法兰西数学
精品译丛

解析函数论初步

□ H. 嘉当 著
□ 余家荣 译

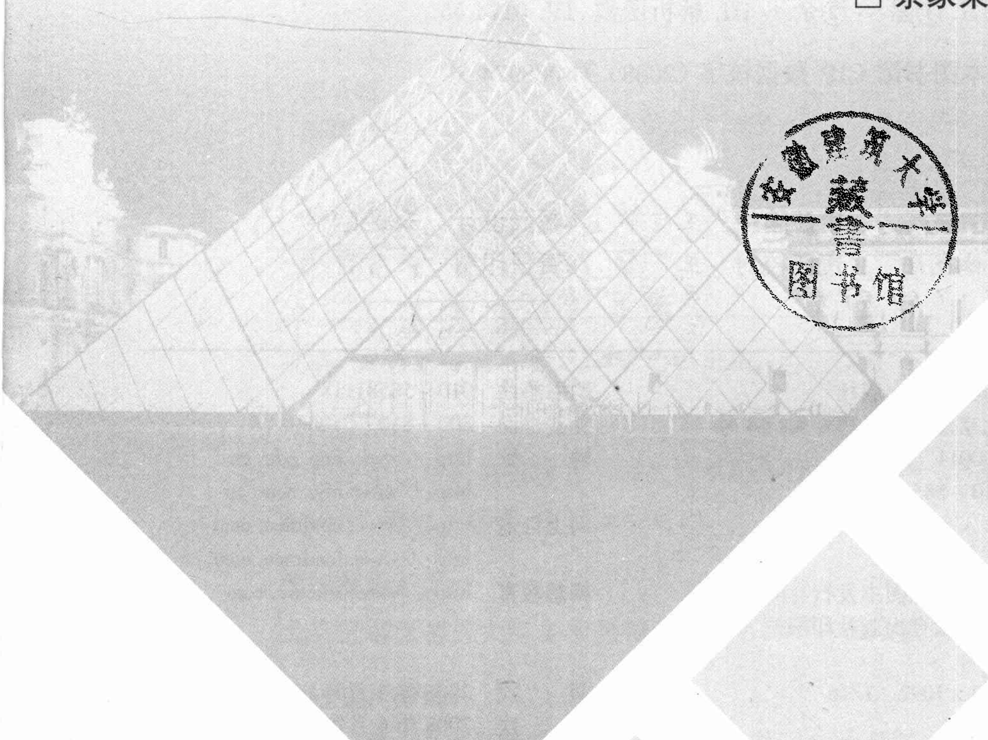
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

法兰西数学精品译丛

数学天元基金资助项目

解析函数论初步

□ H. 嘉当 著
□ 余家荣 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

法兰西数学精品译丛

书名	作者
*解析函数论初步	H. 嘉当
微分学	H. 嘉当
广义函数论	L. 施瓦尔兹
微分几何	M. 伯杰
	B. Gostiaux
拓扑学教程	G. 肖盖
代数教程	R. 戈德曼
谱分析	J. 迪斯米埃
拟微分算子	Serge ALINHAC
	Patrick G′ ERARD
解析数论	Gérald Tenenbaum
概率与位势	Claude Dellacherie
	Paul-Andre Meyer

说明: 此为第一批书单, 加*者已经出版.

订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购. 书款通过邮局汇款或银行转账均可. 购书免邮费, 发票随后寄出.

通过邮局汇款:

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部　　邮政编码: 100011

通过银行转账:

单位名称: 北京高等教育沙滩读者服务部　　开户行: 北京银行德外支行

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电话: 010-58581115, 010-58581114, 010-58581116, 010-58581115, 010-58581114

