龚昇论文选集

Gongsheng Lunwen Xuanji

龚 昇 / 著

中国科学技术大学出版社

Lemma 1 *If f is a Bloch mapping in $\mathcal{R}_I$ which maps $\mathcal{R}_I$ into $\mathbb{C}^{mn}$, then*

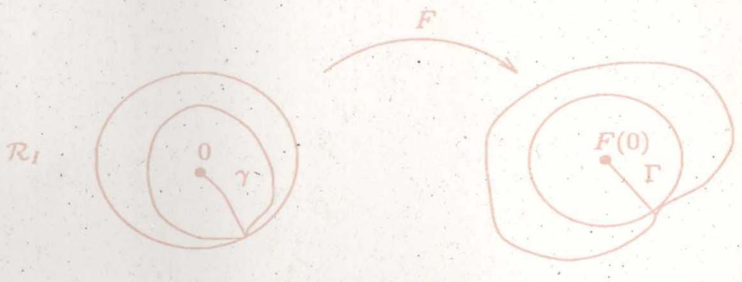
$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z}(Z)\right\|_M \le \frac{\|f\|_B}{1-\|Z\|_M^2}.$$

The analogous result to Theorem 4.1 of [2] is now presented.

Theorem 4 *If $F:\mathcal{R}_I \to \mathbb{C}^{mn}$ and $F \in \mathcal{B}^0(\mathcal{R}_I)$, $d(F)=1$, $\det \frac{\partial F}{\partial z}(0)=1$, and $\|F\|_B \le K$, then*

$$r(0,F) \ge C(K,m,n) = K^{1-mn}\int_0^1 \frac{(1+t)^{mn-1}}{(1-t)^{m^2+1}}\exp\left\{\frac{-m(m+n)t}{1-t}\right\}dt.$$

Proof: Following Liu [5], we consider what causes a ball in the range of F centered at $F(0)$ to not have a well-defined inverse mapping F. Since $\det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1$, there is a well-defined inverse of F on a small ball centered at $F(0)$. Since $\det\frac{\partial F}{\partial z}\ne 0$ on $\mathcal{R}_I$, the ball can be increased in radius until the preimage hits the boundary of $\mathcal{R}_I$.



Consider a straight line interval Γ in the range of F. The interval starts at $F(0)$ with $F^{-1}(F(0))=0$ and goes until the image of F^{-1} runs into the boundary of $\mathcal{R}_I$. We assume that Γ has the mininal length among such intervals. Let $\gamma = F^{-1}(\Gamma)$. Then

$$\begin{aligned} r(0,F) &\ge \left|\int_\Gamma dw\right| \\ &= \int_\gamma \left|\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz'}{|dz|}\right|\cdot|dz| \\ &\ge \int_\gamma \frac{\left|\det\frac{\partial F}{\partial z}\right|}{\left\|\frac{\partial F}{\partial z}\right\|_M^{mn-1}}|dz|. \end{aligned}$$

龚昇论文选集

龚 昇/著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

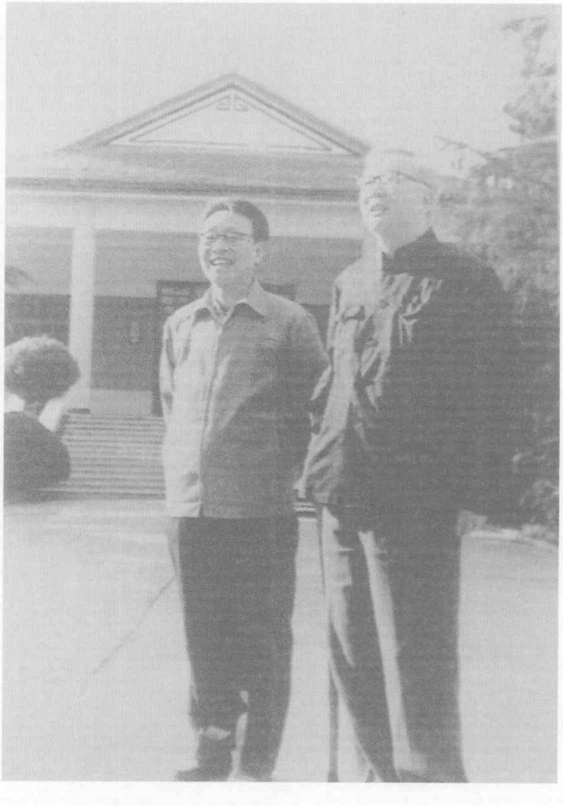
龚昇论文选集/龚昇著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-312-02296-8

