实用Fourier变换及C++实现

孙鹤泉 编著

科学出版社
www.sciencep.com

实用 Fourier 变换及 C++ 实现

孙鹤泉　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了与Fourier变换理论相关的应用技术和实现方法。首先介绍了连续Fourier变换和离散Fourier变换的定义与性质、由离散引起的频谱混叠和渗漏及处理方法；并以此为基础，介绍了频谱计算、谐波分析、卷积计算、互相关分析等常用技术的实现方法和具体应用；并在进一步介绍Hartley变换、正弦变换、余弦变换的基础上，详细讨论了时频分析、求解Poisson方程、求解扩散方程、基于各向异性扩散方程的图像分割等算法及应用。本书附带光盘提供了完整的C++源代码与程序调用示例。

本书可作为理工科的高年级本科生、研究生的教材或参考书，也能够为工程技术人员提供有益的参考。

图书在版编目(CIP)数据

实用Fourier变换及C++实现/孙鹤泉编著. —北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-023285-4

Ⅰ.实… Ⅱ.孙… Ⅲ.①傅里叶变换 ②C语言-程序设计 Ⅳ.O174.22 TP312

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第169032号

责任编辑：任 静 王志欣 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵 博 / 封面设计：高海英

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年1月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1—3 000 字数：364 000

定价：48.00元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前 言

Fourier 变换的基本思想首先由法国科学家 Joseph Fourier 在 19 世纪初提出，并以此命名。时至今日，Fourier 变换理论已有约 200 年的历史，得到了很好的完善与发展。Fourier 变换实际上是一种谐波分析方法，能够把时域的信号分解成频域的幅值分量和频率分量，可以简化时域中的运算，已经成为科学研究与工程应用中不可或缺的一项重要工具，在许多科研领域中发挥着非常重要的作用，目前在物理学、数论、组合数学、信号（图像）处理、概率论、统计学、密码学、光学、声学、海洋学科、结构动力学、生物医学等领域都有着广泛的应用。

作者从攻读研究生期间开始使用 Fourier 变换，在不断熟悉和使用 Fourier 变换的过程中，发现不少的学者对它的认识存在偏差；同时也发现多数的参考书只关注理论，而忽略工程实用性，使作者有了撰写本书的想法。

本书从实用性角度出发，介绍了基于 Fourier 变换的多种应用、C＋＋代码和对应的调用程序示例，其中包括频谱分析、Hilbert 变换、卷积计算、相关分析、时频分析、求解偏微分方程等许多方面，同时介绍了计算连续 Fourier 变换等方法和作者的一些心得和积累。Fourier 变换是工程技术人员使用最多的一种信号处理工具，同时也是被误用最多的一种数学工具，希望本书的出版，能够为刚刚开始在科研工作中使用 Fourier 变换的读者们提供一定的帮助。

本书的第 1 章和第 2 章详细介绍了连续 Fourier 变换和离散 Fourier 变换的定义和特性，使得读者能够对 Fourier 变换有较为系统的认识；在第 3 章中，作者为读者提供了实现快速 Fourier 变换的 C＋＋代码，方便在后续章节中调用；在第 4 章中，向读者介绍了频谱和滤波的计算理论和 C＋＋代码实现；在第 5 章中，提供了一种对谐波信号长度进行优化选择的方法和实现代码，可以获得很好的频谱计算结果，并为读者介绍了 HRFT 算法和 C＋＋的实现代码；在第 6 章和第 7 章中，介绍了窗函数和 Hilbert 变换的相关理论和 C＋＋实现代码；在第 8 章中，介绍了一维和二维空间中的卷积运算和实现代码，同时也介绍了解卷积的一些算法和代码；在第 9 章中，详细介绍了一、二维空间中的互相关分析算法和代码实现，包括相位互相关算法，同时也为读者提供了流场测量技术——PIV 技术的原理和基本的分析代码；在第 10 章中，介绍了一种与 Fourier 变换相类似的 Hartley 变

换，采用快速 Hartley 变换可以获得更高的计算效率；在第 11 章中，简单介绍了时频分析理论，并为读者提供了诸如短时 Fourier 变换和 Wigner 分布等算法的 C++代码；在第 12 章和第 13 章中，介绍了利用 Fourier 变换、正弦变换和余弦变换求解 Poisson 方程和扩散方程的方法以及相应的 C++代码。

