通往成功的捷径

丛书策划 易·杏

竞赛数学解题策略

马 兵主编

JINGSAI SHUXUE JIETI CELUE

竞赛数学解题策略

主　编　马　兵

编　著　马　兵　王小海　王旭斌　王雪为
朱进初　陈永华　李玉兰　李　斌
林健鸿　郑姬铭　俞　昕　袁小容
倪志香　韩国梁　谢丙秋　虞红明

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

竞赛数学解题策略/马兵主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.5
ISBN 978-7-308-05996-1

Ⅰ. 竞… Ⅱ. 马… Ⅲ. 数学课—高中—解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 075170 号

竞赛数学解题策略

马 兵 主 编

责任编辑 沈国明
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571—88925592，88273066(传真)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 21.75
字　　数 530 千
版 印 次 2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05996-1
定　　价 32.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

编写说明

从2008年起，全国大部分省份都开始实行新一轮的课程改革。然而，目前市场上能与新课程标准相匹配的，适合课堂教学模式的竞赛类辅导用书几乎没有。为了更好地帮助广大数学爱好者进一步学习高中数学奥林匹克竞赛的知识和方法，同时也为了给广大教师和参加高考的优秀学生提供优质的教学资源和学习资源，提高教师的教学水平和学生解决问题、分析问题的能力，我们组织了全国各地数学奥林匹克高级教练与特级教师，精心编写了这套丛书(共五种)。

本套丛书主要特色是：

一、同步辅导、循序渐进

从竞赛的实际需要出发，将传统的竞赛内容与新教材内容，讲解与训练等有机地结合起来。其中，基础知识部分与现行模块教材同步，是教材的补充和延伸；专题部分是高中竞赛必须掌握的重要思想和方法，选题难度控制在全国联赛二试水平，部分题目与CMO、IMO试题水平相当。

二、方法创新、培养能力

丛书注重解题方法创新，新颖题目多视角分析，经典题目新视角分析，新颖的解题思路对学生具有一定的启发性和思考性，也为教师教学提供了良好的素材。同时，丛书也吸收了新课标改革成果，编拟了许多创新的题目。

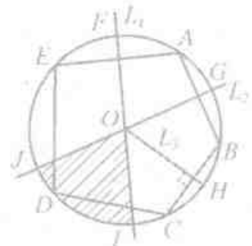
三、源于实践、重在实用

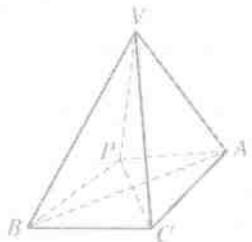
丛书大多数内容是作者在讲义的基础上逐步修改与完善的，因此它可以直接应用到课堂教学中，是一套经得起推敲的竞赛辅导丛书。

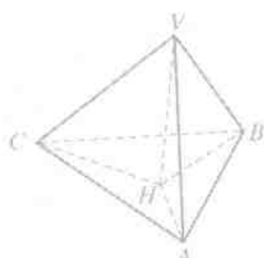
由于编写时间仓促，编者水平有限，书中纰漏在所难免，敬请专家与读者批评指正。

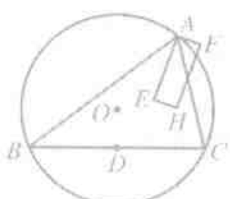
目录

CONTENTS









第 1 讲

观察法

> 数学的世界是变换无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！
>
> ——陈景润

知识方法扫描

轻轻地告诉你：梳一梳，理一理，基本方法的梳理与积累，永远是学习的第一生命！

观察是认识的开始，是解决问题的基础，可以说科学上的发现大多起源于观察．数学家欧拉(Euler L.)非常推崇观察，他指出，“今天已知许多数的性质，大部分是通过观察发现的……，只有靠观察才能获得这些知识”．

