TEACHING MATERIALS FOR COLLEGE STUDENTS
高 等 学 校 教 材

地震波动力学 理论与方法

Seismic Waves Dynamics Theory and Methods

主编 杜世通

中国石油大学出版社

TEACHING MATERIALS FOR COLLEGE STUDENTS

高 等 学 校 教 材

地震波动力学理论与方法

杜世通　主编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

地震波动力学理论与方法/杜世通主编. —东营:中国石油大学出版社,2008. 2

ISBN 978-7-5636-2541-3

Ⅰ. 地…　Ⅱ. 杜…　Ⅲ. 地震波—波动力学　Ⅳ. P315. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 012565 号

书　　名: 地震波动力学理论与方法

作　　者: 杜世通

责任编辑: 李锋(0546－8392791)

封面设计: 九天设计

出 版 者: 中国石油大学出版社（山东 东营　邮编 257061）

网　　址: http://www.uppbook.com.cn

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

排 版 者: 青岛海讯科技有限公司

印 刷 者: 东营石大博雅印务有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0546－8392791,8391797)

开　　本: 185×260　印张:18.625　字数:475 千字

版　　次: 2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定　　价: 28.00 元

前言

《地震波动力学》是根据石油高校教材编审委员会审定的石油高校教材编写计划而编写、出版的石油高校勘查地球物理专业地震波动力学教材。自1978年高校恢复招生、培养研究生以来，编者积累了多年的教学、科研经验和成果，根据地震勘探技术发展现实需要，精心设计学科体系、合理选择课程内容，编写出这部基础理论教材。《地震波动力学》(1996年版)出版后，被各石油高校勘查地球物理专业教学所采用，部分非石油高校和研究单位也将其选为教学参考书。全书系统地介绍了地震波传播理论，资料翔实完整，概念准确，公式步骤清晰，简繁适宜，受到师生、读者的普遍欢迎。1999年本书荣获石油天然气总公司教学成果一等奖，代表了当时石油高校勘查地球物理专业本门课程的教学学术水平。

近30年来，地震勘探随着计算机和信息技术的发展而取得了长足的进步，成为石油工业必备的关键技术。回顾30年来地震勘探几项重大技术成果，主要的是：与计算机技术的快速发展相联系(如三维地震勘探)；与信息技术的多方位发展相联系(如地震数据处理与成像)；与地质等多学科综合研究相联系(如地震数据地质解释与储层描述)。相近学科的融入，使地震勘探成为名副其实的边缘学科，今后仍将继续这一发展方向。在这个发展过程中，地震波动力学作为基础理论的作用是不明显的。实际上，今日之地震数据处理从水平叠加到最新成像技术，依然是建立在几何地震学、地震波运动学原理基础之上的。但是，地震勘探的这一技术发展方向，不应成为削弱对地震勘探基础理论研究和学习的依据。地震勘探是通过观测地震波在地球介质中的传播规律来研究并阐明地下地质构造的。地震波动力学是唯一可以帮助解释地下地震波传播物理现象的理论工具。许多相近学科技术成果渗透而产生的新技术、新方法，也应通过基础理论研究阐明它们的地质、地球物理意义和应用的可行性，从物理上说明是用之有理的。地震勘探的技术发展方向和地震勘探技术应用的物理基础研究是两个并行不悖的研究方向，都是不可或缺的。

基于以上对地震勘探发展方向的分析，再版《地震波动力学》基本保留了《地震波动力学》(1996年版)的原有体系、结构和选材，做了必要的顺序调整。为使本书资料完整，补充了波动方程数值解法和解题实例。再版《地震波动力学》由

四部分组成:弹性动力学基本理论;弹性动力学基本问题及其解法;实际介质中的地震波;波动方程数值解法。第一部分是全书的基础,是学习和研究地震波传播原理的必备知识。第二部分介绍了波动方程通解、定解和积分解,以及积分变换的应用,是揭示地震波复杂传播现象的研究手段。第三部分实际介质中的地震波传播理论,是当前地震方法理论研究的热门课题,是应用基础理论解释复杂地球物理现象的初步尝试。第四部分数值解法搭建了地震波动力学理论与实际应用的桥梁。许多复杂物理问题没有解析解,做出近似解也十分困难,只有依赖于物理模型和方程的数值解对它做出初步解释。考虑到制作物理模型实现物理过程模拟的技术限制,数值解法就成了解决此类问题的唯一可行办法。再版《地震波动力学》的四个组成部分构成了严谨的课程体系,可为读者提供宝贵的学习和研究资料。考虑到本书内容的扩展,将再版的《地震波动力学》更名为《地震波动力学理论与方法》。

此外,考虑到目前学习地震波动力学的学生仍然缺少必要的数学基础准备,并且在所设的工程数学中,数学物理方法部分较薄弱,而《地震波动力学理论与方法》全书主要内容是在各种不同的条件下对波动方程进行求解,因此为使读者了解波动方程不同于代数方程的性质和求解方法,在第二章之后补充了波动方程定解问题举例,以具体实例说明波动方程通解和定解的关系及求解方法。