本书中介绍的源代码大多以模板类的形式出现，但也为读者提供了静态链接库形式的源代码，所有程序都可以在 Visual Studio 6.0 下编译。使用本书提供的程序代码的读者需要具备一定的 C 语言和 C++编程的基础知识，至少能够编写简单的程序。对 Fourier 变换理论有一定了解的读者，可以参考书中的介绍，直接阅读和调用本书提供的源代码。

作者在编写此书的过程中，得到了家人的理解和支持，同时得到了中山大学理工学院陈树辉、詹杰民、叶贤基、林刚等多位老师的帮助，在此表示深深的感谢。还要感谢海军大连舰艇学院的张永刚、骆永军、姚忠山等同事和各级领导的大力帮助与支持。本书的出版得到了国家自然科学基金重大研究计划项目(90815024)与国家自然科学基金青年科学基金项目(50808032)的资助。

由于作者的理论水平和科研积累有限，书中难免存在不足之处，望广大读者批评指正。

目　　录

第 1 章　连续 Fourier 变换

本章与第 2 章中介绍的大部分内容是 Fourier 变换的基础知识，读者可以在各种介绍 Fourier 变换、信号与系统和信号处理的科技书刊中阅读到相似内容。为了本书的完整性，笔者仍需要在这两章中进行一些介绍和说明。在介绍这些基础知识的同时，笔者也在书中增加了一些自己的心得体会，提出了 Fourier 变换中的一些常见而又容易被忽略的问题。如果读者对 Fourier 变换已经非常了解，只需对本章和第 2 章的内容进行简单地阅读。

1.1　Fourier 级数

在介绍 Fourier 变换之前，读者需要首先知道与 Fourier 级数有关的概念，而 Fourier 级数又与正交函数的概念密切相关，本节首先对这些基本数学概念进行简单介绍。

1.1.1　正交函数

对于任意两个时间函数 $x(t)$ 与 $g(t)$，如果二者满足公式(1-1)，就称函数 $x(t)$ 和 $g(t)$ 在区间 (t_1,t_2) 上是正交的。公式(1-1)中的函数 $x(t)$ 与 $g(t)$ 可以是实值函数，也可以是复值函数；定义域区间可以是开区间 (t_1,t_2)，也可以是闭区间 $[t_1,t_2]$ 或半闭区间 $[t_1,t_2)$、$(t_1,t_2]$，在本书中只以开区间为例进行介绍。

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{1-1}$$

其中，$\overline{g(t)}$ 是 $g(t)$ 的共轭函数。

在区间 (t_1,t_2) 上，N 个（N 可为无穷大）互相正交的函数 $g_1(t),g_2(t),\cdots,g_N(t)$ 构成了一个正交函数集 $\{g_n(t)\}_{n=1,\cdots,N}$，如果这个区间上定义的任意函数 $x(t)$ 都能够表示成公式(1-2)所示的正交函数集的线性组合，那么，正交函数集 $\{g_n(t)\}_{n=1,\cdots,N}$ 就是一个完备的正交函数集。

$$x(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_N g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t) \tag{1-2}$$

即使函数集 $\{g_n(t)\}_{n=1,\cdots,N}$ 的各成员函数不是相互正交的，只要各成员函数之间的关系是冗余的，就能够形成一个函数框架，也可以用它来表示定义区间上的任意函数，而且表达形式与公式(1-2)相同。

公式(1-3)列出了公式(1-2)中各分量的加权系数 c_n 的计算公式：

$$c_n=\frac{\int_{t_1}^{t_2}x(t)\,\overline{g_n(t)}\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}g_n(t)\,\overline{g_n(t)}\mathrm{d}t} \tag{1-3}$$

完备正交函数集的作用主要体现在两个方面：①如果 $\{g_n(t)\}_{n=1,\cdots,N}$ 是完备正交函数集，那么展开系数 c_n 就是信号在基函数 $g_n(t)$ 上的投影，显然，c_n 越大，原函数 $x(t)$ 与基函数 $g_n(t)$ 就越相似；②借助完备正交函数集进行函数展开后，利用展开系数可以简化计算，而且展开系数也能够描述信号的本质属性。