Ⅰ.龚…　Ⅱ.龚…　Ⅲ.数学－文集　Ⅳ.O1-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第100209号

出版发行　中国科学技术大学出版社
　　　　　地址　安徽省合肥市金寨路96号，邮编　230026
　　　　　网址　http://press.ustc.edu.cn
印　　刷　中国科学技术大学印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　880mm × 1230mm　1/16
印　　张　43.5　插页　2
字　　数　1057千
版　　次　2008年7月第1版
印　　次　2008年7月第1次印刷
印　　数　1－1200册
定　　价　158.00元

⊙ 本书作者年轻时照片



⊙ 1984年4月，华罗庚（右）与本书作者于合肥稻香楼宾馆前合影

前　　言

我于 1930 年 1 月 16 日在上海川沙县北蔡镇出生. 1950 年夏毕业于上海交通大学数学系，之后在中国科学院数学研究所工作至 1958 年. 从 1958 年至今一直在中国科学技术大学工作. 先后师从陈建功老师与华罗庚老师.

上世纪六十年代罗庚师到科大来任专职副校长，使我聆听他的教诲的机会增多，有一次他对我讲，一个人最后余下的就是一本选集. 我当时年轻，以为这是遥远的事，他这样说是为了教育我淡泊名利，努力学习与工作. 时间匆匆，到 2002 年我得病之后，就经常想起罗庚师四十多年前对我讲的这句话.

我一生坎坷，平庸，受到种种欺凌与屈辱，在此盘点人生的时候，尽管自认为一直很努力，但与那些大数学家比，我是如此微不足道，有愧师恩.

我无学位，非院士，不过是一个普普通通的老教书匠，在后人评说的时候，不会对这样一个普普通通的教书匠的选集，过于苛求吧！

选文五十篇，为了便于查阅，按课题分类列出.

杨乐院士、叶向东教授与中国科学技术大学出版社对出版本书大力支持，戚素芬同志为本书付出了大量辛勤劳动，对他们致以深切的感谢！

龚昇

2008. 6. 8

目　次

I. 典型群上的调和分析

II. 多复变数的奇异积分与积分方程

[1]这里及以后号码都是第 676 页到第 687 页中论文目录的编号.

III. 多复变数的 Bloch 常数

IV. 多复变数的 Schwarz 导数

VII. 其　他

VIII. 附　录

I. 典型群上的调和分析

华罗庚创立了多复变数函数论中的典型域上的调和分析的理论 (1) , 这是对多复变数的巨大贡献, 作为这个理论的发展之一, 是典型群上的调和分析. 这起源于他的一篇文章 (2), 在此文中证明了酉群上的连续函数的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自己. 以此为出发点, 文献 [73.1][1], [72.1], [71.1], [70.1], [69.1] 建立了酉群上的调和分析. 其后, 王世坤、陈广晓、董道珍、贺祖琪等人按照上述的思想与方法, 在旋转群上以及酉辛群上建立了对应的调和分析. 上述这些工作总结在 (3) (即 [M8], 英文版 [M4]) 中. 之后, 李世雄、郑学安等在这些工作的基础上, 对紧致李群上的调和分析进行研究, 他们的工作, 总结在 (4) 中. 这项研究获国家自然科学三等奖, 得奖人: 龚昇, 郑学安.

参 考 文 献

(1) 华罗庚. 多复变数函数论中的典型域的调和分析. 北京: 科学出版社, 1958.

(2) 华罗庚. 紧致群上的连续函数所成的空间中的一条收敛定理. 科学记录, 1958, 2: 341-344.

(3) 龚昇. 典型群上的调和分析. 北京: 科学出版社, 1983.

(4) 郑学安. 紧致齐性空间上的调和分析. 上海: 上海科学技术出版社, 2000.

[1]这里及以后的号码都是第 673 页到第 687 页中著作论文目录的编号.