目前,我国高校普遍设立地球探测与信息技术学科,其中包含勘查技术与工程专业。在本科生和研究生(博士和硕士)培养计划中,课程门类繁多,对技术发展方向有较多考虑,而减少了地震波动力学的学习时数。地震波动力学中的某些基本理论往往因难度大,不能为本科生,甚至研究生培养计划所包容。编者希望《地震波动力学理论与方法》一书既可为应用地球物理或勘查技术与工程专业按培养计划教学提供可选必修教材,又可为该专业本科生和研究生,以及相近学科人员介入地球物理研究提供深入研究的学习资料,兼顾普及与提高两方面的要求。例如,勘查技术与工程专业本科生可以选学本书第一部分和第二部分前半段,包括第一章到第四章;而硕士或博士研究生则应把第二部分积分变换和第三、第四两部分(第五章至第十二章)学完,力求获得坚实的学科理论基础。以上是编者对《地震波动力学理论与方法》教材使用的意见,仅供师生参考。

本书自 1996 年出版,至今已使用了十余年,存书早已售罄,现在需求者难以购得。根据当前教学与科研的实际需要,并得到了中国石油大学(华东)地球资源与信息学院地球物理系的支持,由中国石油大学出版社再版。除原稿中个别段落由原参编者执笔外,再版全部稿件由本书主编提供。

杜世通

2008 年 2 月

目录

第一部分　弹性动力学基本理论

这一部分是全书的理论基础，是学习和研究地震波传播原理的必备知识。包括：第一章弹性理论基础，系统叙述弹性力学的基本概念，如应力分析、应变分析、应力与应变的关系，以及弹性介质运动平衡方程式和弹性介质的机械能。第二章弹性动力学中的基本波，系统叙述弹性波控制方程及弹性介质中的各类波；研究弹性介质运动，由运动平衡方程式建立波动方程；讨论波动方程的性质和它的求解方法；以水平层状横向均匀介质为例，展示波动方程求解的步骤，导出一维离散地震介质振幅计算递推公式，揭示波的传播过程。

第一章　弹性理论基础

自然界中的物体，根据它们对外力作用的反应，可以划分为刚体、弹性体和塑性体。物体在外力作用下发生平移或转动，并可沿力的作用方向传递力的作用，则该物体被称为刚体。当一个物体受到外力作用，在它的内部质点间发生位置的相对变化，从而使其形状改变，称为应变。处于应变状态的物体，为保持其平衡状态，在内部质点间产生内力作用，称为应力。当外力作用取消后，物体的应力、应变状态立刻消失并恢复原有的形状，这类物体称为弹性体。有一种物体，当外力作用停止后，物体逐渐恢复其原有形状，或者不能完全恢复其原有形状，而保留一定的变形，称为塑性体，或不完全弹性体。

地震勘探方法是通过研究人工激发的机械振动在地球介质中的传播规律来推断地下地质结构的。在地球介质中传播的机械振动，称为地震波。地震震源作用给地球介质岩层施加外力，使之发生变形。这里既可能发生弹性应变，也可能发生使岩石破碎、永久变形的非弹性应变。哪种变形的形式占优势，这取决于一系列因素。其中主要的是震源作用力的大小和作用时间，以及岩石的性质。一般来说，远离震源处，震源作用力微小，作用时间短暂，除一些特殊岩相(如干沙)外，岩石表现为弹性体。因此，在岩石中产生的机械振动可以看成是弹性介质中的弹性振动，地震波可以看成是在岩层中传播的弹性波。弹性理论是研究弹性波的基础，也是学习和研究地震波传播规律的理论基础。

弹性理论的建立基于以下几个基本假设：

① 构成弹性体的物质应是连续的，充满了弹性体所占空间而无间断，也就是说，要忽略物质的分子结构和原子结构，从宏观上对介质作研究。

② 物质具有理想的弹性性质，在荷载和卸载时不发生能量的吸收。

③ 处于应力应变状态的物体，其应力与应变成比例关系；弹性理论通常限于讨论均匀各向同性、完全弹性介质。

应该指出，使用弹性理论研究地震波，不仅仅是因为上面指出的地球介质与弹性体的相似性，还因为实际介质中地震波的复杂性，并且对它的研究还很不充分。实际介质中传播的地震

波有一些明显区别于弹性波的物理性质，如介质的吸收作用，虽不能用弹性理论来解释，但可以在相应的弹性波方程中增加一个校正项或系数来加以考虑。

§1-1 应力分析

一个弹性体在受外力作用时，其内部各质点间发生位置的相对变化，物体处于应变状态。为了保持这种状态平衡，在物体内部各质点间表现出力的相互作用。这种作用力称为内力，是与外力相平衡的作用力，是对外力作用的反应。作用力可以施加于物体表面，称为面力；也可以施加于物体每一个体积元，称为体力。面力的例子，如流体对物体表面的压力；体力的例子，如万有引力、向心力等。内力作用是分布在物体内部任一截面上，沿截面物体两部分相互接触而发生力的作用，所以它是一种面力、接触力。作用于单位截面积上的内力，称为应力。因此，在外力作用下，弹性体处于应力应变状态。