传真: 010-58581113

郑 重 声 明

目录

第一章　单变量幂级数

§1. 形式幂级数

1. 多项式代数

设 K 为一交换域. 考虑一个字母 (或 "未知量") X 的形式多项式, 其系数在 K 中 (暂时还谈不上给出 X 的值). 考虑两多项式相加及一多项式乘以一个 "纯量" (即乘以 K 中一元素) 这两种运算, 可使多项式集 $K[X]$ 成为一个 K 上的**向量空间**, 其无穷基为

$$1,\ X,\ \cdots,\ X^n,\ \cdots.$$

每个多项式是 X^n 的一个有限线性组合, 其系数在 K 中, 并且可写作 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 这里约定系数 a_n 的无穷序列中除去有限个外全为零. 由乘法表

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

可定义在 $K[X]$ 中的乘法, 乘积

$$\left(\sum_p a_p X^p\right) \cdot \left(\sum_q b_q X^q\right)$$

为 $\sum\limits_n c_n X^n$, 其中

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q. \tag{1.1}$$

这种乘法满足交换律和结合律. 它还是双线性的, 亦即无论怎样的多项式 P, P_1, P_2, Q 及纯量 λ,

$$\begin{cases} (P_1 + P_2) \cdot Q = P_1 Q + P_2 Q, \\ (\lambda P) \cdot Q = \lambda \cdot (PQ). \end{cases} \tag{1.2}$$

这种乘法以多项式 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 作为单位元素 (记作 1), 其中 $a_0 = 1$, 并且对于 $n > 0, a_n = 0$. 为了表述所有这些性质, 我们说 $K[X]$ 加上其向量空间结构及其乘法, 就是在域 K 上具有单位元素的一个**交换代数**; 特别, 这是一个有单位元素的交换环.

2. 形式级数代数

X 的形式幂级数是形式表达式 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, 在这里我们不必再设系数 a_n 除去其中有限个外都为零. 我们定义两个形式级数的和为

$$\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \right) + \left(\sum_{n \geqslant 0} b_n X^n \right) = \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n, \quad \text{其中 } c_n = a_n + b_n,$$

还定义形式级数与纯量的积为

$$\lambda \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \right) = \sum_{n \geqslant 0} (\lambda a_n) X^n.$$

这样, 形式级数的集 $K[[X]]$ 形成在 K 上的一个向量空间. 我们用 0 记加法的零元素; 它就是系数全为零的形式级数.

两个形式级数的积仍由公式 (1.1) 定义, 这公式还有意义是由于其右边只有有限项相加. 乘法还满足交换律及结合律, 并且对于向量空间的结构是双线性的. 这样, $K[[X]]$ 是在域 K 上的代数, 其单位元素 (记作 1) 为级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, 其中 $a_0 = 1$, 而对 $n > 0, a_n = 0$.

代数 $K[X]$ 是 $K[[X]]$ 的一个子代数, 即只有有限个系数不为零的形式级数的代数.

3. 形式级数的阶

设 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$. 为了简单起见, 把它记作 S. 这级数的**阶** $\omega(S)$ 是一整数, 并且只有在 $S \neq 0$ 时有定义: 它是使 $a_n \neq 0$ 的最小的 n. 如果一个形式幂级数 S 是 0, 或者如果 $\omega(S) \geqslant k$, 那么我们说 S 的阶 $\geqslant k$. 虽然当 $S = 0$ 时, $\omega(S)$ 没有定义, 可是为了方便起见, 我们仍然写 $\omega(S) \geqslant k$.

注意 我们可约定 $\omega(0)=+\infty$. 满足 $\omega(S)\geqslant k$ (k 是已给整数) 的 S 就是这样的级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$, 当 $n<k$ 时, $a_n=0$. 它们组成 $K[[X]]$ 的一个子向量空间.

定义 已给形式幂级数族 $(S_i(X))_{i\in I}$, 其中 I 表示一个附标集. 如果对于任何整数 k, 除了对于有限个附标 i 外, 我们有 $\omega(S_i)\geqslant k$, 那么 $(S_i(X))_{i\in I}$ 称为**可和的**. 一族形式幂级数

$$S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}X^n$$

的**和**定义为级数

$$S(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n,$$

其中对于每个 $n, a_n=\sum\limits_i a_{n,i}$. 因为根据假设, 对于给定的 n, 除了对于 i 的有限个值外, $a_{n,i}$ 为零, 所以上述和式有意义. 形成可和族的形式幂级数的加法运算, 推广了由 $K[[X]]$ 的向量结构所确定的有限个形式幂级数的加法. 这种广义加法满足交换律及结合律, 其意义请读者精确叙述.