正弦函数族 $\sin(2\pi nft)$ 和余弦函数族 $\cos(2\pi nft)$ 在时间长度为一个基波周期的区间 $(t-T/2,t+T/2)$ 上满足公式(1-4)，其中，$T=1/f$。

$$\begin{cases}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\sin(2\pi nft)\sin(2\pi mft)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{T}{2}, & n=m\end{cases}\\ \int_{t-T/2}^{t+T/2}\cos(2\pi nft)\cos(2\pi mft)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{T}{2}, & n=m\end{cases}\\ \int_{t-T/2}^{t+T/2}\sin(2\pi nft)\cos(2\pi mft)\mathrm{d}t=0, \quad m,n=0,1,\cdots,\infty\end{cases} \tag{1-4}$$

当 $n\to\infty$ 时，不同频率的正弦函数和余弦函数在区间 $(t-T/2,t+T/2)$ 上构成了完备的正交函数集。

作为 Fourier 变换、正弦变换、余弦变换的核函数，正交的三角函数集是当前最常用的一种完备正交函数集

$$\begin{cases}1,\cos(2\pi ft),\cos(4\pi ft),\cdots,\cos(2\pi nft),\cdots\\ 0,\sin(2\pi ft),\sin(4\pi ft),\cdots,\sin(2\pi nft),\cdots\end{cases} \tag{1-5}$$

以欧拉函数的形式写出公式(1-5)对应的指数函数形式：$\{e^{j2\pi nft}\}_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}$，该函数集合在区间 $(t-T/2,t+T/2)$ 上也是一组完备的正交函数集。

1.1.2 Fourier 级数

根据上面介绍的正交函数理论，可以用正弦函数和余弦函数的线性组合表示区间 $(t-T/2,t+T/2)$ 上的任意周期为 T 的一个函数 $x(t)$，也就是将周期函数 $x(t)$ 在它的一个周期区间 $(t-T/2,t+T/2)$ 上以正弦函数和余弦函数的形式进行 Fourier 级数展开。

$$\begin{aligned}x(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(2\pi nf_1t)+b_n\sin(2\pi nf_1t)\\ &=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2\pi nf_1t)+b_n\sin(2\pi nf_1t)\end{aligned} \tag{1-6}$$

其中，$f_1=1/T$ 是基波频率，也称为基频。

根据公式(1-3)，在公式(1-6)中出现的各分量系数 a_n、b_n 可以通过公式(1-7)来计算：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\displaystyle\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(t)\cos(2\pi n f_1 t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{t-T/2}^{t+T/2} \cos^2(2\pi n f_1 t)\,\mathrm{d}t} \\ b_n = \dfrac{\displaystyle\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(t)\sin(2\pi n f_1 t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{t-T/2}^{t+T/2} \sin^2(2\pi n f_1 t)\,\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-7}$$

一般情况下，可以取 $t=0$ 来计算 Fourier 级数在区间$(-T/2,T/2)$上的分量系数，即

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t, \quad b_0 = 0, \quad n=0 \\ \left.\begin{aligned} a_n &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(2\pi n f_1 t)\,\mathrm{d}t \\ b_n &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(2\pi n f_1 t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right., \quad n\neq 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

其中，a_0 对应的是函数中的直流分量。

公式(1-6)中的 Fourier 级数展开式成立的条件是周期函数 $x(t)$ 应满足 Dirichlet 条件：①周期函数 $x(t)$ 在一个周期内绝对可积，即满足不等式 $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$；②周期函数 $x(t)$ 在一个周期内只存在有限个极值点和有限个第一类间断点，不存在取值为无限的间断点，即在间断点处存在左极限 $x_-(t)$ 和右极限 $x_+(t)$，而在其余各点上是连续的，这时，函数 $x(t)$ 的 Fourier 级数展开式的计算结果为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(2\pi n f_1 t)+b_n\sin(2\pi n f_1 t)=\begin{cases} x(t), & \text{连续点} \\ \dfrac{x_+(t)+x_-(t)}{2}, & \text{间断点} \end{cases} \tag{1-9}$$