一般通过观察寻找研究对象的特点和规律，同时观察也是进行比较、类比、联想和归纳的基础，通常把经由观察来发现研究对象所具有的特点和规律称为观察法或发现法．

据说著名的科学家牛顿(Newton I.)就是通过对“苹果落地”这一现象的观察、思考，发现了万有引力；化学家门捷列夫(Менделеев Д.)通过对各种元素的性质、结构、原子量等的观察发现了元素的周期性，编出了著名的元素周期表；科学巨匠爱因斯坦(Einstein A.)通过对大量数据的观察分析，发现了相对论．

总之，观察对于科学的发现来说是至关重要的．

经典例题解析

真诚地教诲你：看一看，悟一悟，流畅的思维方法，规范的解题步骤，准确无误的答案，是永恒的学习主旋律．

1．特点观察

观察的第一步是研究题目有无特殊之处．例如，题中给出的数据有无特点，方程有无特

解，图形有无特殊位置等等．据说著名数学家高斯在念小学二年级的时候，有一次老师出了一道算术题：

$$1+2+3+\cdots+99+100=?$$

当其他的小同学刚开始埋头演算的时候，高斯已得出正确的答案 5 050．老师惊奇地问高斯为什么计算得如此神速？原来高斯仔细观察了这道算式，发现 $1+100=2+99=\cdots=50+51=101$，100 个加数这样分成 50 组，故得数恰好为 $101\times50=5\,050$．可见，在动手解题之前，仔细观察题目的特点，对发现正确的解题方法是很有帮助的．

例 1 若 $(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$，则 x 与 y 有何关系？

解读 本题从两个角度来思考：

(1) 考察函数 $y=f(x)=(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x$．原不等式即为 $f(x)\geqslant f(-y)$．易知，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，故有 $x\geqslant-y$，因此得 $x+y\geqslant0$．

(2) 原不等式可化为

$$(\log_2 3)^x+(\log_5 3)^{-y}\geqslant(\log_2 3)^{-y}+(\log_5 3)^x. \quad ①$$

由此，可得 $$(\log_2 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}, \quad ②$$

或 $$(\log_5 3)^{-y}\geqslant(\log_5 3)^x. \quad ③$$

至少有一个成立．否则，有

$(\log_2 3)^x<(\log_2 3)^{-y}$，且$(\log_5 3)^{-y}<(\log_5 3)^x$ 同时成立．

这样，可得 $(\log_2 3)^x+(\log_5 3)^{-y}<(\log_2 3)^{-y}+(\log_5 3)^x$ 与①矛盾．由②、③均可得到 $x\geqslant-y$，即 $x+y\geqslant0$．

评注 思路(1)恰当运用了“构造法”，充分体现了函数思想，形成了 $f(x)\geqslant f(-y)$ 的模式，进而通过函数的单调性顺利解决．

思路(2)是考虑到同向不等式相加的性质．该性质不能够逆向推出．但由 $a+b>c+d$，可知：$a>c$ 或 $b>d$ 中至少有一个成立．当然，由 $a+b>c+d$，得到 $a>d$ 或 $b>c$ 至少有一个成立的情况也是类似的．

例 2 给定边长为 1 的正方形，将其各边三等分且过各分点按图所示的方法引线段，求阴影所示的正方形的面积．

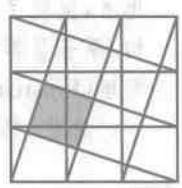


图 1-1

解读 设阴影所示的正方形的边长为 x，在图中，除 4 个边长为 x 的正方形外，尚有两直角边为 x 及 $\frac{x}{3}$ 的直角三角形，上、下底及高分别为 $\frac{2}{3}x$、x 及 x 的直角梯形各 4 个，它们可以拼成 4 个边长为 x 的正方形；还有上、下底及高分别为 $\frac{x}{3}$、$\frac{2x}{3}$ 及 x 的直角梯形 4 个，它们可以拼成 2 个边长为 x 的正方形．故图中的单位正方形(面积为 1)由 10 个边长为 x 的正方形组成，故边长为 x(即阴影所示)的正方形的面积为 $\frac{1}{10}$．