《典型群上的调和分析》序

H. Weyl 研究了有限维的紧致群上的调和分析，证明了有一组正交有则的系存在，以及任何一个连续函数都可以用这个系的有限个函数的线性式来逼近. 由于他研究的对象太抽象了，没有方法表达出这一正交有则系，当然谈不上其逼近表达式是什么，更谈不上深入的收敛性了.

紧致群的第一个例子是 $\{e^{i\theta}\}$. 这上面有一个正交正则系

$$\{e^{in\theta}\}, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

也就是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\cdot e^{-im\theta}d\theta=\begin{cases}1, & \text{当}\quad n=m\\ 0, & \text{当}\quad n\neq m\end{cases}$$

这一紧致群的调和分析就是整套的 Fourier 分析，已有大量的文献，由 A. Zygmund 于 1959 年写的两卷七百多页的巨著就可以看到其发展的情况.

$\{e^{i\theta}\}$ 的直接推广就是 U_n 群，也就是 n 行 n 列的方阵 U, 它适合于

$$U\overline{U}'=I,$$

$\overline{U}'$ 是 U 的共轭及转置，同时 U_2 与旋转群 SO_3 有同构处，在物理上 U_n 群的应用越来越重要.

除掉抽象的紧致群及最简单的 $U_1=\{e^{i\theta}\}$ 之外，无人深入研究. 笔者在研究多复变数典型域的调和分析时，定出了 U_n 上的明确的正交正则完全系而且证明了 Abel 求和法，由此当然可以推出逼近的线性式.

同时任何紧致群可以 “嵌入” 到 U_n 之中，因此这一方面的研究既具体化了又不失其抽象普遍性.

但 Abel 求和法是我们处理调和分析的最初一步的方法，在 Fourier 分析中存在着大量基本的问题，例如在求和法中， $(c,1)$ 求和是最合适的方法，这是 Fejér Lebesgue 的重要贡献.

Casàro 求和怎样推广到 U_n 上的调和分析中来，龚昇同志用了创造性的技巧得到了相当于 Lebesgue 等人的结果．他还对 U_n 上的调和分析得到了一系列的结果．也许对 U_n 上的调和分析运用到近代物理会有所帮助．因此，人们都会问： Fourier 分析的经典工作对 U_n 上的调和分析有没有对应的定理？

这是一个有丰富前途的方向，乐之为序．

华罗庚

1979.2.26

第10卷 第2期
1960年6月

数学学报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 10, No. 2
June, 1960

酉羣上的富理埃分析*

I. 富理埃級数的 Abel 求和及 Dirichlet 核

龔 昇
(中国科学技术大学)

目 次

§1.1. 引言

一个变数的 Fourier 分析，現在已經有了丰富的成果，不少問題得到了圓滿而完整的解决，在很多人的研究中达到了很深刻的地步．当然，一个变数的 Fourier 分析在数学的不少其他領域起着重要的作用．可是多个变数的 Fourier 分析情况就不完全是如此，在有些內容上是有些不完整之处的．至于更一般的在任意紧致羣上的 Fourier 分析，那末，众所周知的，重要的結果只是 Peter-Weyl[6] 定理，它告訴我們說：紧致羣上的連續函数可以用有限綫性式来逼近之．最近，华罗庚[2]証明了酉羣上的連續函数的 Fourier 級数可以 Abel 求和于它自己．这是有关有限維(維数大于 1)的紧致羣上的函数的 Fourier 級数的第一条收斂定理．当然一条收斂定理是优于逼近定理的．

我們将以此为依据，对酉羣上的 Fourier 分析进行系統的研究．一个变数的 Fourier 分析可以看作一維酉羣上的 Fourier 分析，所以我們所研究的一般的酉羣上的 Fourier 分析，将一个变数的 Fourier 分析作为一个很特殊的例子，而一个变数的 Fourier 分析上所用的那些技巧，在此将不再起有影响的作用．同时，还須指出的是，任意紧致子羣上的連續函数可以推展成酉羣上的連續函数，以至对于酉羣上的 Fourier 分析进行研究，对于一般的紧致羣的情形也是有意义的． 这里及以后所用的主要思想是羣表示，这首先是由华罗庚所成功处理的．

本文是对于酉羣上可积函数的 Fourier 級数的研究的一部分成果． 主要是对华罗庚所定义的 Abel 求和进行进一步的研究，給出了 Abel 求和的具体表达式，此外，还給出了 Fourier 級数的 Dirichlet 核．

具体的說，在 §1.3—§1.7 的这几节中，我們給出了 Abel 求和的最終具体表达式，这是經过很复杂的計算而得来的．§1.8 是用分析的方法求出了 Fourier 級数的 Dirichlet 核，

* 1960年5月6日收到．

这是借助于 Abel 求和中的 Poisson 核而求得的. §1.9 給于上述結果以另一个証明(代数的証明),这个証明是属于华罗庚的. 应用以前同样的方法,我們在 §1.10 中定义了一种求和法,并定出了它們相应的核.

