

学林文丛第三辑

主编 梁久忠

不确定性决策分析方法及其应用

BUQUEDINGXING JUECE FENXI FANGFA JIQI YINGYONG

张吉军 著

光明日报出版社



内容提要

本书系统地介绍了区间数决策分析、模糊决策分析、灰色决策分析的最新研究成果。全书共分九章，第一章介绍区间数及其有关概念；第二章介绍区间数的比较与排序方法；第三章分别介绍属性权重为区间数的多属性决策分析方法、属性值为区间数的多属性决策分析方法，以及区间数多属性决策分析方法；第四章分别介绍状态概率为区间数的风险型决策、区间数风险型决策，以及风险型群体决策的决策方法及应用；第五章介绍模糊决策分析涉及的有关概念、理论和方法；第六章介绍模糊集比较与排序的理论和方法；第七章分别介绍模糊多属性决策的基本原理、属性权重未知的模糊多属性决策分析方法、属性权重已知的模糊多属性决策分析方法、基于模糊互补判断矩阵的模糊层次分析法，以及基于模糊互反判断矩阵的层次分析法；第八章分别介绍模糊线性规划和模糊多目标线性规划的决策方法；第九章分别介绍灰色局势决策、灰色层次决策，以及灰色线性规划的决策方法。

本书不仅可以作为管理科学与工程、石油工程管理等专业的硕士生、博士生学习决策分析的教材，而且还可以作为高级工商管理培训的教材。

前 言

二十世纪七十年代以来，随着决策理论和方法的进一步成熟和完善，决策理论和方法的应用更加广泛和深入，但在应用中决策理论和方法却日益受到挑战。人们经过反思发现，传统的决策理论和方法之所以受到怀疑和挑战，其原因之一是：传统的决策模型不能很好地适用于现实中的决策问题，这种不适应性突出地表现在以下两个方面：

(1) 传统的决策模型往往对定量的因素考虑得多而对定性的因素考虑得少，或者将定性的因素定量化得不够或不准确，而要想将定性因素得到合理、科学的量化又是一件很困难的事情。

(2) 传统的决策模型为了模型的简单起见，往往将现实问题中的不确定量简化为确定量，这种简化处理虽然对决策理论形成的初期非常有用，但随着决策理论和方法应用的广泛和深入，越来越要求人们全面系统地考虑不确定情形下的决策问题。

正是基于上述原因，二十世纪七十年代以后，对不确定性决策问题的研究已成为管理基础理论与方法研究的热点之一。近三十年来，许多学者对不确定性决策分析方法进行了不同程度的研究，取得了不少研究成果，这些研究成果主要集中表现在如下几个方面：

(1) 随机性决策分析，比如：随机性线性规划和随机性多

※ 不确定性决策分析方法及其应用

目标线性规划等；

(2) 模糊决策分析，比如：模糊综合决策、模糊随机统计决策、模糊排序、模糊线性规划和模糊多目标线性规划等；

(3) 灰色决策分析，比如：灰色局势决策、灰色层次决策、灰色整数规划、灰色线性规划、灰色多目标线性规划等；

(4) 区间型决策分析，比如：区间数线性规划、区间数多指标决策分析等。

目前，对不确定性决策分析方法的研究呈现两个明显的趋势：①不局限于对某些具体方面的研究，正在向研究不确定性决策问题的本质特征、求解方法的理论体系方面发展；②不局限于向决策者提供一个最优解或满意解，而是与人工智能、神经网络等技术相结合建立交互式、智能化的决策支持系统，帮助决策者分析问题、寻找目标，并根据决策者的要求不断地给出一些中间解，直到决策者满意为止。

基于上述分析，我们于2003年向四川省哲学社会科学联合会申报了“不确定性决策分析方法研究”项目。2004年3月，“不确定性决策分析方法研究”作为四川省哲学社会科学“十五”规划2004年度课题获准立项。接到研究任务之后，我们随即成立了研究小组。研究小组在查阅大量中外文献的基础上，按照项目申请书中确定的研究思路，对不确定性决策分析方法进行了较系统、全面的研究。经过两年多的研究，课题组已完成了“不确定性决策分析方法研究”项目申请书中所确定的各项任务，并于2006年9月顺利通过了项目验收。

《不确定性决策分析方法及其应用》作为四川省“十五”社科规划项目“不确定性决策分析方法研究”的最终研究成果系统地阐述了不确定性决策分析的理论、方法和应用的最新研究成果。全书共分九章：第一章区间数决策分析基础，介绍区间数及其有关概念、区间数运算规则，为区间数决策分析方法，以及模

模糊数、模糊集、模糊关系等方面知识的学习和理解打下一个良好的基础；第二章区间数的比较与排序，介绍区间数的比较及排序方法，为区间数决策分析方法的研究和学习打下基础；第三章区间型多属性决策分析方法，分别介绍属性权重为区间数的多属性决策分析方法、属性值为区间数的多属性决策分析方法，以及区间数多属性决策分析方法（属性权重和属性值同为区间数），并对每一种方法进行了实例分析；第四章区间数风险型决策分析方法及其应用，分别介绍状态概率为区间数的风险型决策、区间数风险型决策，以及风险型群体决策的决策方法及其应用；第五章模糊决策分析基础，介绍模糊决策分析涉及的有关概念、理论和方法；第六章模糊集的比较与排序，介绍模糊集比较与排序的理论和方法；第七章模糊多属性决策分析方法及其应用，分别介绍模糊多属性决策的基本原理、属性权重未知的模糊多属性决策分析方法、属性权重已知的模糊多属性决策分析方法、基于模糊互补判断矩阵的模糊层次分析法，以及基于模糊互反判断矩阵的层次分析法；第八章模糊规划决策及其应用，分别介绍模糊线性规划和模糊多目标线性规划的决策方法；第九章灰色决策分析方法及其应用，分别介绍灰色局势决策、灰色层次决策，以及灰色线性规划的决策方法。