评注 这种图形割补、拼接方法，最为精彩．其次，本题也可以利用勾股定理列出方程：

$$x^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\text{，解得 }x^2=\frac{1}{10}.$$

例3 在实数范围内解方程

$$\frac{11x^2-6}{7-12x^2}=\sqrt{\frac{7x+6}{12x+11}}.$$

解读 按通常解法，两边平方、化简得

$$444x^5+467x^4-408x^3-444x^2+89x+102=0 \quad ①$$

为一完全五次方程，颇难用试探方法求其根. 但仔细观察方程的两边便可发现，如果令

$$f(x)=\frac{11x^2-6}{7-12x^2},\ \varphi(x)=\sqrt{\frac{7x+6}{12x+11}},$$

则 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 互为反函数. 事实上，令 $y=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}$，可得 $7y-12x^2y=11x^2-6$，或 $7y+6=(12y+11)x^2$，

$$x=\sqrt{\frac{7y+6}{12y+11}}.$$

$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 既然互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

故方程的解即两图象的交点有可能在直线 $y=x$ 上. 试令

$$y=x=\frac{11x^2-6}{7-12x^2},$$

即
$$12x^3+11x^2-7x-6=0, \quad ②$$

方程②的根都是方程①的根，利用综合除法就可求得方程的三个根为 -1，$-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$. 考虑到 $\varphi(x)\geqslant 0$，故 y 即 x 只能取非负值，将 $\dfrac{3}{4}$ 代入原方程中检验，知 $x=\dfrac{3}{4}$ 是方程的一解. 再将② 除 ①，得 $37x^2+5x-17=0$，解出其根并代入原方程检验，知尚有一根 $x=\dfrac{-5+11\sqrt{21}}{74}$.

例4 解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3, & ①\\ x^2+y^2+z^2=3, & ②\\ x^5+y^5+z^5=3. & ③\end{cases}$$

分析 一般的想法是利用对称多项式求解：

由 ①^2 − ② 得
$$xy+yz+zx=3. \quad ④$$
再由①,②,③,④推导出
$$xyz=1. \quad ⑤$$

于是 x, y, z 为三次方程 $t^3-3t^2+3t-1=0$ 的三根.

但在推导⑤式时需要较高的技巧,容易失败,读者不妨一试.

解读一 设 $xyz=a$,则 x, y, z 为三次方程 $t^3-3t^2+3t-a=0$ 的三根.因而有:$x^3-3x^2+3x-a=0$,

乘以 x^n,得
$$x^{n+3}-3x^{n+2}+3x^{n+1}-ax^n=0.$$
同理得
$$y^{n+3}-3y^{n+2}+3y^{n+1}-ay^n=0.$$
$$z^{n+3}-3z^{n+2}+3z^{n+1}-az^n=0.$$
三式相加,得
$$(x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3})-3(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2})+$$
$$3(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})-a(x^n+y^n+z^n)=0.$$
顺次令 $n=0$,得 $x^3+y^3+z^3=3a$.

$n=1$,得 $x^4+y^4+z^4=12a-9$.

$n=2$,得 $x^5+y^5+z^5=30a-27$.

由③,$x^5+y^5+z^5=3$,即得 $a=1$.

所以 x, y, z 是方程 $t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3=0$ 的根,即
$$x=y=z=1.$$
这个解法所需的技巧性较强.但如我们仔细观察①和②,就会发现:

①×2,得
$$2x+2y+2z=6, \tag{⑥}$$
②-⑥,得
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1=0,$$
即
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0. \tag{⑦}$$
由⑦显见方程组有且仅有一解 $x=y=z=1$.

通过观察,还可以得到以下两种解法:

解读二 注意到方程①与②的空间图象分别为平面和中心在原点、半径为 $\sqrt{3}$ 的球面的方程,它们相切于唯一的点(1, 1, 1).即知方程组只有唯一解 $x=y=z=1$.