一、应力及其分量

为了分析物体应力状态，我们想象着将在外力作用下处于应力应变状态的弹性体沿着任意选取的截面 S 分为 A 和 B 两部分。将 A 部分和作用于该部分的外力一起移走，则为了保持 B 部分原有的应力应变状态，在 S 截面上表现出了面作用力 $\boldsymbol{P}$。这个作用力代替了移走的 A 部分物体对 B 部分的作用，是存在于物体内部、决定了物体分割前应力应变状态的内力。物体在施加的外力和所产生的内力作用下处于平衡状态，如图 1-1 所示。

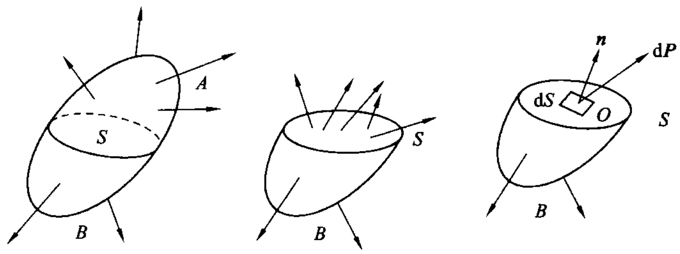

图 1-1 应力向量

在截面 S 上取面积元 $\mathrm{d}S$，其法线方向为 $\boldsymbol{n}$。分布于面积元 $\mathrm{d}S$ 上的内力，用作用于其中心点 O 的集中力 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 代替，$\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 等效于 $\mathrm{d}S$ 上的面力作用。比值：

$$\boldsymbol{P}_n=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}S} \tag{1-1}$$

称为 $\mathrm{d}S$ 面积元上的应力。一般情况下，$\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 作用方向相对面积元法线 $\boldsymbol{n}$ 可以是任意的，而不一定与 $\boldsymbol{n}$ 相重合。应力向量 $\boldsymbol{P}_n$ 的下标 n 表示应力作用截面法线方向，而不是应力作用方向。应力向量的大小和方向取决于面积元中心点 O 在物体内部的位置和面积元法线的空间方向。如果我们沿另一个过 O 点的截面 S_1 分割物体，则在同一 O 点上所有的内力 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}'$ 和应力 $\boldsymbol{P}'_{n'}$，都将不同于原有的内力 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 和应力 $\boldsymbol{P}_n$，因为此时应力作用的截面法线不同，分别为 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$。显然，物体在一点上的应力状态不能用一个应力向量来完全表达。

应力向量 $\boldsymbol{P}_n$ 可以沿坐标轴方向分解。在笛卡儿直角坐标系中，它可沿 x,y,z 轴分解，其分量表示为 P_{nx},P_{ny},P_{nz}，其中第一个下标表示向量 $\boldsymbol{P}$ 作用面的法线方向，第二个下标表示所取分量方向。另一方面，应力作用截面也可以向坐标面投影，即任意一截面法线方向 $\boldsymbol{n}$ 可以投影在 x,y,z 轴上。可以想象，讨论垂直于坐标轴 x,y,z 的三个截面上的应力向量 $\boldsymbol{P}_x,\boldsymbol{P}_y,\boldsymbol{P}_z$，

可以用来表示物体内过一点在任意截面法线方向 $\boldsymbol{n}$ 上作用的应力向量。所以讨论在垂直坐标轴的截面上的应力向量及其分量，在弹性理论中是十分重要的。

我们想象着在弹性体内沿与坐标面平行方向取一个平行六面体单元，如图 1-2 所示。当物体处于应力应变平衡状态时，在平行六面体的三个在图上可见的侧面上将分别作用不同的应力向量 $\boldsymbol{P}_x, \boldsymbol{P}_y, \boldsymbol{P}_z$。而每个应力向量又可沿坐标轴方向分解，作用于垂直 x 轴的侧面上的应力向量 $\boldsymbol{P}_x$ 的分量是 P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}；作用于垂直 y 轴的侧面上的应力向量 $\boldsymbol{P}_y$ 的分量是 P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}；作用于垂直 z 轴的侧面上的应力向量 $\boldsymbol{P}_z$ 的分量是 P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}。下标相同的应力分量，其作用方向与作用截面垂直，称为正应力，通常用 σ 表示：

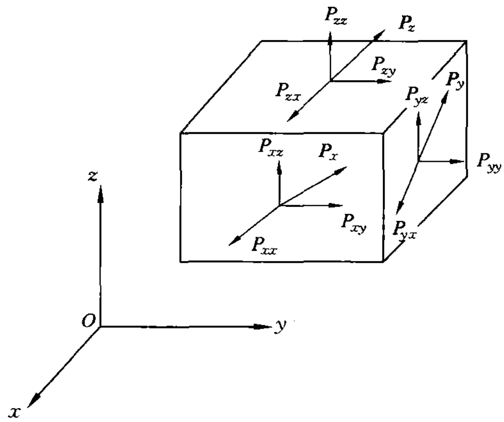

图 1-2　应力及其分量

$$P_{xx} = \sigma_{xx}, \qquad P_{yy} = \sigma_{yy}, \qquad P_{zz} = \sigma_{zz} \tag{1-2}$$

其余应力分量下标不相同，作用方向在作用截面上，称为切应力，通常用 τ 表示：

$$\left.\begin{array}{lll} P_{xy} = \tau_{xy}, & P_{xz} = \tau_{xz}, & P_{yx} = \tau_{yx} \\ P_{yz} = \tau_{yz}, & P_{zx} = \tau_{zx}, & P_{zy} = \tau_{zy} \end{array}\right\} \tag{1-3}$$

