硕士研究生入学考试辅导丛书

主编：秦静 张光明 祝精美

主审：陈广桐

# 线性代数 例题 习题 试题 与解答


西北工业大学出版社

工科硕士研究生入学考试辅导

# 线性代数例题习题试题与解答

主编　秦　静　张光明　祝精美
主审　陈广桐

西北工业大学出版社
2000年5月　西安

（陕）新登字 009 号

【内容摘要】 本书是参照1993年全国《工科数学课程教学基本要求》及国家教委1996年修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试线性代数考试大纲的要求编写的。全书包括线性代数的基本概念、基本定理和基本解（证）题方法，综合练习题，1987－1998年考研线性代数试题汇编及模拟试题。它有助于读者全面、系统地复习、巩固并加深线性代数知识，掌握解题方法与技巧，提高解题及应试能力。

线性代数例题习题试题与解答
主　　编　秦静　张光明　祝精美
责任编辑　李　杰
责任校对　钱伟峰　耿明丽


（邮编：710072　西安市友谊西路127号　电话：8493844）
全国各地新华书店经销
西安市向阳印刷厂印装
ISBN 7－5612－1246－1/O・164
*
开本：850毫米×1168毫米　1/32　印张：10.625　字数：267千字
2000年5月第1版　　2000年5月第1次印刷
印数：1－5 000册　　定价：13.00元

# 序　言

有一位著名的数学家曾说过:学习数学如果不做习题,犹如入宝山而空返。的确,数学的理论学习必须经过实践环节,通过大量例题的示范和习题的演算,学习才可能深入踏实。

大学数学是工科、经济、农医乃至部分文科类院校的公共基础课,而线性代数是大学数学的重要组成部分,在学习过程中不少学生感到做习题无从下手,甚至望而却步,因为线性代数的内容概念纷纭,方法繁杂,难以把握要领。

本书是根据编写者的多年教学实践及考研辅导经验写成的,它不同于其他同类书,具有明显的特点:

第一、紧密配合概念、定理与方法的学习,将习题分为若干类型,以理论为中心,以方法为指导,带动习题的配置,使读者有章可循,有据可考。本书分为五大部分,概括了线性代数的主要内容,并先将相应的理论部分加以概述,然后编有适当的例题和习题。

第二、难度层次处理恰当。书中习题除每章的练习题外,设有综合练习题,处理一些较难的问题。

第三、应试性好。书中附有 1987—1999 年以来历年考研试题并编写了五份模拟试卷,包含填空、选择、计算、证明等题型,并附有所有习题答案。这些对于有志于投考硕士研究生的人来说是大有裨益的,也有助于在校低年级学生学习。

总之,本书是线性代数方面的一本有特色的参考书,它的出版,必然在线性代数的教与学中发挥愈来愈大的作用,成为读者的良师益友。

李师正

2000.1　于济南

# 前　　言

线性代数是高等理工院校一门重要的基础理论课程。由于科学技术的迅猛发展和计算机技术的日益普及与提高,学好线性代数这门课程变得更为重要和迫切了。随着对线性代数教学要求的提高和内容的增多,线性代数教与学的难度也在增加,主要表现在:内容多,定理多,方法多,高度的抽象性及教学学时的相对减少。针对这些问题,编者根据多年从事线性代数教学及研究生入学考试考前辅导班的教学经验及长期批阅考研统考试卷的启示,参照全国《工科教学课程教学基本要求》及国家教委修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试线性代数考试大纲的要求编写了本书。

本书共分五个部分。第一部分为线性代数基本内容,包括基本概念、基本定理、基本解(证)题方法。通过典型例题,系统、全面地介绍线性代数的解题与证题的方法和技巧,并对这些方法和技巧进行了归纳和小结,每章末都附有大量的练习题;第二部分为线性代数综合练习题,这一部分是对第一部分的补充和提高,收集了国内教科书中常用的有一定难度的题目;第三部分为 1987—1998 年考研线性代数试题汇编;第四部分为模拟试题;第五部分为练习题、综合练习题及试题的提示详细解答与答案。最后附有 1999 年硕士研究生入学考试数学试卷、参考解答及评分标准(数学一～数学四)。