解读三 令 $x+y+z=c=3$, $xy+yz+zx=b=3$, $xyz=a$,因 x, y, z 的任一对称多项式都可以表成 a, b, c 的多项式,故可设 $x^5+y^5+z^5=f(a, b, c)$.因 a 为三次式,$f(a, b, c)$ 中 a 的次数不能高于 1,将 $b=c=3$ 以及 $x^5+y^5+z^5=3$ 代入后,即得 $f(a, 3, 3)=\varphi(a)=3$,为一关于 a 的一次方程.故 a 最多只有一个值.今由观察易于发现,$x=y=z=1$ 是原方程组的一个解,这时 $a=1$.故 a 唯一的值是 1.从而 x, y, z 必为方程 $t^3-3t^2+3t-1=0$ 的根,只能是 $x=y=z=1$.

2. 归纳观察

在论证与自然数有关的一些命题时,常常通过对开头几个自然数的情况进行观察,猜想其可能的结果,然后再用数学归纳法或其他方法对所作的猜想给予严格的证明.

丹麦天文学家布拉赫(Brahe T.)耗费了毕生的精力,在大量观察的基础上积累了关于六大行星绕太阳公转的周期 P 和行星轨道的半长径 a 的精确资料,见下表:

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
a	0.387	0.723	1	1.524	5.203	9.539
P	0.241	0.615	1	1.881	11.862	29.458

表中 a 取天文单位,即地球到太阳的平均距离为计量单位;P 用年作为计量单位.天文学家开普勒(Kepler J.)通过对这些资料的反复观察研究,16 年后即在 1619 年终于发现了著名的行星运动第三定律:

$$a^3 = P^2.$$

由此足见开普勒的观察能力是何等敏锐.这个规律的发现,使开普勒荣获了"天空立法者"的美称.

例 5 求:

$$\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 3, & \cdots, & n, \\
2, & 3, & 4, & \cdots, & n+1, \\
3, & 4, & 5, & \cdots, & n+2, \\
\cdots & & & & \\
n, & n+1, & n+2, & \cdots, & 2n-1
\end{array}$$

这 n^2 个数的和.

分析 这个方阵中的每一个横行的 n 个数都是一个等差数列,可以直接利用等差数列的求和公式,求出每一横行的 n 个数之和,再把 n 个横行的和相加.

解读 第一横行的各数之和是 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

第二横行的各数之和是 $2+3+4+\cdots+(n+1)=\dfrac{n(n+3)}{2}$,

第三横行的各数之和是 $3+4+5+\cdots+(n+2)=\dfrac{n(n+5)}{2}$,

…

第 n 行的各数之和是 $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

再把以上 n 个和相加,即得到所给方阵中 n^2 个数的和

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+3)}{2}+\frac{n(n+5)}{2}+\cdots+\frac{n(3n-1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}[(n+1)+(n+3)+(n+5)+\cdots+(3n-1)] \\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{n[(n+1)+(3n-1)]}{2}=n^3.
\end{aligned}$$

评注 此题也可用更为简单的办法求解. 这个方阵的第一横行 n 个数的和是 $\frac{n(n+1)}{2}$，而第二横行中的每一个数，都比第一横行中相应的数大 1，所以第二横行各数之和比第一横行各数之和大 n，第三横行各数之和又比第二横行各数之和大 n，…，因此 n 个横行的各数之和依次组成一个首项是 $\frac{n(n+1)}{2}$，公差为 n 的等差数列，所以

$$S_n = n\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}n=n^3.$$

这种解法的关键在于从方阵中看出 n 个横行各数之和是等差数列. 若转移一下看问题的角度，从方阵的对角线考虑，则有

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\
2 & 3 & 4 & 5 & & n+1 \\
3 & 4 & 5 & 6 & & n+2 \\
4 & 5 & 6 & 7 & & n+3 \\
\cdots & & & & & \\
n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 \\
n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+2\times2+3\times3+4\times4+\cdots+n\cdot n+(n+1)(n-1)+\\
&\quad (n+2)(n-2)+\cdots+[n+(n-1)][n-(n-1)]\\
&=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n^2-1^2)+(n^2-2^2)+\cdots+[n^2-(n-1)^2]\\
&=n^2+n^2+\cdots+n^2=n^3.
\end{aligned}$$

由此可见，对数列求和问题的处理角度不同，会得到繁简程度悬殊的解法. 在求解具体问题时，我们应从多角度思考，尽量选择较好的解法.