应力向量各分量符号的选择与坐标轴方向选择有关。如果截面外法线与相应的坐标轴方向重合，则应力向量的分量沿坐标轴方向取正；若截面外法线方向与相应的坐标轴方向相反，则应力向量分量沿坐标轴方向为负。正向正应力为拉伸力，负向正应力为压缩力。

二、过一点的不同截面上作用的应力之间的联系

为了讨论通过物体内同一点的不同截面上作用的应力之间的关系，我们想象着在物体内沿坐标轴方向为其棱取一个微四面体体积元，如图 1-3 所示，坐标原点取在所研究的物体内的一点上，且为所取四面体的顶点。垂直于坐标轴 x, y, z 的三个侧面表示为 $\mathrm{d}S_x, \mathrm{d}S_y, \mathrm{d}S_z$，而第四个倾斜侧面为 $\mathrm{d}S$，其外法线方向为 $\boldsymbol{n}$；$\boldsymbol{n}$ 是一个单位向量，其在空间的方向用方向余弦 l, m, n 表示。为方便起见，方向余弦用 $l_i (i=1,2,3)$ 表示：

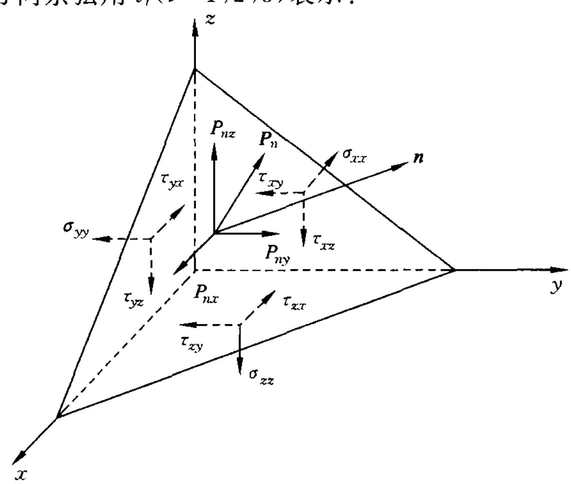

图 1-3　任意倾斜截面上的应力

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= l = \cos(\boldsymbol{n}, x) \\ l_2 &= m = \cos(\boldsymbol{n}, y) \\ l_3 &= n = \cos(\boldsymbol{n}, z) \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

则有 $\boldsymbol{n}=l_1\boldsymbol{i}+l_2\boldsymbol{j}+l_3\boldsymbol{k}$，式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为坐标轴 x,y,z 正方向单位向量。$\boldsymbol{n}$ 表示倾斜侧面 $\mathrm{d}S$ 在空间的方向。当 $\mathrm{d}S$ 为物体内任意截面时，我们希望用作用于四面体三个侧面 $\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_y,\mathrm{d}S_z$ 上的应力向量 P_x,P_y,P_z 或其分量来表示作用于 $\mathrm{d}S$ 上的应力向量 $\boldsymbol{P}_n$。如果能做到这一点，则可以肯定，弹性体内一点的应力状态可以完全由作用于垂直坐标轴方向的三个截面上的应力向量或其分量所确定，如图 1-3 所示。设作用于任意方向 $\boldsymbol{n}$ 的截面上的应力为 $\boldsymbol{P}_n$，其分量为 P_{nx},P_{ny},P_{nz}。作用于垂直坐标方向上的三个截面上的应力分量为 $\sigma_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz};\tau_{yx},\sigma_{yy},\tau_{yz};\tau_{zx},\tau_{zy},\sigma_{zz}$。我们建立四面体平衡方程式。很明显，若所讨论的四面体不平移、不旋转，即处于静力平衡状态，则作用于四面体的合力等于零。

作用于四面体的力包括面力和体力。体力与四面体体积成比例，是相对于 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的三阶微量，可以忽略不计。作用于四面体各个侧面上的面力等于各面上作用的应力向量与面积的乘积。所讨论的四面体是一个微体积元，作用于各侧面上的面力作用点近似地看成是一个点，集中于 O 点上，则四面体平衡方程式为：

$$\boldsymbol{P}_n\mathrm{d}S+\boldsymbol{P}_x\mathrm{d}S_x+\boldsymbol{P}_y\mathrm{d}S_y+\boldsymbol{P}_z\mathrm{d}S_z=0 \tag{1-5}$$

其中 $\boldsymbol{P}_n,\boldsymbol{P}_x,\boldsymbol{P}_y,\boldsymbol{P}_z$ 为作用于四面体倾斜面和三个垂直于坐标轴的侧面上的应力向量。考虑到 $\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_y,\mathrm{d}S_z$ 三个侧面外法线为 x,y,z 轴的负方向，则它们与 $\mathrm{d}S$ 的关系是：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S_x &= -\mathrm{d}S\cdot\cos(\boldsymbol{n},x) \\ \mathrm{d}S_y &= -\mathrm{d}S\cdot\cos(\boldsymbol{n},y) \\ \mathrm{d}S_z &= -\mathrm{d}S\cdot\cos(\boldsymbol{n},z) \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