由可和族概念可以回过头来说明形式记号 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$ 是合适的. 事实上, 我们约定把对于 $n\neq p$, 满足 $a_n=0$ 的形式级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$ 称为 p 次**单项式**, 并把它记作 a_pX^p. 单项式族

$$\{a_nX^n\}_{n\in N}$$

(N 表示 $\geqslant 0$ 的整数集) 显然是可和的, 它的和就是形式级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$.

注意 两形式幂级数的积 (乘积)

$$\left(\sum_p a_pX^p\right)\cdot\left(\sum_q b_qX^q\right)$$

就是一可和族的和, 这族是由所有下列形状的积组成的:

$$(a_pX^p)\cdot(b_qX^q)=(a_pb_q)X^{p+q},$$

其中第一个及第二个乘式分别是第一个及第二个级数中的单项式.

命题 3.1 环 $K[[X]]$ 是一整环 (这就是说, 从 $S\neq 0$ 及 $T\neq 0$ 可推出 $ST\neq 0$).

证明 设 $S(X)=\sum\limits_p a_pX^p$ 及 $T(X)=\sum\limits_q b_qX^q$ 不为零. 设 $p_0=\omega(S), q_0=\omega(T)$; 设

$$S(X)\cdot T(X)=\sum_n c_nX^n.$$

我们显然有: 对于 $n < p_0 + q_0, c_n = 0, c_{p_0+q_0} = a_{p_0} b_{q_0}$. 因为 K 是一个域, 并且 $a_{p_0} \neq 0, b_{q_0} \neq 0$, 所以我们有 $c_{p_0+q_0} \neq 0$, 从而 $S \cdot T$ 不为零. 我们还证明了: 对于 $S \neq 0, T \neq 0$, 有

$$\omega(ST) = \omega(S) + \omega(T). \tag{3.1}$$

注意 我们可以考虑形式级数, 其系数在具有单位元素的交换环 A 内, 而不必在域 K 内. 用上述方法也可证明: 如果 A 是整环, 那么 $A[[X]]$ 也是整环.

4. 一个形式级数代入另一形式级数

考虑两个形式级数

$$S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n, \quad T(Y) = \sum_{p \geqslant 0} b_p Y^p.$$

假定 (这是主要的) $b_0 = 0$, 换句话说, $\omega(T) \geqslant 1$. 相应于每一单项式 $a_n X^n$, 作形式级数 $a_n (T(Y))^n$; 这个式子之所以有意义, 是由于 Y 的形式级数形成一个代数. 因为 $b_0 = 0$, 所以 $a_n (T(Y))^n$ 的阶 $\geqslant n$; 从而 $a_n (T(Y))^n$ 的族 (当 n 取值 $0, 1, \cdots$ 时) 是可和的, 并且我们可以考虑形式级数

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (T(Y))^n, \tag{4.1}$$

其中含 Y 的各项要重新组合. 这个 Y 的形式级数称为在 $S(X)$ 中用 $T(Y)$ **代换** X 而得, 把它记作 $S(T(Y))$; 如果不指定未知量的名称 Y, 也可把它记作 $S \circ T$. 请读者证明下列关系式:

$$\begin{cases} (S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T, \\ (S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T), \ 1 \circ T = 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

但要注意 $S \circ (T_1 + T_2)$ 一般不等于 $S \circ T_1 + S \circ T_2$.

关系式 (4.2) 表明, 对于给定的 T (其阶 $\geqslant 1$), 映射 $S \to S \circ T$ 是从环 $K[[X]]$ 到环 $K[[Y]]$ 的一个同态, 它把单位元素 1 变成 1.

注意 如果在 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 中代入零, 我们就得到只含“常数项”的形式级数 a_0.