例 6 确定 m^2+n^2 的最大值. 其中 m，n 为正整数，且 m，$n\in\{1, 2, \cdots, 2\,008\}$，$(n^2-mn-m^2)^2=1$.

解读 本题的条件极为隐晦，试先观察前几个满足 $(n^2-mn-m^2)^2=1$ 的 m，n 的情况. 通过简单的计算，不难发现：

$m=1$，$n=1$；$m=2$，$n=3$；$m=3$，$n=5$；$m=4$，n 不存在；$m=5$，$n=8$；$m=6$，n 不存在；…

通过观察可看出 m，n 取值的规律是：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots \quad ①$$

更进一步发现：

$$2=1+1,\ 3=1+2,\ 5=2+3,\ 8=3+5,\ \cdots$$

使我们进一步猜想，①可能是斐波纳契数列. 我们猜想 m、n 是两个相邻的斐波纳契数. 即有 u_3，u_4，…，u_k 存在：

$$1,\ 1,\ u_3,\ u_4,\ \cdots,\ u_k,\ m,\ n \quad ②$$

满足条件

$$n = m + u_k,\ m = u_k + u_{k-1},\ u_k = u_{k-1} + u_{k-2},\ \cdots,\ u_3 = 1 + 1.$$

我们的猜想是否正确？需要从条件 $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ 推出必有条件②. 现在目的明确，易于成功.

当 $n = m$，显然有 $m = n = 1$ 满足条件.

当 $n > m$，可令 $n = m + u_k$，便有

$$[(m+u_k)^2 - m(m+u_k) - m^2]^2 = 1,$$

化简后即得

$$(m^2 - mu_k - u_k^2)^2 = 1 \quad (m \geqslant u_k).$$

若 $m \neq u_k$，则再令 $m = u_k + u_{k-1}$，又得

$$(u_k^2 - u_k u_{k-1} - u_{k-1}^2)^2 = 1 \quad (u_k \geqslant u_{k-1}),$$

如此继续，总要出现 $u_2 = u_1 = 1$，即必然导致②. 所以 m，n 确为相邻的斐波纳契数. 问题至此全部解决. $\{1, 2, \cdots, 2\,008\}$中的斐波纳契数可依次写出，共有

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1\,597.$$

故 $m^2 + n^2$ 的最大值为 $987^2 + 1\,597^2 = 3\,524\,578$.

例 7 把自然数按顺序像发条一样排列成“方螺线形”（如图所示）进行观察，结果发现在方螺线形中，当中心数从 17 或 41 开始时，若从左下角到右上角画一条斜线，那么斜线上的数恰好都是质数. 以上命题正确吗？你能否加以说明.

33	32	31	30	29	
34	21	20	19	28	
35	22	17	18	27	
36	23	24	25	26	
37	38	39	40	41	42

57	56	55	54	53	
58	45	44	43	52	
59	46	41	42	51	
60	47	48	49	50	
61	62	63	64	65	66

图 1－2

分析 (1) 如果这斜线上的数全是质数，那么不断扩大“方螺线形”就可以不断地发现质数.

(2) 在这种情况下，找出方螺线形斜线上数的分布规律是非常有意义的.

解读 让我们来寻找方螺线形斜线上数的分布规律，设中心数为 a_0，先观察方螺线形各边上数的个数，并以此来计算边长，从起点开始，各边分别为

$$2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ \cdots$$

规律为每过两条边，边长增加 1.

以 $a = 17$ 为例，数 17 到 19 走过了两条长度为 2 的方螺线边长，前一条边上是 17、18，后一条边上是 18、19，如果我们把中心数 17 加上两边的长度得 $17+2+2$，因此实际上为要得到 19，需将 $17+2+2-2$.