代入前式可得：

$$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}_x\cos(\boldsymbol{n},x)+\boldsymbol{P}_y\cos(\boldsymbol{n},y)+\boldsymbol{P}_z\cos(\boldsymbol{n},z) \tag{1-7}$$

应力向量用其分量表示为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}_n &= P_{nx}\boldsymbol{i}+P_{ny}\boldsymbol{j}+P_{nz}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{P}_x &= \sigma_{xx}\boldsymbol{i}+\tau_{xy}\boldsymbol{j}+\tau_{xz}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{P}_y &= \tau_{yx}\boldsymbol{i}+\sigma_{yy}\boldsymbol{j}+\tau_{yz}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{P}_z &= \tau_{zx}\boldsymbol{i}+\tau_{zy}\boldsymbol{j}+\sigma_{zz}\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

将关系式(1-8)代入平衡方程式(1-7)，并以应力分量表示，可有：

$$\left.\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_{xx}\cos(\boldsymbol{n},x)+\tau_{yx}\cos(\boldsymbol{n},y)+\tau_{zx}\cos(\boldsymbol{n},z) \\ P_{ny} &= \tau_{xy}\cos(\boldsymbol{n},x)+\sigma_{yy}\cos(\boldsymbol{n},y)+\tau_{zy}\cos(\boldsymbol{n},z) \\ P_{nz} &= \tau_{xz}\cos(\boldsymbol{n},x)+\tau_{yz}\cos(\boldsymbol{n},y)+\sigma_{zz}\cos(\boldsymbol{n},z) \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

方程式(1-9)称为柯什公式。它表明，在过一点的任意截面上作用的应力向量分量可以用作用于垂直坐标轴的三个截面上的应力向量分量来表示，或者说，一点的应力状态完全为 $\boldsymbol{P}_x,\boldsymbol{P}_y,\boldsymbol{P}_z$ 三个应力向量所描述。

四面体平衡意味着它既不能平动，又不能转动。对于转动平衡条件，可以建立力矩平衡方程式，并由此方程式导出切应力互等原理。比较方便的是讨论四面体围绕过倾斜侧面三角形重心 C，并平行于坐标轴的直线 x',y',z' 的转动，如图 1-4 所示。C 在 $\mathrm{d}S_x$ 和 $\mathrm{d}S_z$ 平面上的投影 C_x,C_z 分别是 $\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_z$ 侧面三角形的重心。图中 y' 为过 C 点平行于 y 轴的直线。作用于

四面体四个侧面上的 12 个应力分量，其作用点位于相应侧面三角形的重心，只有两个分量 τ_{xz} 和 τ_{zx} 将使物体相对 y' 而转动，其余十个应力分量或与 y' 相交或平行于 y' 轴，将不使物体发生转动。因此，相对 y' 的力矩平衡方程式将是：

$$\tau_{xz}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\cdot CC_x-\tau_{zx}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot CC_z=0 \tag{1-10}$$

其中 $CC_x=\frac{1}{3}\mathrm{d}x, CC_z=\frac{1}{3}\mathrm{d}z$。因此得到：

$$\tau_{xz}=\tau_{zx} \tag{1-11}$$

同理，过倾斜侧面三角形重心 C 作平行于 x,z 轴的直线 x',z'；相对 x' 轴产生力矩的应力分量是 τ_{zy},τ_{yz}；相对 z' 轴产生力矩的应力分量是 τ_{yx},τ_{xy}。根据力矩平衡方程式，将得到：

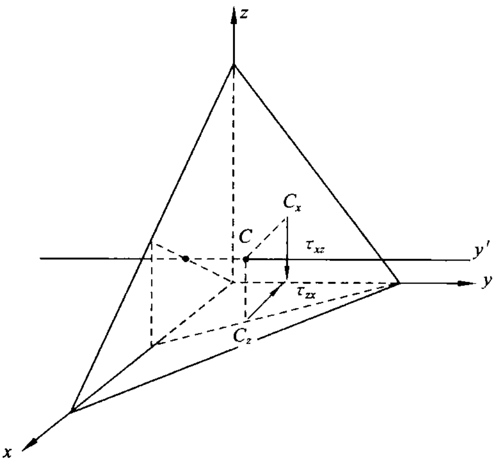

图 1-4　力矩平衡方程式的建立

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zy}&=\tau_{yz}\\ \tau_{yx}&=\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

式(1-11)和(1-12)表示切应力互等原理。这说明在表示弹性体内一点应力状态的九个应力分量中只有六个是独立的，即 $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz},\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$。

三、应力张量

如前所述，弹性体内一点的应力状态不能由一个简单的向量确定，而是由三个应力向量的九个分量所描述。九个应力分量构成一个二度对称张量。所以经常说，一点的应力状态取决于应力张量。为了说明应力张量的意义，我们讨论坐标系 xyz 旋转时应力向量的分量变换。

当坐标系 xyz 旋转某个角度后得到新坐标系 $x'y'z'$，两个坐标系原点相同，则所有向径分量变换公式为：

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+y\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+z\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\\ y'&=x\cos(\boldsymbol{l}_{y'},\boldsymbol{l}_x)+y\cos(\boldsymbol{l}_{y'},\boldsymbol{l}_y)+z\cos(\boldsymbol{l}_{y'},\boldsymbol{l}_z)\\ z'&=x\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x)+y\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y)+z\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z)\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