为了不使本文篇幅太长,关于以这些核为依据的收斂定理及求和定理,都将另文发表.

本文中所考虑的部分和及求和都是"方块"的,至于别种形式的求和(例如,球求和)将在另文重新加以討論. 文中所用符号与[1]中相同,处理問題的方法及技巧也是与[1]深切相关的,文中的結果是在科学記录上发表过的結果的一部分[4,5].

作者愿向导师华罗庚教授致以深切的感謝,本文是在他的指导下完成的,也愿向中国科学院数学研究所多复变数函数論討論班的同事們致謝,他們的宝貴意見,使我得益匪浅.

§1.2. 酉羣上的 Fourier 級数

設 U_n 是 n 阶酉羣. 若 $U \in U_n$,我們以 $A_{f_1,\cdots,f_n}(U)$ 表示 U 的标記为 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的酉表示,这里 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是滿足 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n$ 的整数. 記 $N(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 为 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的阶. 我們常用 f 来代表 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. 若

$$A_f(U) = (a_{ij}(U))_{1\leqslant i,\, j\leqslant N(f)},$$

那末我們知道 $\{\varphi^f_{ij}(U)\}$ 是 U_n 上的就范直交系,这里

$$\varphi^f_{ij}(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, a^f_{ij}(U),$$

而 C 是 U_n 的体积,即

$$C = (2\pi)^{\frac{1}{2}n(n-1)}/((n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!)$$

$\{\varphi^f_{ij}\}$ 的全体对可积函数来講是完整的. 記

$$\Phi_f(U) = (\varphi^f_{ij}(U))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)} = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, A_f(U).$$

若 $u(U)$ 是可积函数,展开成 Fourier 級数

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right),$$

这里

$$C_{f_1\cdots f_n} = \int_{U_n} u(V)\Phi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V},$$

$\operatorname{tr} B$ 表示 B 的迹, B' 表示 B 的轉置.

更明白些,

$$u(U) \sim \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}\left(\frac{N(f)}{C}\int_{U_n} u(V)A_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}U')\dot{V}\right)$$

$$= \frac{1}{C}\int_{U_n} u(V) \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}U')\dot{V},$$

这里 $\chi_{f_1\cdots f_n}(U)$ 为表示 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的特征.

首先我們很容易的可以証明 $u(U)$ 的 Fourier 級数等于它的实部,即

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right) = \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{Re}\operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right).$$

若 $U \in U_n$, $V \in U_n$, 那末

$$u(VU) \sim \frac{1}{C}\int_{U_n} u(W) \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'V')\dot{W}$$

$$= \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{f_1\cdots f_n}(\overline{W})A_{f_1\cdots f_n}(U')A_{f_1\cdots f_n}(V')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}A_{f_1\cdots f_n}(U')A_{f_1\cdots f_n}(V')).$$

但是

$$u(\overline{V}U) \sim \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'\overline{V}')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{-f_n,\cdots,-f_1}(W\overline{U}'V')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{f_1\cdots f_n}(W)A'_{f_1\cdots f_n}(\overline{U})A'_{f_1\cdots f_n}(V)\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}(\overline{C}_{f_1\cdots f_n}A'_{f_1\cdots f_n}(\overline{U})A'_{f_1\cdots f_n}(V)),$$

这是因为

$$A_{f_1\cdots f_n}(U) = A_{-f_n,\cdots,-f_1}(\overline{U})$$

及

$$N(f_1\cdots f_n) = N(-f_n, \cdots, -f_1).$$

所以

$$\frac{u(VU) + u(\overline{V}U)}{2} \sim \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} (\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}A'_{f_1\cdots f_n}(U))]A'_{f_1\cdots f_n}(V)).$$