同前，要从 19 到 23，需将 $19+3+3-2$；从数 23 到数 29，需将 $23+4+4-2$；等等.

将这个观察得到的规律用代数式表示出来为

$$a_1 = a_0 + 2 \times 2 - 2,$$
$$a_2 = a_1 + 3 \times 2 - 2,$$
$$a_3 = a_2 + 4 \times 2 - 2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n = a_{n-1} + (n+1) \times 2 - 2.$$

将这 n 个等式两边加起来得

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + 2[2+3+4+\cdots+(n+1)] - 2n \\ &= a_0 + 2 \cdot \left[\frac{2+(n+1)}{2} \cdot n\right] - 2n \\ &= a_0 + n(n+1). \end{aligned}$$

利用这个公式验证得：

(1) 取 $a_0 = 17$，当 $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$ 时，所得 a_n 共 16 个均是质数；

(2) 取 $a_0 = 41$，当 $n = 0, 1, 2, \cdots, 39$ 时，所得 a_n 共 40 个均是质数.

实际上，当 $n = a_0 - 1$ 时，$a_n = a_0 + (a_0 - 1)(a_0 - 1 + 1) = a_0^2$ 不是质数，因此从方螺线形斜线上得到的不全是质数. 有人验得，取 $a_0 = 41$，$n = 0, 1, 2, \cdots, 2\,397$ 时，从上述公式所得 2 398 个数中恰有一半是质数.

例 8 一个数列 $\{u_n\}$ 定义为：$u_0 = 2$，$u_1 = \frac{5}{2}$，$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$. 求证：对一切自然数 n，有 $[u_n] = 2^{\frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]}$. 这里 $[u_n]$ 表示不超过 u_n 的最大整数.

分析 $\{u_n\}$ 的定义是递推给出的，且结构复杂. 如能找出数列 $\{u_n\}$ 的非递推的通项公式，问题就好办了. 于是，我们对 $\{u_n\}$ 的前几个值进行观察：

$$u_0 = 2 \qquad\qquad = 2^0 + 2^{-0}$$

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \qquad\qquad = 2^1 + 2^{-1}$$

$$u_2 = \frac{5}{2}(2^2 - 2) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \qquad\qquad = 2^1 + 2^{-1}$$

$$u_3 = \frac{5}{2}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\right] - \frac{5}{2} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8} \qquad\qquad = 2^3 + 2^{-3}$$

$$u_4 = \frac{65}{8}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\right] - \frac{5}{2} = \frac{1\,025}{32} = 32\frac{1}{32} = 2^5 + 2^{-5}$$

$$\cdots$$

根据上面的观察，我们猜想有规律性：

$$u_n = 2^{s_n} + 2^{-s_n}. \tag{①}$$

从而 $[u_n] = 2^{s_n}$，与要证的结论相比较，应该有(实际运算知对 $n = 1, 2, 3, 4$ 是对的)：

$$s_n=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n].\qquad ②$$

由①与②,我们猜想:

$$u_n=2^{\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]}+2^{-\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]}.\qquad ③$$

现在利用数学归纳法证明③式成立.

证明 当 $n=1,2,3,4$,由前面已证③式成立.