如果有形式级数 S_i 的可和族, 并且如果 $\omega(T) \geqslant 1$, 那么 $S_i \circ T$ 的族也是可和的, 并且有

$$\left(\sum_i S_i \right) \circ T = \sum_i (S_i \circ T), \tag{4.3}$$

这推广了 (4.2) 中第一个关系式, 实际上, 设

$$S_i(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n,i} X^n,$$

我们有

$$\sum_i S_i(X) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_i a_{n,i}\right) X^n,$$

由此得

$$\left(\sum_i S_i\right)\circ T = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_i a_{n,i}\right)(T(Y))^n, \tag{4.4}$$

而

$$\sum_i S_i \circ T = \sum_i \left(\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}(T(Y))^n\right). \tag{4.5}$$

要证明 (4.4) 及 (4.5) 的右边相等, 我们注意, 在两式中, Y 的任一乘幂的系数只含有限个 $a_{n,i}$, 然后只需应用域 K 中 (有限) 加法的结合律.

命题 4.1 只要 $\omega(T)\geqslant 1$, $\omega(U)\geqslant 1$, 我们有关系式

$$(S\circ T)\circ U = S\circ(T\circ U) \quad (\text{代换的结合律}). \tag{4.6}$$

证明 (4.6) 的两边有意义. 由 (4.2) 中第二个关系式, 对 n 递推可得

$$T^n\circ U = (T\circ U)^n. \tag{4.7}$$

因此当 S 是单项式时, (4.6) 的两边相等.

由此, 并且把级数 S 看作 (无穷个) 单项式的和 $\sum\limits_n a_n X^n$, 可推出 (4.6) 在一般情况下成立: 由定义, 我们有

$$S\circ T = \sum_{n\geqslant 0} a_n T^n,$$

又由 (4.3), 有

$$(S\circ T)\circ U = \sum_{n\geqslant 0} a_n (T^n\circ U);$$

而由 (4.7), 上式右边等于

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (T\circ U)^n = S\circ(T\circ U).$$

证完.

5. 形式级数的倒级数

在环 $K[[Y]]$ 中, 我们有恒等式

$$(1-Y)(1+Y+\cdots+Y^n+\cdots) = 1, \tag{5.1}$$

其证明不难作出. 因此级数 $1-Y$ 在 $K[[Y]]$ 中有逆元素, 称为它的**倒级数**.

命题 5.1 要使 $S(X)=\sum\limits_n a_nX^n$ 对于 $K[[X]]$ 的乘法有逆元素, 必须而且只需 $a_0\neq 0$, 亦即 $S(0)\neq 0$.

证明 条件是必要的, 因为如果

$$T(X)=\sum_n b_nX^n \quad \text{并且} \quad S(X)T(X)=1,$$

我们有 $a_0b_0=1$, 从而 $a_0\neq 0$. 相反地, 假定 $a_0\neq 0$, 我们要证明 $(a_0)^{-1}S(X)=S_1(X)$ 有一逆元素 $T_1(X)$, 从而可推出 $S(X)$ 有逆元素 $(a_0)^{-1}T_1(x)$. 可是

$$S_1(X)=1-U(X), \quad \omega(U)\geqslant 1;$$

因此我们可在关系式 (5.1) 中用 $U(X)$ 代替 Y, 从而 $1-U(X)$ 有一逆元素. 证完.

注意 我们已经把多项式代数 $K[X]$ 开拓成形式级数代数 $K[[X]]$. 可以看出, 任何满足 $Q(0)\neq 0$ 的多项式 $Q(X)$ 在环 $K[[X]]$ 中有逆元素, 因此这环包含所有商式 $P(X)/Q(X)$, 其中 P 及 Q 是多项式, 而且 $Q(0)\neq 0$.