由关系式(1-13)可见，当坐标旋转时，向径在新坐标中的投影 x',y',z' 分别等于它在原坐标系中各个分量 x,y,z 在相应坐标轴 x',y',z' 上的投影之和。按照坐标系旋转时坐标变换关系，我们用原坐标系中的应力分量表示新坐标系中的应力分量。

首先取垂直新坐标轴之一，如 x' 的微面积元，作用于该面积元上的应力向量为 $\boldsymbol{P}_{x'}$；根据柯什公式(1-9)可以写出 $\boldsymbol{P}_{x'}$ 在原坐标系 x,y,z 中的应力分量 $P_{x'x},P_{y'y},P_{z'z}$：

$$\left.\begin{aligned}P_{x'x}&=\sigma_{xx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{yx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+\tau_{zx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\\ P_{x'y}&=\tau_{xy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+\sigma_{yy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+\tau_{zy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\\ P_{x'z}&=\tau_{xz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{yz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+\sigma_{zz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

应力向量 $\boldsymbol{P}_{x'}$ 在新坐标系中的某一坐标轴如 x' 上的投影等于 $\boldsymbol{P}_{x'}$ 在原坐标系中各分量在这个坐标轴 x' 上投影之和：

$$\sigma_{x'x'}=P_{x'x}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+P_{x'y}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+P_{x'z}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) \tag{1-15}$$

将式(1-14)代入式(1-15)，可以得到：

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'}=&\sigma_{xx}\cos^2(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{yx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+\\&\tau_{zx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{xy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+\\&\sigma_{yy}\cos^2(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+\tau_{zy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)+\\&\tau_{xz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)+\tau_{yz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)+\\&\sigma_{zz}\cos^2(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\end{aligned}\tag{1-16}$$

同理不难得到应力向量在新坐标系中的九个分量的表达式。引一个切应力表达式作为例子：

$$\begin{aligned}\tau_{x'z'}=&\sigma_{xx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{yx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x)+\\&\tau_{zx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{xy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y)+\\&\sigma_{yy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y)+\tau_{zy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y)+\\&\tau_{xz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z)+\tau_{yz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z)+\\&\sigma_{zz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z)\end{aligned}\tag{1-17}$$

为方便起见，使用带下标的坐标系表示，即 $x_i(i=1,2,3)$ 和 $x'_m(m=1,2,3)$；对应的坐标轴单位向量为 $\boldsymbol{l}_i(i=1,2,3)$ 和 $\boldsymbol{l}_m(m=1,2,3)$；用 α 表示方向余弦，如 $\alpha_{mi}=\cos(\boldsymbol{l}_m,\boldsymbol{l}_i)$ 等；用 P_{ij} 或 P_{nm} 表示应力分量，当两个下标相同时为正应力分量，当两个下标不同时为切应力分量。当坐标系旋转时应力分量的变换公式可简记为：

$$P_{nm}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}P_{ij}\alpha_{ni}\alpha_{mj}\tag{1-18}$$

或者写作：

$$P_{nm}=P_{ij}\alpha_{ni}\alpha_{mj}\quad(i,j=1,2,3)\tag{1-19}$$

其中规定对表达式中重复出现的下标要求求和，这个过程是显而易见的。

应力九个分量的总合称为应力张量，用$\mathscr{S}$表示。经坐标系旋转后，得到新的应力张量$\mathscr{S}'$。两者的关系可以写作：

$$\mathscr{S}'=\mathscr{A}:\mathscr{S}\tag{1-20}$$

其中$\mathscr{A}$表示一个有 81 个分量的算子，包含有坐标系变换的方向余弦平方和乘积项，而比号“：”表示上述的求和过程。

四、主应力

在过弹性体内一点，法线方向为任意的截面上作用的应力，一般情况下可以分解为正应力和切应力。但是，我们可以从过一点的任意截面内找出一个特殊的截面，它的法线方向与作用于该截面上的应力方向重合，或者说，在这个截面上只作用着正应力。我们确定这个截面的方向，并用作用在垂直于坐标轴的截面上的应力分量表示这个正应力的大小。设待求截面的法线方向为 $\boldsymbol{n}$，应力向量 $\boldsymbol{P}_n=\sigma_n$，它在 x,y,z 坐标上的投影为：

$$P_{nx}=\sigma_n\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_x),\quad P_{ny}=\sigma_n\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_y),\quad P_{nz}=\sigma_n\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_z)\tag{1-21}$$

将此式代入柯什公式(1-9)，将等式右端项移到左端，可有：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{xx}-\sigma_n)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{yx}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_y)+\tau_{zx}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_z)=0\\\tau_{xy}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_x)+(\sigma_{yy}-\sigma_n)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_y)+\tau_{zy}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_z)=0\\\tau_{xz}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_x)+\tau_{yz}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_y)+(\sigma_{zz}-\sigma_n)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_z)=0\end{aligned}\right\}\tag{1-22}$$

在解析几何中已知方向余弦平方和为 1，即：

$$\cos^2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_x)+\cos^2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_y)+\cos^2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_z)=1\tag{1-23}$$

