下，学生能以平和的心态来理解数学的思想和实质无疑会对他们有很大的好处.

但是，由于我们的水平有限，加上时间过于仓促，只编写了微积分大意、随机数学的基本思想、线性代数、几何、无穷的比较、应用举例等六章内容，离我们的设想相差甚远. 像图论、差分、算法、尺规三等分角，甚至经济上的独裁定理等都是很好的题材，经过改造应该可以编入教材. * 包括的内容仅供读者选用.

和目前已出版的文科高等数学教材相比，本教材有较大的不同. 例如，在概率统计部分，我们避开了事件的关系与运算、古典概率、公理化、条件概率等一系列问

题，只突出了“分布完全描述了随机现象的规律”这一基本思想，并着重讲解分布的作用和应用问题，我们强调问题的提法和描述（如参数估计、假设检验等）而略去了细节. 又如在微积分部分，借助直观用极限直接讨论导数和积分，而略去了函数连续性等预备知识，只要求学生会求最简单的积分和导数，目的是为了加深对概念的理解. 但为了加强学生数学思维的训练，我们更多地强调了建立严格理论的必要性，并对数列极限的定义作了比一般理工科教材稍多的讨论. 另外，还结合文科特点，专门用一节讨论了命题与否定命题以及命题的充要条件（这是中学内容的推广）.

更多的改变不可能在这里一一详叙. 尽管我们曾用其中的部分内容对学生讲授过，但也许我们的观点太偏激了，问题肯定不少. 如果本教材的某些编写想法能在今后文科教材的编写中，起到抛砖引玉的作用，我们就十分满足了. 教师在使用本书时，可按课时和听课对象，选择若干章节讲授.

作　者

2001 年 1 月于首都师范大学

目　　录

第一章 微积分大意

这里介绍微积分的基本思想，它的讨论主要基于人们的直观（§1～§4）. 在§5会对其理论基础作些分析，给出数列极限的定义. 读者要能熟练地应用和计算，还需去读专门的微积分教材. §6讨论的问题与微积分的关系不大，不过，了解这部分内容，对文科学生是有益的.

§1 极 限

一、数列的极限

下面是一些数列的例子：

(1) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$;

(2) $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$;

(3) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$;

(4) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots$;

(5) $1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$;

(6) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$.

一般地，数列记为 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，或简记为 $\{a_n\}$.

人们关心当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 变化的趋势. 今后用 $n\to\infty$ 表示"n 无限增大". 从上面给出的一些数列可以发现，当 $n\to\infty$ 时，它们的变化有不同的特点. 其中有些数列，如数列(3)，(4)，(5)，当 $n\to\infty$ 时，a_n 与某个常数 A 无限接近. 数列(3)，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=\frac{1}{2^n}$ 与 $A=0$ 无限接近；数列(4)，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 也与 0 无限接近；而数列(5)，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ 和 $A=1$ 无限接近. 数列(1)，(2)，(6)则没有上述性质. 数列(1)，(2)，当 $n\to\infty$ 时，a_n 无限增大；而数列(6)，当 $n\to\infty$ 时，a_n 在 1 和 -1 之间不停地"摆动".

若一个数列 $\{a_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，a_n 与某个常数 A 无限接近，则称这数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限或 $\{a_n\}$ 收敛到 A. 记作

$$a_n\to A\quad(n\to\infty)\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

因此，对数列(3)，(4)，(5)有

$$\frac{1}{2^n}\to 0\quad (n\to\infty)\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}\to 0\quad (n\to\infty)\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0,$$

$$\frac{n-1}{n}\to 1\quad (n\to\infty)\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1.$$

数列(1)，(2)，(6)不存在极限，称这样的数列为发散的.

练习 1

你能看出下列哪些数列是收敛的，哪些数列是发散的吗？对收敛的数列指出其极限.