假定对一切小于或等于 k 的自然数,③式已成立,则对 $n=k+1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}u_{k+1}&=u_k(u_{k-1}^2-2)-u_1,\\&=\left\{2^{\frac{1}{3}[2^k-(-1)^k]}+2^{-\frac{1}{3}[2^k-(-1)^k]}\right\}\times\left\{[2^{\frac{1}{3}[2^{k-1}-(-1)^{k-1}]}+2^{-\frac{1}{3}[2^{k-1}-(-1)^{k-1}]}]^2-2\right\}-\frac{5}{2}\\&=\left\{2^{\frac{1}{3}[2^k-(-1)^k]}+2^{-\frac{1}{3}[2^k-(-1)^k]}\right\}\times\left\{2^{\frac{2}{3}[2^{k-1}-(-1)^{k-1}]}+2^{-\frac{2}{3}[2^{k-1}-(-1)^{k-1}]}\right\}-\frac{5}{2}\\&=2^{\frac{1}{3}[2^{k+1}-(-1)^{k+1}]}+2^{-\frac{1}{3}[2^{k+1}-(-1)^{k+1}]}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{(-1)^k}-\frac{5}{2}\\&=2^{\frac{1}{3}[2^{k+1}-(-1)^{k+1}]}+2^{-\frac{1}{3}[2^{k+1}-(-1)^{k+1}]}.\end{aligned}$$

故③对一切自然数 n 成立.

所以 $[u_n]=2^{\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]}$.

3. 穷举观察

如果一个问题可能出现的情况不太多,而我们一时又未找到有效的解法,则不妨就这些为数不多的情况逐一试验,直接寻找解法.

例9 求方程 $2^w+2^x+2^y+2^z=20.625$,满足条件 $w>x>y>z$ 的整数解.

分析 由于 20.625 这个数不太大,$2^4<20.625<2^5$,w,x,y,z 都是整数且有 $w>x>y>z$ 的严格限制,将 20.625 写成 $2^w+2^x+2^y+2^z$ 的形式的可能情况不会太多,通过观察和直接试验找出方程的解应该说是可以办到的.

解读 因为 $2^4+2^3+\cdots>24>20.625$;

$2^4+2^2+2^1+\cdots>22>20.625$;

$2^4+2^2+2^0+\cdots>21>20.625$;

$2^4+2^2+2^{-1}+2^{-2}=20.75>20.625$;

$2^4+2^2+2^{-1}+2^{-3}=20.625$;

$2^4+2^1+2^0+2^{-1}=19.5<20.625$;

…

从试验中我们找出了方程的一个解:$w=4$, $x=2$, $y=-1$, $z=-3$. 而且还告诉我们方程不会再有另外的解. 可从 w 开始逐一检验.

若 $w \neq 4$,则必 $w \leqslant 3$ 或 $w \geqslant 5$.
当 $w \geqslant 5$,则 $2^w + 2^x + 2^y + 2^z > 2^5 = 32$.
当 $w \leqslant 3$,则 $2^w + 2^x + 2^y + 2^z \leqslant 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$.
两种情况均引出矛盾,故必 $w = 4$,用 $w = 4$ 代入原方程后,原方程化为:

$$2^x + 2^y + 2^z = 4.625.$$

用类似的讨论方法可决定 $x,\ y,\ z$.

例 10 试确定方程 $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$ 的解集.

解读 记 $f(x)=3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}$, $g(x)=\dfrac{120}{x}$.

显然有 $x>0$,且有 $f(5)=g(5)$,即 5 是方程 $f(x)=g(x)$ 的一个根.
下面我们证明 5 是方程 $f(x)=g(x)$ 的唯一的一个根.
容易证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数,$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数.
若方程 $f(x)=g(x)$ 除了 5 以外还有另一根 x_0,
当 $x_0>5$ 时,$f(x_0)>f(5)$, $g(x_0)<g(5)$,故 $f(x_0)>g(x_0)$;
当 $x_0<5$ 时,$f(x_0)<f(5)$, $g(x_0)>g(5)$,故 $f(x_0)<g(x_0)$;
所以 x_0 不是方程 $f(x)=g(x)$ 的根,即 5 是方程 $f(x)=g(x)$ 的唯一的一个根.

例 11 求证:形如 $N=\underbrace{44\cdots4}_{n个}\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)个}9$ 的数必是完全平方数.

分析 先就 n 进行系统观察:

$$n=1,\ N=49=7^2;$$

$$n=2,\ N=4\,489=67^2;$$

$$n=3,\ N=444\,889=667^2;$$

$$n=4,\ N=44\,448\,889=6\,667^2.$$

因此猜想

$$N=(\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)个}7)^2.$$

得到这样一个猜想后,证明就有了目标,探索证明途径就较为容易.