6. 形式级数的导数

设 $S(X)=\sum\limits_n a_nX^n$. 作为定义, **导级数** $S'(X)$ 由下列公式给出:

$$S'(X)=\sum_{n\geqslant 0} na_nX^{n-1}. \tag{6.1}$$

我们也可把导数 S' 写作 $\dfrac{dS}{dX}$ 或 $\dfrac{d}{dX}S$. (有限或无穷) 和的导数等于导数的和. 映射 $S\to S'$ 是从 $K[[X]]$ 到其本身的线性映射. 此外, 两形式级数的积的导数由下列公式给出:

$$\frac{d}{dX}(ST)=\frac{dS}{dX}T+S\frac{dT}{dX}. \tag{6.2}$$

实际上, 只需在 S 及 T 为单项式的特殊情形下证明这一公式, 而这是可以立即证明的.

如果 $S(0)\neq 0$, 设 T 是 S 的倒级数 (参看第 5 段). 由公式 (6.2) 得

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{1}{S}\right)=-\frac{1}{S^2}\frac{dS}{dX}. \tag{6.3}$$

我们可递推定义形式级数的**逐次导数**. 如果 $S(X)=\Sigma a_nX^n, n$ 阶导数是

$$S^{(n)}(X)=n!a_n+\text{ 次数 }\geqslant 1\text{ 的各项}.$$

因此有

$$S^{(n)}(0)=n!a_n, \tag{6.4}$$

这里 $S^{(n)}(0)$ 表示在 $S^{(n)}(X)$ 中, 用级数 0 代换 X 而得的结果.

7. 反级数

由 $I(X) = X$ 所定义的级数 $I(X)$ 对形式级数的复合是**中性元素**:

$$S \circ I = S = I \circ S.$$

命题 7.1 设已给形式级数 S, 要使得存在形式级数 T, 满足

$$T(0) = 0, \quad S \circ T = I, \tag{7.1}$$

必须而且只需

$$S(0) = 0, \quad S'(0) \neq 0. \tag{7.2}$$

如果是这样, T 是唯一的, 并且我们有 $T \circ S = I$; 换句话说, T 是 S 对复合法则 $\circ$ 的逆.

证明 设 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, $T(Y) = \sum\limits_{n \geqslant 1} b_n Y^n$. 如果我们有

$$S(T(Y)) = Y, \tag{7.3}$$

由两边相应项系数相等即得

$$a_0 = 0, \quad a_1 b_1 = 1. \tag{7.4}$$

因此条件 (7.2) 是必要的.

假定条件 (7.2) 成立. 令 (7.3) 左边中 Y^n 的系数为 0, 这一系数等于

$$a_1 T(Y) + a_2 (T(Y))^2 + \cdots + a_n (T(Y))^n$$

中 Y^n 的系数, 由此得关系式

$$a_1 b_n + P_n(a_2, \cdots, a_n,\ b_1, \cdots, b_{n-1}) = 0, \tag{7.5}$$

其中 P_n 是已知的整系数 ($\geqslant 0$) 多项式, 并且对 $a_2, \cdots, a_n$ 是线性的. 既然 $a_1 \neq 0$, 由 (7.4) 中第二个关系式可算出 b_1; 其次, 对于 $n \geqslant 2$, 由关系式 (7.5) 对 n 递推可算出 b_n. 这样就证明了形式级数 $T(Y)$ 的存在与唯一性.

上面求得的级数满足 $T(0) = 0$, $T'(0) \neq 0$, 因此对 T 应用刚刚对 S 已证明的结果, 可见存在着一个形式级数 S_1, 满足

$$S_1(0) = 0, \quad T \circ S_1 = I.$$

我们有

$$S_1 = I \circ S_1 = (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S \circ I = S.$$

因此 S_1 就是 S, 并且恰好有 $T \circ S = I$, 证完.

注释　既然 $S(T(Y))=Y, T(S(X))=X$, 我们可以说 "形式变换"

$$Y=S(X),\quad X=T(Y)$$

互为反变换; 也可把 T 称为级数 S 的 "反形式级数".

命题 7.1 是一种 "形式隐函数定理".

§2. 收敛幂级数

1. 复数域

以下域 K 是域 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 二者中之一: $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{C}$ 表示复数域.