(1) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{2n-1},\cdots$;

(2) $\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\cdots,\left(\frac{2}{3}\right)^n,\cdots$;

(3) $\frac{3}{2},\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{3}{2}\right)^3,\cdots,\left(\frac{3}{2}\right)^n,\cdots$;

(4) $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$;

(5) $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{4},0,\cdots$;

(6) $3-\frac{1}{2},3-\frac{1}{2},3+\frac{1}{3},3+\frac{1}{3},3-\frac{1}{4},3-\frac{1}{4},3+\frac{1}{5},3+\frac{1}{5},\cdots$;

(7) $\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},1,\frac{3}{4},1,\frac{4}{5},1,\cdots$;

(8) $\lg\left(2+\frac{1}{2}\right),\lg\left(2-\frac{1}{3}\right),\lg\left(2+\frac{1}{4}\right),\lg\left(2-\frac{1}{5}\right),\cdots$;

(9) $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right),\cdots$;

(10) $\frac{1}{2},0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},0,-\frac{1}{5},0,\cdots$.

二、函数的极限

类似于数列的极限，也可以考虑当自变量 x 无限增大时，函数 $y=f(x)$ 的极限问题.

例如，对函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$. 当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)=1+\frac{1}{x}$ 和常数 $A=1$ 无

限接近. 我们称，当 x 趋于无穷(记为 $x\to\infty$)时，$f(x)=1+\frac{1}{x}$ 以 1 为极限，或 $f(x)=1+\frac{1}{x}$ 收敛到 1. 记为

$$1+\frac{1}{x}\to 1\quad (x\to\infty)\quad \text{或}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

一般地，若 $|x|$ 无限增大时，$y=f(x)$ 与某个常数 A 无限接近，则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 收敛到 A. 记作

$$f(x)\to A\quad (x\to\infty)\quad \text{或}\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=x^2$ 无限增大，不存在极限，即 $x\to\infty$ 时，$y=x^2$ 是发散的. 对函数 $y=\sin x$，不难看出，当 $x\to\infty$ 时，y 的值在 $+1$ 和 -1 之间来回“摆动”，不存在极限，也是发散的.（在微积分中，我们规定三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等的自变量 x 的单位均采用弧度制，即用 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \cdots$ 表示 $60°, 90°, \cdots$）

对于函数 $y=f(x)$，不仅可以考虑 $x\to\infty$ 时，$y=f(x)$ 的变化趋势，也可以考虑当自变量 x 无限接近某个常数 a 时，$f(x)$ 的变化趋势. 例如，当 x 无限接近常数 2 时，$f(x)=\sqrt{x}$ 将无限接近 $\sqrt{2}$. 这一结果记为

$$\sqrt{x}\to\sqrt{2}\quad (x\to 2)\quad \text{或}\quad \lim_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2},$$

称当 x 趋于 2 时，$\sqrt{x}$ 收敛到 $\sqrt{2}$，或以 $\sqrt{2}$ 为极限. 类似地，当 x 无限接近 0 时，$y=\sin x$ 将收敛到 $\sin 0=0$，有

$$\sin x\to 0\quad (x\to 0)\quad \text{或}\quad \lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

一般地，对给定的函数 $y=f(x)$，当自变量 x 无限接近某个常数 a 时，如果 $f(x)$ 会无限接近一个常数 A，那么称 x 趋于 a 时，$f(x)$ 以 A 为极限或 $f(x)$ 收敛到 A. 记为

$$f(x)\to A\quad (x\to a)\quad \text{或}\quad \lim_{x\to a}f(x)=A.$$

若 $x\to a$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是发散的. 例如，$x\to 0$ 时，$1+\frac{1}{x}$ 的极限不存在，是发散的.

当 $f(x)$ 恒为一常数 c，即对任意的 x，$f(x)=c$. 此时，不难看出 $\lim\limits_{x\to\infty}c=c$，$\lim\limits_{x\to a}c=c$.

练习 2

1. 当 $x\to\infty$ 时，你能看出下列函数哪些是收敛的吗？试指出收敛的极限.