命 $V = I$, 即得

$$u(U) \sim \sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \operatorname{Re}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

§ 1.3. Abel 求和

华罗庚[2]定义了在 n 阶酉群 U_n 上可积函数 $u(U)$ $(U \in U_n)$ 的 Fourier 級数

$$\sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \tag{1.3.1}$$

的 Abel 和为

$$\sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n} \rho^f(r)\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \tag{1.3.2}$$

这里

$$\rho^f(r) = \frac{1}{N(f)} \cdot \frac{1}{C}\int_{U_n} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-rU)|^{2n}} \chi_f(U)\dot{U}. \tag{1.3.3}$$

并且証明了当 $r \to 1$ 时，(1.3.2)的值趋于 $u(U)$，即(1.3.1)是可以 Abel 求和，其和为 $u(U)$.

至于 $\rho^f(r)$ 的值，他指出，

(i) $$\rho^f(r)\to 1,\quad 当\quad r\to 1;$$

(ii) $$\rho^f(r)=\begin{cases} r^{f_1+\cdots+f_n} & 当\quad f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0,\\ r^{-f_1-\cdots-f_n} & \quad\ \ 0\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_{n-1}\geqslant f_n.\end{cases}$$

我們要証明

定理 1.3.1. 当 $l_1>l_2>\cdots>l_s\geqslant 0>l_{s+1}>\cdots>l_n(n\geqslant s\geqslant 0)$ 时，那末

$$\rho^f(r)=r^{f_1+\cdots+f_s-f_{s+1}-\cdots-f_n}\sum_{s>g_{s+1}>\cdots>g_n>0}\frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)}r^{2(g_{s+1}+\cdots+g_n)},\tag{1.3.4}$$

这里 $N_s(a,b)$ 表示 $N(a_1,\cdots,a_s,b_{s+1},\cdots,b_n)$，$g=(g_1,\cdots,g_n)$ 而 $(g_1+n-1,g_2+$ $+n-2,\cdots,g_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列．$0\geqslant g_1\geqslant g_2\geqslant\cdots\geqslant g_s\geqslant s-n$; $l_1=f_1+n-1,\cdots,l_{n-1}=f_{n-1}+1,l_n=f_n$.

$\rho^f(r)$ 还可以表成以下这些形式．

定理 1.3.2. 若 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列，而 $v_1>\cdots>v_s$，那末，

$$\rho^f(r)=r^{|l_1|+\cdots+|l_n|-\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{n-1>v_{s+1}>\cdots>v_n>0}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=s+1}^{n}\frac{(l_j-v_k)(v_j-l_k)}{(v_j-v_k)(l_j-l_k)}r^{2(v_{s+1}+\cdots+v_n)}.\tag{1.3.5}$$

定理 1.3.3. 如同定理 1.3.1 中的假設，那末

$$\rho^f(r)=r^{f_1+\cdots+f_s-f_{s+1}-\cdots-f_n}\sum_{v=0}^{s(n-s)}b_v r^{2v},\tag{1.3.6}$$

这里

$$b_v=\sum_{\substack{n-1>v_{s+1}>\cdots>v_n>0\\ v_{s+1}+\cdots+v_n=v+\frac{(n-s)(n-s-1)}{2}}}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=s+1}^{n}\frac{(l_j-v_k)(v_j-l_k)}{(v_j-v_k)(l_j-l_k)}$$

$$=\sum_{\substack{s>g_{s+1}>\cdots>g_n>0\\ g_{s+1}+\cdots+g_n=v}}\frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)}.$$

§ 1.4. $\rho^f(r)$ 的計算

在这儿节中，我們将来証明上节中的这些定理．

首先我們看到(参閱[2])

$$\rho^f(r)N(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_n>-\pi}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{v=1}^{n}|1-re^{i\theta_v}|^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} e^{il_1\theta_1}, & \cdots, & e^{il_1\theta_n}\\ e^{il_2\theta_1}, & \cdots, & e^{il_2\theta_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{il_n\theta_1}, & \cdots, & e^{il_n\theta_n}\end{vmatrix}\prod_{v<\mu}(e^{-i\theta_v}-e^{-i\theta_\mu})d\theta_1\cdots d\theta_n.\tag{1.4.1}$$

将(1.4.1)中被积函数的行列式展开，于是得到