联合求解式(1-22)和式(1-23)可以确定四个未知量：σ_n 和 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_x)$，$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_y)$，$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}_z)$。方程组(1-22)有解的条件是其系数矩阵行列式等于 0：

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{vmatrix}=0 \tag{1-24}$$

将式(1-24)展开后可得：

$$\sigma_n^3-I_1\sigma_n^2+I_2\sigma_n-I_3=0 \tag{1-25}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz} \\ I_2&=\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx}-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2 \\ I_3&=\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz}+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_{xx}\tau_{yz}^2-\sigma_{yy}\tau_{zx}^2-\sigma_{zz}\tau_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \tag{1-26}$$

三次方程(1-25)有三个根 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$，称为主应力。这些根作为实根，在一般情况下 $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$，特殊情况下可能其中两个根或三个根相等。若主应力 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 有不同值，则对每个主应力值可以确定其作用的截面的方向。截面法线方向余弦由方程组(1-22)确定，也就是将 σ_1,σ_2 和 σ_3 分别代入方程组(1-22)，求解之，可获得所求之方向余弦。可以表明，所得三个截面彼此垂直。

若 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$，则在过一点的任意方向截面上只作用一个数值相等的正应力。这意味着在这一点上物体处于周围压缩和膨胀状态。若 $\sigma_1=\sigma_2\neq\sigma_3$ 时，将 $\sigma_1=\sigma_2,\sigma_3$ 代入方程组(1-22)可以确定所求截面法线的方向余弦。在所有与 σ_3 作用的截面相垂直的截面上都只作用一个主应力，其大小为 $\sigma_1=\sigma_2$，这样，处于应力状态下的物体内部每一点上都可找到一组三个相互垂直的截面，在这些截面上只存在着主应力。这样的截面称为主截面。当 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 不同值时，主截面可以单一地被确定；若三个主应力彼此相等，则主截面方向可以任意选择。

一点上的主应力是不依赖于坐标的物理量，只取决于物体的性质和对物体的作用力。根据立方方程式的性质，方程系数用它的根表示，可有：

$$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$

$$I_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1$$

$$I_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

所以 I_1,I_2,I_3 也与坐标选择无关，称为应力状态不变量。

这里我们需指出主应力的某些性质。

① 如果 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$，则 $\sigma_1\geqslant\sigma_n\geqslant\sigma_3$，也就是说，在过一点的不同截面上作用的正应力，其最大值和最小值是相应的主应力。

② 如果 $|\sigma_1|\geqslant|\sigma_2|\geqslant|\sigma_3|$，则 $|\sigma_1|\geqslant|\boldsymbol{P}_n|\geqslant|\sigma_3|$，也就是说，在过一点的不同截面上作用的应力向量，其绝对值的最大值和最小值乃是相应的主应力。

③ $(\tau_n)_{\max}=(\sigma_1-\sigma_3)/2$，也就是说，最大的切应力等于最大和最小的主应力之差的一半。这个切应力作用的截面通过主截面法线方向——轴 2，而与另两个主截面法线方向——轴 1 和轴 3 成 45°交角，如图 1-5 所示。

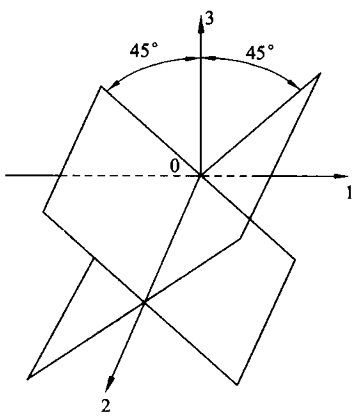

图 1-5 最大切应力作用截面

五、平衡微分方程式

我们研究物体内部相邻点间应力张量的关系。为此，将根据物体静力平衡条件，建立平衡微分方程式。在物体内取一个以 $dxdydz$ 为棱的微平行六

面体，其体积 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，如图 1-6 所示。所谓静力平衡，指的是物体既不作平移运动，又不作旋转运动，这要求物体所受合力为零以及所受合力矩为零。合力矩为零的条件导出了切应力互等原理，而合力为零的条件将导出平衡微分方程式。

合力为零的条件等价于各种作用力在每一坐标轴方向上的分量之和为零。在图 1-6 中绘出了作用于六面体各个侧面上的应力向量 x 方向分量以及作用于该体积元的体力 x 分量 ρF_x，其中 ρ 为物体密度。设作用于体积元的体力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}$，作用于单位质量物体的体力 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}m$，$\mathrm{d}m$ 为体积元的质量，$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$，作用于单位体积的体力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}V=\rho\boldsymbol{F}$；分布于体积元的体力可以视为作用于它的重心上的集中力，ρF_x 是它在 x 轴方向上的分量。应力作用分布于六面体各个侧面。作用于六面体相对的一对侧面上的应力是不等的，作用于图面上可见的侧面上的应力分量用带“″”号的符号表示，而作用在相应的不可见侧面上的应力分量用带“′”号的符号表示。按 x 轴作用力方向建立的平衡方程式为：