解读 实际上

$$\begin{aligned}N&=\underbrace{44\cdots4}_{n个}\underbrace{88\cdots8}_{n个}+1\\&=4\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times10^n+8\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}+1,\end{aligned}\qquad①$$

而

$$\begin{aligned}(\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)个}7)^2&=(\underbrace{66\cdots6}_{n个}+1)^2=(6\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}+1)^2\\&=36\times(\underbrace{11\cdots1}_{n个})^2+12\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}+1,\end{aligned}\qquad②$$

比较①②，记

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个}=A.$$

逐步将①凑成②：

$$\begin{aligned}N&=(4\times10^nA-4A)+12A+1\\&=4A(10^n-1)+12A+1\\&=4A\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+12A+1\\&=4A\times9A+12A+1\\&=36A^2+12A+1.\end{aligned}$$

与②式完全相同.

例 12 将 1 到 9 九个数字分别填在右下图的九个方格里，每格填一个数字，要使每一横行、每一纵行和两条斜对角线上三个数字之和相等，应该怎样填?

分析 这样的数字图称为纵横图，由于每行、每列都是三个数，所以称为三阶纵横图.

解读 1 到 9 九个数字之和为 45，由于每行数字和相等，所以每行、每列或对角线上三数字之和均为 15.

现在对由数字 1 到 9 中三个数组成和为 15 的各种情况进行穷举观察，共有下列八种情况：

图 1－3

$9+5+1$，$9+4+2$；

$8+6+1$，$8+5+2$，$8+4+3$；

$7+6+2$，$7+5+3$；

$6+5+4$.

其中在各和式中出现四次的数是 5，出现三次的数是 8、6、4、2，出现两次的数是 9、7、3、1.

现在对方格图进行观察. 由于三行、三列、两对角线正好是八条线，分别与上面的八组数对应，其中中心一格有四条线经过，也就是这一格中的数必在上列四个等式中出现，因此这个数只能是 5，又四角上每个角有三条线经过，因此角上的每一个数必在上列三个等式中出现，这四个数是 8、6、4、2，这样确定以后，再按上列八个等式分别填满各空格，答案如右图所示.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 1－4

例 13 求方程

$$1!+2!+\cdots+m!=n^2$$

的正整数解.

解读 记 $$1!+2!+\cdots+m!=S_m,$$

就 m 的值对 S_m 进行系统观察.

$$m=1,\ S_1=1!=1;$$

$$m=2,\ S_2=1!+2!=3;$$

$$m=3,\ S_3=1!+2!+3!=9;$$

$$m=4,\ S_4=1!+2!+3!+4!=33;$$

$$m=5,\ S_5=1!+2!+3!+4!+5!=153;$$

$$m=6,\ S_6=1!+2!+\cdots+6!=873;$$

$$m=7,\ S_7=1!+2!+\cdots+7!=5\,913.$$

上面除 $m=1$，3 时 $S_1=1^2$，$S_3=3^2$ 外，其余 S_2，S_4，S_5，S_6，S_7 都不是完全平方数，观察这些数的特点可以发现末位数全为 3，这是什么原因？让我们对 $m!$ 作一系统观察.

$1!=1$	$5!=120$
$2!=2$	$6!=720$
$3!=6$	$7!=5\,040$
$4!=24$	$8!=40\,320$

由于 5! 末位数为 0，因此当 $m\geqslant 5$ 时，$m!$末位必全为 0，而

$$1!+2!+3!+4!=33,$$

所以　当 $m\geqslant 4$ 时，S_m 的末位数都是 3.

那么末位数是 3 的数能否为完全平方数？

今试对完全平方数的末位数进行穷举观察如下.

N 的末位数	N^2 的末位数
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

显然完全平方数的末位数可能为 0，1，4，5，6，9，不可能为 2，3，7，8.

所以本题只有两组正整数解：