本书约收集了 650 道题目,每道题目都给出了详细解答,有些题目还给出了多种解法。本书涵盖了工科线性代数的全部内容及解(证)题方法与技巧,它有助于读者全面系统地复习、巩固并加深

线性代数知识，提高解（证）题及应试能力，是学习线性代数课程时的一本有益的参考书，更是备考硕士研究生入学考试的一本好书。

本书由秦静、张光明、祝精美主编。参加编写工作的有：秦静、郑修才、祝精美、叶宏、王玮、张光明、王自力、王镇英等老师。由陈广桐教授主审。本书由山东师范大学数学系系主任李师正教授作序，在编写过程中还得到了许多同行教师的关心和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于水平和经验，疏漏和不足之处在所难免，恳请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

1999 年 9 月

# 目　　录

# 第一部分　线性代数基本内容及例题选讲

## 第一章　行　列　式

### 一、基本概念

排列　逆序数　代数余子式　$n$ 阶行列式

### 二、特殊行列式的计算公式

1. 对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（未写出的部分均为 0）

2. 三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$　（未写出的部分均为 0）

3. 斜三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & & \iddots & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \quad \text{(未写出的部分均为 0)}$$

要注意这里的符号为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，不能简单地以 $n$ 的奇偶性来决定．如 $n=4,5$ 都取正号，但当 $n=6$ 时，却取负号．

4．范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

$\Pi$ 表示连乘号．关于范德蒙行列式，有三点说明：

①形式：范德蒙行列式从第一行至第 $n$ 行是按升幂排列的，而且每次递升的幂次相同，即幂指数成等差数列．

②结果：$n$ 阶范德蒙行列式为$\frac{n(n-1)}{2}$项形如 $x_i-x_j$ 的乘积，其中 $i>j$.

③$x_i-x_j$ 可正、可负，可为零，只要求 $i>j$.

5．奇数阶反对称行列式的值为零，即

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (n \text{ 为奇数})$$

反对称行列式的特征有两个：

①主对角线上的数全为零．

②以主对角线为对称轴，两侧的数大小相等，符号相反.

三、行列式的性质

**性质1** 行列式经转置后其值不变，即 $D^T=D$.

**性质2** 行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值改变符号.

**推论** 如果行列式中两行(列)的对应元素完全相同，则该行列式的值等于零.

**性质3** 用数 $k$ 乘行列式某一行(列)中所有元素，等于用 $k$ 乘此行列式.

**推论** 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则此公因子可以提到行列式外面.

**性质4** 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

**性质5** 如果行列式某行(列)的元素都是两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和.

**性质6** 如果在行列式某一行(列)的元素上加上另一行(列)对应元素的 $k$ 倍，则行列式的值不变.

**性质7** $n$ 阶行列式 $D$ 等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(1\leqslant j\leqslant n)$$

**推论** $n$ 阶行列式 $D$ 的任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\qquad(i\neq s)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\qquad(j\neq t)$$

**性质8** 若 $A,B$ 为同阶方阵，则

$$|AB|=|A||B|$$

关于性质8，应特别注意 $A,B$ 必须为同阶方阵.

## 四、典型例题与基本解题方法

### （一）逆序数的求法

**例 1** 求排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性：

(1) $(2n)1(2n-1)2(2n-2)3\cdots(n+1)n$

(2) $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)$

分析：(1) 1 前面有 1 个比它大的数 $2n$，2 前面有两个比它大的数 $2n$ 及 $2n-1$，…，$n$ 前面有 $n$ 个比它大的 $2n,2n-1,\cdots,n+1$；$2n$ 前面没有比它大的数，$2n-1$ 前面有 1 个比它大的数 $2n$，$2n-2$前面有 2 个比它大的数 $2n$ 及 $2n-1$；…，$n+1$ 前面有$n-1$个比它大的数 $2n,2n-1,\cdots,n+2$；由此分析即可求出逆序数．

(2) $1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)$不构成任何逆序，只需讨论 $2,4,\cdots 2n$ 之间构成的逆序．同(1)一样分析．

**解** (1) 逆序数为

$(1+2+\cdots+n)+(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1)+n=n^2$

且排列的奇偶性与 $n$ 的奇偶性相同．

(2) 逆序数为

$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$为偶数，从而排列为偶排列；

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$为奇数，这时排列为奇排列．

**例 2** 设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 $k$，求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数．