在实际计算 Fourier 级数过程中，n 的上限取值是有限的，不可能为无穷大，公式(1-6)只能作为周期函数 $x(t)$ 的一种近似逼近，计算结果会出现 2.2.5 节中介绍的 Gibbs 效应。如果采用公式(1-8)中的分量系数，即在区间$(-T/2,T/2)$上进行 Fourier 级数展开，能够获得均方误差最小的逼近结果。

如果将非周期函数的周期视为无穷大，同时采用正弦和余弦函数的指数形式 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nft}\}_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ 来计算非周期函数的 Fourier 级数，就可以从 Fourier 级数的计算过程中推导出下面即将介绍的连续 Fourier 变换，读者可以查阅其他文献或自己尝试着推导一下，附录 B.1 中提供了详细的推导过程，此处不再复述。

1.2　连续 Fourier 变换

1.2.1　定义

当函数 $x(t)$ 在实数范围内有定义，同时还满足 Dirichlet 条件：①单值函数，函数值可以是复值；②在定义域内只存在有限个极大值或极小值，或是在任一有限的间隔 $(-T/2, T/2)$ 内分段光滑；③不含无穷型间断点；④只包含有限个有限型间断点，而且绝对可积，$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty$。那么函数 $x(t)$ 的 Fourier 变换存在，其定义如下：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft} \mathrm{d}t \tag{1-10}$$

其中，$\mathrm{j}^2 = -1$。

在上面公式中，$X(f)$ 是一个复值函数，由实部和虚部构成，以频率 f 为自变量（单位为 Hz），称 $X(f)$ 为 $x(t)$ 的频谱函数，并满足 $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{d}t$。

作为一个复值函数，可以把 $X(f)$ 分解为实部与虚部两部分，也可以表示为体现振幅与相位的欧拉函数形式

$$X(f) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{jIm}(f) = | X(f) | \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(f)} \tag{1-11}$$

其中，$| X(f) | = \sqrt{\mathrm{Re}^2(f) + \mathrm{Im}^2(f)}$，$| X(f) |^2$ 就是平时所说的能量谱；$\tan[\varphi(f)] = \dfrac{\mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Re}(f)}$，在一些文献中称为相位谱。

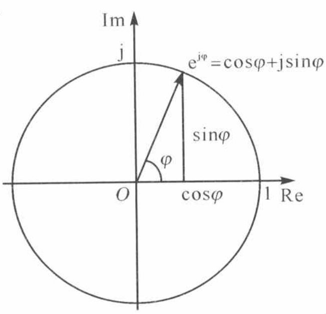

图 1-1　欧拉函数示意图

图 1-1 中绘出了欧拉函数在复坐标系单位圆上的相位示意图，体现了正弦函数、余弦函数和欧拉函数之间的对应关系。

公式(1-11)表明，可以通过 Fourier 变换将一个复杂信号分解为不同频率的谐波分量，并利用振幅（或能量）和相位来表征每一个分量，按频率高低次序排列各分量的振幅与相位，就得到通常所说的频谱分布。从这个角度来看，Fourier 变换和频谱的概念是完全一致的。

可以根据一个函数的 Fourier 变换反演计算其在时域的表达形式，即逆向连续 Fourier 变换

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft} \mathrm{d}f \tag{1-12}$$

由公式(1-12)定义的逆向 Fourier 变换可以得到

$$x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{d}f$$

根据定义可知，正向和逆向 Fourier 变换都是一种全局化的积分变换，因为二者的积分区间为$(-\infty,+\infty)$。后面提供的公式(1-28)中可以进一步说明正向和逆向 Fourier 变换的全局化特性。

通常把公式(1-10)和公式(1-12)合在一起称为一组 Fourier 变换对，除了上述形式的变换对，还存在其他形式的变换对，如把圆频率 $\omega=2\pi f$ 作为频率变量进行 Fourier 变换，可得到公式(1-13)中的两种变换形式，这与上面介绍的表达式并不矛盾。

$$\begin{cases}X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\end{cases},\quad \begin{cases}X(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\end{cases}\tag{1-13}$$

事实上，上述的几种连续 Fourier 变换对都能够通过改变公式(1-14)中 A、B 两个参数的值得到。公式(1-14)是描述连续 Fourier 变换的通用表达式，通过选取不同的 A、B 值，可以得到不同形式的连续 Fourier 变换对。采用何种形式的 Fourier 变换对，主要取决于使用者的习惯。

$$\begin{cases}X(\omega)=A\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}B\omega t}\mathrm{d}t\\ x(t)=\frac{B}{2\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}B\omega t}\mathrm{d}\omega\end{cases}\tag{1-14}$$