我们记得, 复数 $z=x+iy$ (x 及 y 是实数) 可用 $\mathbf{R}^2$ 平面上坐标为 x 及 y 的点表示. 如果对每个 $z=x+iy$, 取 "共轭" 数 $\bar{z}=x-iy$, 我们就确定了域 $\mathbf{C}$ 的一个自同构 $z\to\bar{z}$; 这是因为有关系式

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}',\quad \overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'.$$

$\bar{z}$ 的共轭复数是 z. 换句话说, 变换 $z\to\bar{z}$ 是**对合的**, 亦即等于其逆变换.

我们确定复数 z 的**范数, 绝对值,** 或**模**如下:

$$|z|=(z\bar{z})^{1/2}.$$

它具有下列性质:

$$|z+z'|\leqslant|z|+|z'|,\quad |zz'|=|z|\cdot|z'|,\quad |1|=1.$$

范数 $|z|$ 总是 $\geqslant 0$, 并且只有在 $z=0$ 时为零. 由范数可定义域 $\mathbf{C}$ 中的一个**距离**: 从 z 到 z' 的距离是 $|z-z'|$; 这就是 $\mathbf{R}^2$ 平面上的欧氏距离. 对于这种距离, $\mathbf{C}$ 是**完备**空间, 亦即**柯西判别准则**成立: 要使点列 $z_n(\in\mathbf{C})$ 有极限, 必须而且只需我们有

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}|z_m-z_n|=0.$$

从这一柯西判别准则可推出著名的定理: 如果复数项级数 $\sum\limits_n u_n$ 满足 $\sum\limits_n |u_n|<+\infty$, 那么这级数收敛 (我们说级数绝对收敛). 此外,

$$\left|\sum_n u_n\right|\leqslant\sum_n|u_n|.$$

我们总把 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的一个子域, 亦即满足 $\bar{z}=z$ 的 z 所形成的子域. 从 $\mathbf{C}$ 上的范数导出 $\mathbf{R}$ 上的范数, 它就是实数的绝对值. $\mathbf{R}$ 是完备的. 在后面, 域 $\mathbf{C}$ (或 $\mathbf{R}$) 的范数起着主要的作用.

我们把 $z(\in\mathbf{C})$ 的 "实部" 及 "虚系数" 记作

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\quad 及\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

2. 有关函数项级数收敛概念之回顾

(关于这里讲到的概念, 读者可参考 J. 迪斯米埃的《数学教程 I 》, J. Dixmier, Cours de l'A. C. E. S., Topologie, VI 章, §9. 中译本, 丁善瑞译, 北京高等教育出版社, 1988 年)①

考虑在集 E 上定义的取实值或复值的函数 (更一般地, 可考虑在一完备赋范向量空间内取值的函数; 参看上引书). 对于每个函数 u, 我们记

$$\|u\| = \sup_{x\in E} |u(x)|,$$

这是一个 $\geqslant 0$ 的数, 有时可为无穷大. 当 $\|u\| < +\infty$ 时, 对于每个数量 λ, 我们显然有

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

换句话说, 在满足 $\|u\| < +\infty$ 的函数 u 的向量空间上, $\|u\|$ 是一个范数.

已给函数项 u_n 的级数, 如果范数的级数 $\sum\limits_n \|u_n\|$ 是一正项收敛级数, 亦即如果 $\sum\limits_n \|u_n\| < +\infty$, 那么我们说级数 $\sum\limits_n u_n$ **正规收敛**. 由此可推出: 对于每个 $x \in E$, 级数 $\sum\limits_n |u_n(x)|$收敛, 从而级数 $\sum\limits_n u_n(x)$ 绝对收敛; 不但如此, 如果 $v(x)$ 表示后一级数的和, 我们有

$$\|v\| \leqslant \sum_n \|u_n\|, \quad \lim_{p\to\infty} \|v - \sum_{n=0}^{p} u_n\| = 0.$$

上列第二个关系式表明: 当 p 趋近于无穷大时, 部分和 $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n$ 一致收敛 于 v. 这样, 任何正规收敛级数是一致收敛的.