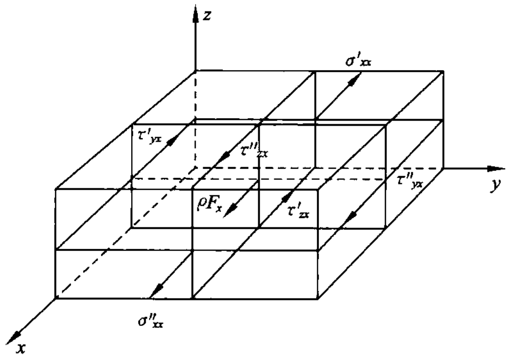

图 1-6　平衡微分方程式的建立

$$(\sigma''_{xx}-\sigma'_{xx})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\tau''_{yx}-\tau'_{yx})\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(\tau''_{zx}-\tau'_{zx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\rho F_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \tag{1-27}$$

其中考虑到了微体积元上各项力的作用点趋于一点。从一个侧面过渡到与它平行的相对的侧面时，相同应力分量的增量，考虑其间的距离为一微量，应力分量沿该距离方向呈线性变化，可用应力分量偏导数与距离的乘积来表示，即：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma''_{xx}-\sigma'_{xx})&=\frac{\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\\(\tau''_{yx}-\tau'_{yx})&=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\\(\tau''_{zx}-\tau'_{zx})&=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\end{aligned}\right\} \tag{1-28}$$

将式(1-28)代入式(1-27)，可得对 x 方向的平衡微分方程式。同理可以建立对 y 和 z 方向的平衡微分方程式。结果如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho F_x=0\\\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho F_y=0\\\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho F_z=0\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

式中，ρF_y，ρF_z 为体力沿 y 和 z 方向上的分量。

根据切应力互等原理式(1-11)、式(1-12)，方程组(1-29)也可改写为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho F_x=0\\\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho F_y=0\\\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho F_z=0\end{aligned}\right\} \tag{1-30}$$

考虑关系式(1-2)和(1-3)，以及直角坐标系中的散度表达式，将上述方程写成向量形式：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{P}_x+\rho F_x=0\\ \operatorname{div}\boldsymbol{P}_y+\rho F_y=0\\ \operatorname{div}\boldsymbol{P}_z+\rho F_z=0\end{aligned}\right\}\tag{1-31}$$

§1-2　应变分析

物体在外力作用下，其形状和体积发生改变。对弹性体而言，这种形变称为弹性应变。在应变前，我们设想物体内部一个直线段 ab，由于外力作用，它将发生弯曲，也就是说，在某些部分被拉伸了，而在另外一些部分被压缩了，整个物体处于应力应变状态。用精确的数学方法对上述形变过程进行描述，实际上是不可能的。这是因为在外力作用下线段 ab 的变化是多样的，是无限的。但是，若将线段 ab 划分为无限小线段，使其在物体应变前和应变状态下都保持直线段形状，则在这个条件限制下线段的变形可归结为拉伸或压缩、旋转以及这两种变化的组合。微小直线段在应变过程中保持其直线形状的条件是在一点周围的微分区域内应变保持为一常数。在这种情况下应变过程可用数学方法描述，每一点的相对位移可以作为该点坐标的函数来确定。在地震勘探中为避开震源附近岩石破碎带，总是远离震源研究微小应变，上述限制条件是满足的。本节我们将叙述应变分析，而不讨论它是由什么作用力引起的。

一、应变张量

在外力作用下，弹性体内部各质点间位置发生相对变化，导致其形状和体积改变，物体处于弹性应变状态。为定量描述弹性介质应变状态，我们讨论物体内部包含点 $M(x,y,z)$ 及其邻近区域的微小区域 Ω，如图 1-7 所示。

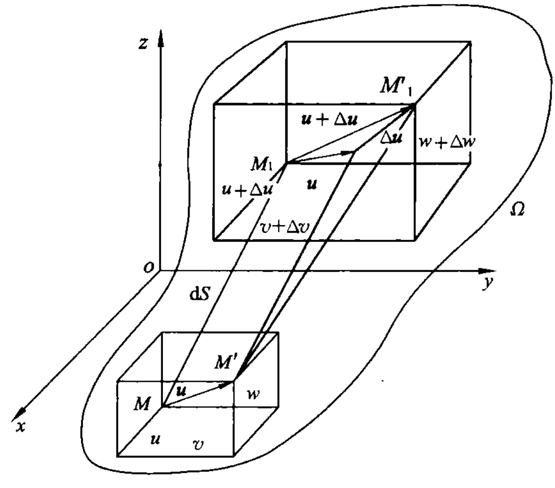

图 1-7　直线段的应变

在 Ω 区域内讨论一个直线段 $MM_1=\mathrm{d}S$，即该线段始于 M 点，止于 M_1 点，长度为 $\mathrm{d}S$；$\mathrm{d}S$ 在直角坐标系 x,y,z 轴上的投影为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$；在应变状态下 M 点移动到 M' 点，而 M_1 点移动到 M'_1 点，形变结果使线段 $\mathrm{d}S$ 变为 $\mathrm{d}S'$。设点 M 的位移 $\boldsymbol{u}$ 为一向量，在 xyz 坐标系中的分量为 u,v,w，即：

$$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}\tag{1-32}$$