读者在 world. wolfram. com 的网页上也可以找到连续 Fourier 变换另外一种形式的通用表达式

$$\begin{cases}X(\omega)=\sqrt{\frac{|B|}{(2\pi)^{1-A}}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}B\omega t}\mathrm{d}t\\ x(t)=\sqrt{\frac{|B|}{(2\pi)^{1+A}}}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}B\omega t}\mathrm{d}\omega\end{cases}\tag{1-15}$$

显而易见，公式(1-14)与公式(1-15)中定义的两种 Fourier 变换的通用表达式是等价的。

Fourier 变换最基本的作用是在获得时域函数 $x(t)$ 的 Fourier 变换 $X(f)$ 后，在频域对时间函数 $x(t)$ 进行分析和处理。根据 $X(f)$ 的表达式计算出函数 $x(t)$ 中的频率组成以及不同频率分量上的幅值、相位等参数，获得时间函数 $x(t)$ 的频率构成和强度等信息。

这里列举一个简单的例子：取 $f=f_0$，在函数 $x(t)$ 中所包含频率 f_0 的成分分量 $\tilde{x}(f_0t)$ 的解析形式可以表示为

$$\tilde{x}(f_0 t) = c \mid X(f_0) \mid \cos[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)] \tag{1-16}$$

在公式(1-16)中出现的 c 为系数，它取决于采用何种形式的 Fourier 变换对，读者可以参考余弦函数的 Fourier 变换公式或第 4 章中的公式(4-4)来理解这个解析表达式。

1.2.1 节提到的 Dirichlet 条件④是要求函数 $x(t)$ 在时域的积分为有限值，并且绝对可积，在这个严格的条件下，三角函数、指数函数等在应用中经常使用的普通函数的连续 Fourier 变换都不存在。只有把奇异函数 $\delta(f)$ 引入 Fourier 变换后，才能很好地解决常值函数、三角函数、阶跃函数和脉冲函数等函数的连续 Fourier 变换的计算问题。在经常遇到的应用中，条件④可以表示为 $\int_{-\infty}^{\infty} \mid x(t) \mid^2 \mathrm{d}t < \infty$，即表示能量有限的函数；这两种表示方法分别代表不同的函数集合，即 L^1 与 L^2。另外，可能会遇到能量积分为无穷的情况，如周期性信号，这时可以把约束条件进一步减弱为：$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mid x(t) \mid^2 \mathrm{d}t < \infty$，即只要求函数的功率为有限值。大多数工程应用中，因为选取的时间定义域的长度有限，需要进行分析的函数或信号基本都能够满足功率有限的约束条件，可以不考虑上述的约束条件直接计算其 Fourier 变换，但如果采用连续 Fourier 变换得到的分析结果发散或难以进行合理的物理解释，建议读者首先从约束条件开始查找错误，查看应用方法或计算过程中是否满足基本的数学约束条件。

在单纯只计算振幅谱的应用研究中，如从事海洋工程的研究人员在计算不规则波的频谱分布时，可以不考虑正向或逆向 Fourier 变换，因为无论是采用公式(1-10)中的正向变换，还是公式(1-12)中的逆向变换，都会获得相同的结果；即使采用其他形式的 Fourier 变换对，也会获得形状相似的振幅谱，只是正向和逆向变换在各点的幅值上存在一定的比例缩放而已。

1.2.2　性质

连续 Fourier 变换具备线性、位移、频移等许多重要性质，可以通过这些性质揭示信号的时域特性与频域特性之间的关系，灵活掌握和运用这些性质可以简化和加快 Fourier 变换的计算。本节中将对 Fourier 变换的各种性质进行详细介绍。

为了简化表达方式，在下面的介绍中采用算子的形式表示 Fourier 变换，用 F^+ 和 F^- 来表示正向和逆向连续 Fourier 变换算子，即 $X(f)=F^+[x(t)]$，$x(t)=F^-[X(f)]$。