**解** 显然，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任两个不同的 $x_i$ 与 $x_j$，必在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中构成逆序，而且只能在一个中构成逆序．因此，这两个排列的逆序数之和为从 $n$ 个元素中任取两个不同元素的组合数 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 由 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 $k$ 知排列

$x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

**例 3** 在六阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带什么符号？

**解法 Ⅰ** 对换项中元素的位置，使每项所对应的行标为自然顺序，即改写成

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$

此时，列标排列为 431265，逆序数为 6，是偶排列．故项

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$$

前应带正号．

**解法 Ⅱ** 该项行标与列标排列分别为

234516　　312645

逆序数分别为 4，4，故该项前应带正号．

**例 4** 写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 $a_{23}a_{32}$ 的项．

**解** 设这样的项为 $a_{1i}a_{23}a_{32}a_{4j}$，其行标为自然顺序，要使其带负号，必须要求列标排列 $i\ 3\ 2\ j$ 为奇排列．

因 $i, j$ 只能取 1，4，故满足条件的排列仅有一个，1 3 2 4，对应的项为 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

（二）行列式的计算方法

1．二、三阶行列式的计算

对二、三阶行列式，可使用展开公式计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

也可利用行列式的性质计算．

**例 5** 设 $\alpha, \beta, \gamma$ 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根，求行列式

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}$$

的值.

**解 I** （利用展开式计算）

因为 $\alpha,\beta,\gamma$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，故有

$$\alpha^3=-p\alpha-q$$
$$\beta^3=-p\beta-q$$
$$\gamma^3=-p\gamma-q$$

及 $$x^3+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

对比上式两边同次幂的系数，得：

$$\underline{\alpha+\beta+\gamma=0}\qquad \underline{\alpha\beta\gamma=-q}$$

从而

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=$$

$$-p(\alpha+\beta+\gamma)-3q+3q=0$$

**解 II** （利用行列式的性质计算）

因为 $\alpha,\beta,\gamma$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，故有

$$x^3+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

对比两边同次幂的系数，得：

$$\alpha+\beta+\gamma=0\quad \alpha\beta\gamma=-q$$

从而 $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3}{=\!=\!=}$

$$\begin{vmatrix}\alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0$$

2. $n$ 阶行列式的典型计算方法($n\geqslant 3$)

(1) 利用性质将行列式化为三角形行列式或降阶后计算

**例 6** 求 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

**解** $D_4 \xlongequal[r_4-ar_2]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c-b \\ 0 & b & c-a & d-ab \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & c-b \\ b & c-a & d-ab \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-br_1]{r_2-r_1}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & c-a-b \\ 0 & c-a-b & d-2ab \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}$$

$$-\begin{vmatrix} -2 & c-a-b \\ c-a-b & d-2ab \end{vmatrix}=$$

$$2(d-2ab)+(c-a-b)^2=$$
$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc+2d$$

注：一边化简行列式，一边将行列式按行或列展开将行列式降阶，这种方法有助于计算行列式．

**例 7** 求 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

**解** $D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} =$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2\sim n]{r_i-br_1}$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} =$$

$$[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

这一行列式的特点是只有两个数，主对角线上的数全为 $a$，其它位置上的数全为 $b$，根据这一特点采用方法：将第 2 至第 $n$ 行（列）都加到第 1 行（列）上去，从而第 1 行（列）变成相同的数，进一步将该行列式化为三角形行列式求出其值．这类题目，用这种方法计算是最简便的．1997 年考研题中就有这样一题：

$$A_n=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix},\ |A_n|=\underline{(n-1)(-1)^{n-1}}$$

利用例 2 介绍的方法,立即得出:

$$|A_n|=(-1)^{n-1}(n-1)$$

**例 8** 求 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\a_1&1+a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&1+a_{n-1}&a_n\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1+a_n\end{vmatrix}$

**解 I** 此题可仿照例 7,将第 2 列至第 $n$ 列都加到第 1 列上去做.(略)

**解 II** $D_n\xlongequal[\substack{\cdots\\ r_2-r_1}]{\substack{r_n-r_{n-1}\\ r_{n-1}-r_{n-2}}}$

$$\begin{vmatrix}1+a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\-1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

$$\begin{vmatrix}1+a_1+\cdots+a_n&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}$$