设 A 是 E 的一个子集, 考虑 E 上一般项是 u_n 的级数. 如果函数项

$$u'_n = u_n|A \quad (u_n \text{ 在 } A \text{ 的限制})$$

的级数正规收敛, 那么我们说 $\sum\limits_n u_n$ 对于 $x \in A$ 正规收敛. 这时对每个 $|u_n(x)|$, 可找到常数 $\varepsilon_n \geqslant 0$ 作为它在 A 上的一个上界, 使得级数 $\sum\limits_n \varepsilon_n$ 收敛.

我们记得, (在拓扑空间 E 上) 连续函数的一致收敛序列的极限是连续的. 特别, 连续函数项正规收敛级数的和是连续的. 由此可以推出:

命题 2.1 假定对于每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)$ 存在, 设 a_n 是这一极限的值. 这时如果级数 $\sum\limits_n u_n$ 正规收敛, 那么级数 $\sum\limits_n a_n$ 收敛, 并且我们有

$$\sum_n a_n = \lim_{x\to x_0} \left(\sum_n u_n(x)\right)$$

①也可参考 J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Acad. Press, Inc., New York, 1960. 中译本. 现代分析基础, 第一卷, 郭瑞芝等译, 科学出版社,1982 年.— 译注

(交换求和与求极限的次序).

以上所讲的都可推广到多重级数, 还可更一般地推广到函数的可和族 (参考迪斯米埃的上引教程).

3. 幂级数的收敛半径

我们将考虑的所有幂级数的系数都在域 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{C}$ 二者之一内.

还要指出, 当系数是在更一般的非离散完备赋值域时, 以下所讲的仍然成立, 即对这样的域 K 成立: 它具有从 K 到非负实数集的映射 $x \to |x|$, 满足

$$\begin{cases} |x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad |xy| = |x|\cdot|y|, \\ (|x|=0) \Leftrightarrow (x=0), \end{cases}$$

并且存在着一些 $x \neq 0$, 使得 $|x| \neq 1$.

设 $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 是一形式级数, 其系数在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 内. 我们要用域中一元素 z 来代替字母 X, 这样可得出级数的一 "值" $S(z)$, 这个值是域中的元素; 但进行这种代换必须要求级数收敛. 实际上, 我们限于考虑级数为绝对收敛情形.

准确地说, 引进实变数 $r \geqslant 0$, 并且考虑正 (或零) 项级数

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n,$$

它称为级数 $S(X)$ 的**连带级数**. 它的和是一确定的数 $\geqslant 0$, 并可能为无穷大. 满足

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n < +\infty$$

的 $r \geqslant 0$ 的集显然是半直线 $\mathbf{R}^+$ 的一个区间, 并且由于级数在 $r=0$ 时收敛, 这个区间不是空的. 它在右边是开的或闭的, 它是有限或无限区间, 并且可能化为唯一的点 0. 在所有情形下, 设 ρ 是这区间的上确界: ρ 是一个非负的有限数或无穷大, 并且可能是零. 我们称它为形式幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 的**收敛半径**. 满足 $|z| < \rho$ 的数 z 的集称为幂级数的**收敛圆盘**, 它是一个开集; 如果 $\rho = 0$, 它是空集. 当系数的域是复数域 $\mathbf{C}$ 时, 这确实是一个圆盘.

命题 3.1 a) 对于任何 $r < \rho$, 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 对 $|z| \leqslant r$ 正规收敛; 特别, 对满足 $|z| < \rho$ 的每个 z, 级数绝对收敛.

b) 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 对 $|z| > \rho$ 发散 (对 $|z| = \rho$ 不能作结论).

证明 命题 3.1 可由下列引理推出.

阿贝尔引理 设实数 r 及 r_0 满足 $0 < r < r_0$. 如果存在着一个有限数 $M > 0$, 使得对于所有整数 $n \geqslant 0$,

$$|a_n|(r_0)^n \leqslant M,$$