下文采用了在公式(1-10)和公式(1-12)中出现的 Fourier 变换对。如果读者喜欢采用其他形式的变换对，多数 Fourier 变换特性的表达形式不变，只在一些性质中会出现一个 2π 的系数差异，如 Parseval 定理。

1. 线性

连续 Fourier 变换是一种线性运算。如果 $x(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)$，而其中第 i 个分量 $x_i(t)$ 的连续 Fourier 变换为 $X_i(f)=F^+[x_i(t)]$。那么，可以得到：$X(f)=F^+[x(t)]=\sum_{i=1}^{N}X_i(f)$。直接利用公式(1-10)中的定义就可证明 Fourier 变换的线性特性。显而易见，逆向连续 Fourier 变换也是一种线性运算。

2. 有界与连续性定理

如果 $x(t)$ 分段连续可微并且绝对可积，那么，它的连续 Fourier 变换 $X(f)$ 在频域 $(-\infty,\infty)$ 上有界、连续，附录 B.1 中列出了具体的证明。

3. Riemann-Lebesgue 引理

如果 $x(t)$ 的连续 Fourier 变换 $X(f)$ 存在，必定存在极限值：$\lim_{f\to\infty}|X(f)|=0$，附录 B.1 中列出了具体的证明。

4. 间断点

如果函数 $x(t)$ 及其导数都满足分段连续，$X(f)$ 是 $x(t)$ 的连续 Fourier 变换。假定 $t=t_0$ 是函数 $x(t)$ 的一个间断点，并且在间断点处左极限 $x_-(t_0)$ 和右极限 $x_+(t_0)$ 存在，那么，逆向 Fourier 变换在 $t=t_0$ 时满足：$F^-[X(f)]=\frac{x_-(t_0)+x_+(t_0)}{2}$。

这个性质被称作 Fourier 积分定理，在表达形式上与 Fourier 级数在间断点处的取值相同。连续 Fourier 变换在间断点处的取值公式是现代数学分析中的一个重要研究成果，最早出现在 1822 年 Fourier 发表的论文中。

5. 对称关系

连续 Fourier 正向变换算子 F^+ 和逆向变换算子 F^- 之间存在如下公式所示的对称关系：

$$\begin{cases}F^+[X(t)]=x(-f)\\F^-[x(f)]=X(-t)\end{cases}\tag{1-17}$$

连续对一个函数进行两次 Fourier 变换后获得的是原函数关于原点的“镜像”。存在这种对偶特性是因为正向和逆向 Fourier 变换的积分核分别为：$e^{-j2\pi ft}=\cos(2\pi ft)-j\cdot\sin(2\pi ft)$，$e^{j2\pi ft}=\cos(2\pi ft)+j\cdot\sin(2\pi ft)$，二者之间共轭相似，因此在有些工程应用中可以不必严格区分正向和逆向 Fourier 变换。

利用上述这种对称关系，可以轻而易举地根据连续 Fourier 变换的特性推演出逆向连续 Fourier 变换的特性。显然，逆向连续 Fourier 变换也具备在本节中介绍的各种特性。

6. 共轭特性

函数 $x(t)$ 的共轭函数是 $\overline{x(t)}$，而 $\overline{X(f)}$ 是 $X(f)$ 的共轭函数，那么，可以推导出

$$F^{+}[\overline{x(t)}]=\overline{X(-f)}, \quad F[\overline{x(-t)}]=\overline{X(f)}$$

如果 $x(t)$ 是实值函数，满足 $\overline{x(t)}=x(t)$，那么有 $X(f)=\overline{X(-f)}$。取 $X(f)$ 实部和虚部的表达形式 $X(f)=\mathrm{Re}(f)+\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(f)$，利用连续 Fourier 变换的共轭特性可得 $\mathrm{Re}(f)+\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Re}(-f)-\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(-f)$，根据复数相等的条件可以推导出 $\mathrm{Re}(f)=\mathrm{Re}(-f)$，$\mathrm{Im}(f)=-\mathrm{Im}(-f)$，即实值函数进行 Fourier 变换后得到的实部是偶函数、虚部是奇函数。

采用模函数与相位函数的表达形式来表示实值函数的连续 Fourier 变换结果：$X(f)=|X(f)|\cdot e^{\mathrm{j}\varphi(f)}$，就可以推导出：$|X(f)|\cdot e^{\mathrm{j}\varphi(f)}=|X(-f)|\cdot e^{-\mathrm{j}\varphi(f)}$，即实值函数的 Fourier 变换的模为偶函数、相位为奇函数。