(1) $1+\frac{1}{x^3}$；　(2) $\cos x$；　(3) $\frac{1}{3+x^2}$；

(4) $3-2x^2$； (5) $\lg(3+x^2)$； (6) $\dfrac{2x^2-1}{x^2}$.

2. 当 $x\to 0$ 时，你能看出下列函数哪些是收敛的吗？试指出收敛的极限.

(1) $\cos x$； (2) $\dfrac{1}{3+x^2}$； (3) $\lg(3+x^2)$；

(4) $\dfrac{2x^2-1}{x^2}$； (5) $\dfrac{x-1}{x^2}$； (6) 2^x.

3. 试写出下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{1+x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}3^x$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\lg(2+x^2)$.

三、极限的性质与运算

并不是所有的极限，从直观上都是容易看出来的. 考虑下面一些例子(以下称为问题)：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$.

我们的问题是：这些极限存在吗？如果极限存在，它们等于什么？

人们常常以为数学只是计算和逻辑推理，只是一个个定理的证明. 其实不然，像“$x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 等于什么？”这类问题，不是靠逻辑推理推出来的. 它依赖于人们的直觉、经验与猜想，依赖于试验，需要探索与发现. 例如，对前面的问题(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$，人们通过计算发现

$$\sqrt{2}\approx 1.414\,2,\quad \sqrt[5]{5}\approx 1.379\,1,\quad \sqrt[10]{10}\approx 1.258\,9,$$
$$\sqrt[100]{100}\approx 1.047\,1,\quad \sqrt[1000]{1000}\approx 1.006\,9,\quad \sqrt[10000]{10000}\approx 1.000\,9.$$

可以猜测应该有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 类似地，对于问题(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$，计算表明：

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$\sin x$	0.891 5	0.479 5	0.099 8	0.049 98	0.009 999 8	0.004 999 9	0.001 000

由此看来，$x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 应趋于 1.

但是，数学不能仅仅靠猜测和直觉，还需要证明这些猜测是正确的. 因为，一方

面，直觉与经验可能会是错误的(见§5)；另一方面，更重要的是，直觉与经验有时很难说清问题.例如，当极限值是一个无理数，像π，$\sqrt{2}$等，是一个无限不循环小数，直觉是很难把握它的.事实上，只有“证明”才能把问题“说清楚”.逻辑结构的作用在于它能揭露出问题的实质与内在联系，使之更好地推广与应用.关于这方面的讨论将在§5中进行.在这一节，仍是利用人们的直观给出一些极限的性质并利用这些性质来分析和计算极限，包括前面的问题(1)，(2)，(4)(问题(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$将放在§5中讨论).

若数列$\{a_n\}$以A为极限，则当$n\to\infty$时，a_n将无限接近A.但接近的方式可以很不同.例如，数列

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$$

以0为极限，但却以“在0左右跳动”的方式趋于0.而数列

$$1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\cdots$$

也以0为极限，它却不断地到达0，又不断地离开.在各种不同的方式中，最简单的是$\{a_n\}$递增地趋于A，或递减地趋于A.数列$\{a_n\}$递增是指，对一切n有$a_n\leqslant a_{n+1}$；递减是指，对一切n有$a_n\geqslant a_{n+1}$.不难看出，数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,$$

$$\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^3,\left(\frac{1}{2}\right)^4,\cdots$$

都是递减数列，它们的极限是0.数列

$$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$$

是递增的数列，它的极限是0.而数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

是递增数列，它的极限是1，数列

$$1,1,1,\cdots$$

既是递增数列，又是递减数列，它的极限是1.

一个递增的数列不一定有极限.例如，数列1,2,3,…是递增的，当$n\to\infty$时，a_n无限增大，极限不存在.递减的数列，其情形是类似的.为简单计，下面只讨论递增数列.

若递增数列$\{a_n\}$有极限A，此时，不难看出，对一切n有$a_n\leqslant A$.例如，数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$是递增的，极限为1.我们有$\frac{n-1}{n}\leqslant 1$.