函数 $x(t)$ 是虚值函数时，满足 $\overline{x(t)}=-x(t)$，那么有 $X(f)=-\overline{X(-f)}$，可以得到的结论为：虚值函数的连续 Fourier 变换的实部是奇函数、虚部是偶函数，模为偶函数，相位主值满足等式 $\varphi(f)=\pi-\varphi(-f)$。

7. 奇偶特性

如果函数 $x(t)$ 是奇函数，即 $x(t)=-x(-t)$，那么有 $X(f)=-X(-f)$；如果函数 $x(t)$ 是偶函数，即 $x(t)=x(-t)$，则有 $X(f)=X(-f)$。也就是说，奇函数的连续Fourier 变换仍为奇函数、偶函数的连续 Fourier 变换仍为偶函数，连续 Fourier变换并不改变原函数的奇偶性质。

当函数 $x(t)$ 是实值奇函数时，有 $\overline{x(t)}=-x(-t)$，可以推导出 $X(f)=-\overline{X(-f)}$，即实值奇函数的连续 Fourier 变换仍然是虚值函数；如果函数 $x(t)$ 是实值偶函数，即 $\overline{x(t)}=x(-t)$，可得 $X(f)=\overline{X(f)}$，即实值偶函数的连续 Fourier 变换仍然是实值函数。

同理，还可以得到类似的结论：虚值奇函数的连续 Fourier 变换是实值函数，虚值偶函数的连续 Fourier 变换是虚值函数。

表 1-1 中列出了时域函数及其频域函数的奇偶属性之间的对应关系。

表 1-1　时域和频域函数属性对应关系

时域函数	频域函数
实值、奇函数	虚值、奇函数
实值、偶函数	实值、偶函数
虚值、奇函数	实值、奇函数
虚值、偶函数	虚值、偶函数
复值、奇函数	复值、奇函数
复值、偶函数	复值、偶函数

连续 Fourier 变换的共轭特性和奇偶特性可以用来加快 Fourier 变换的计算速度。已知两个实值函数 $p(t)$、$q(t)$，需要计算二者对应的连续 Fourier 变换 $P_F(f)$和 $Q_F(f)$。可以先构造一个复值函数：$x(t)=p(t)+\mathrm{j}\cdot q(t)$，经过一次连续 Fourier 变换运算后，得到函数 $x(t)$的连续 Fourier 变换：$X(f)=\mathrm{Re}(f)+\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(f)$，通过下面的公式即可计算出 $P_F(f)$、$Q_F(f)$：

$$\begin{cases} P_F(f)=\dfrac{\mathrm{Re}(f)+\mathrm{Re}(-f)}{2}+\mathrm{j}\cdot\dfrac{\mathrm{Im}(f)-\mathrm{Im}(-f)}{2} \\ Q_F(f)=\dfrac{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(-f)}{2}-\mathrm{j}\cdot\dfrac{\mathrm{Re}(f)-\mathrm{Re}(-f)}{2} \end{cases} \tag{1-18}$$

8. 微积分特性

如果函数 $x(t)$的 n 阶导数 $x^{(n)}(t)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t)$存在，并且 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)=0$，那么有下列等式成立：

$$F^+\left[x^{(n)}(t)\right]=(\mathrm{j}\cdot 2\pi f)^n\cdot X(f)$$

进一步可以推导得到

$$x^{(n)}(0)=(\mathrm{j}\cdot 2\pi)^n\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f^nX(f)\mathrm{d}f$$

同样，如果定义在频域中的函数 $X(f)$存在 n 阶导数 $X^{(n)}(f)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}f^n}X(f)$，并且 $\lim\limits_{f\to\pm\infty}X(f)=0$，也有下列等式存在：

$$F^-\left[X^{(n)}(f)\right]=(-\mathrm{j}\cdot 2\pi t)^n\cdot x(t)$$

进一步可以得到

$$X^{(n)}(0)=(-\mathrm{j}\cdot 2\pi)^n\cdot\int_{-\infty}^{\infty}t^nx(t)\mathrm{d}t$$

对于时域的积分运算有