为了使本书能反映当今不确定性决策分析方法研究领域的最新研究成果，在本书的编写过程中课题组一方面把自己的最新研究成果编入了本书；另一方面，还参阅了国内外有关不确定性决策分析研究的著作、刊物和研究成果，有些内容为本书所引用，在此谨向有关作者表示衷心的感谢。

在《不确定性决策分析方法及其应用》的编写过程中，课题组得到了四川省哲学社会科学联合会、西南石油大学科研处、西南石油大学经济管理学院的大力支持和帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

※ 不确定性决策分析方法及其应用.....

由于时间仓促和课题组成员的水平有限，书中难免有误，敬请各位专家和读者批评指正。

作 者

2007 年 9 月于成都

目 录

第一章 区间数决策分析基础	1
1.1 区间数的定义及其有关概念	1
1.2 区间数的运算	3
1.2.1 区间数的四则运算及其性质	3
1.2.2 区间数的乘方与开方运算	9
1.2.3 区间数的取大、取小运算与数量乘法运算	11
1.3 区间数间的距离和区间数数列的极限	13
第二章 区间数的比较与排序	16
2.1 普通集合内元素间的次序关系	16
2.2 区间数排序方法的分类	20
2.3 区间数的比较与排序方法	22
2.3.1 直接比较方法	22
2.3.2 基于可能度的区间数比较与排序方法	33
2.3.3 基于区间数映射的区间数比较与排序方法	48
参考文献	54
第三章 区间型多属性决策分析方法及其应用	56
3.1 区间型多属性决策分析概述	56
3.1.1 区间型多属性决策问题的有关定义	56
3.1.2 属性导向一致性处理	58

※ 不确定性决策分析方法及其应用

3.1.3 不同量纲属性值的规范化处理	58
3.2 属性值为区间数的多属性决策分析方法及其应用	63
3.2.1 属性值为区间数的多属性决策的逼近理想点法	63
3.2.2 属性值为区间数的多属性决策的最小隶属度偏差法	67
3.2.3 属性值为区间数的多属性决策的优序数法	70
3.2.4 属性值为区间数的多属性决策的效用灰色关联分析法	74
3.3 权重为区间数的多属性决策分析方法及其应用	79
3.3.1 权重为区间数的多属性决策的逼近理想点法	79
3.3.2 权重为区间数的多属性决策的灰色关联分析法	83
3.4 区间数多属性决策分析方法及其应用	86
3.4.1 区间数多属性决策的模糊层次分析法	86
3.4.2 区间数多属性决策的误差分析法	92
3.4.3 区间数多属性决策的线性规划方法	98
3.4.4 区间数多属性决策的目标规划方法	100
3.4.5 区间数多属性决策的逼近理想点法	103
3.4.6 区间数多属性决策的灰色关联分析法	106
参考文献	110
第四章 区间数风险型决策分析方法及其应用	114
4.1 区间数风险型决策分析概述	114
4.1.1 风险型决策及其决策方法	114
4.1.2 区间数风险型决策及其有关概念	116
4.2 状态概率为区间数的风险型决策分析方法及其应用	

.....	118
4.2.1 陈俊和高峰记方法	119
4.2.2 张吉军方法	122
4.3 区间数风险型决策分析方法及其应用	127
4.3.1 孙在东, 达庆利, 徐泽水方法	128
4.3.2 钱钢, 徐泽水方法	129
4.3.3 许先云方法	132
4.3.4 张吉军方法	133
4.4 风险型群体决策分析方法及其应用	137
4.4.1 风险型群体决策问题的定义	138
4.4.2 风险型群体决策方法的基本原理和步骤	139
4.4.3 应用举例	140
参考文献	143
第五章 模糊决策分析基础	145
5.1 模糊决策分析概述	145
5.1.1 模糊性与模糊现象	145
5.1.2 模糊决策及其基本特征	147
5.1.3 模糊决策问题的分类	148
5.1.4 模糊决策的产生与发展	149
5.2 模糊决策的基础知识	152
5.2.1 普通集合及其基本概念	152
5.2.2 模糊集合及其运算	155
5.2.3 模糊集合与普通集合的关系	160
5.2.4 模糊数及其运算	162
5.2.5 模糊关系与模糊矩阵	168
5.2.6 模糊矩阵的运算	170
5.2.7 模糊关系的合成	171
5.3 模糊决策的基本原理	172

※ 不确定性决策分析方法及其应用

5.3.1 模糊目标、模糊约束和模糊决策	172
----------------------------	-----

5.3.2 模糊决策的推广	175
---------------------	-----

参考文献	177
------------	-----

第六章 模糊集的比较与排序

6.1 模糊集排序问题的提出	185
----------------------	-----

6.2 模糊集比较与排序方法的分类	186
-------------------------	-----

6.3 模糊集的排序方法	188
--------------------	-----

6.3.1 第一类排序方法	189
---------------------	-----

6.3.2 第二类排序方法	195
---------------------	-----

6.3.3 第三类排序方法	202
---------------------	-----

6.4 关于模糊集排序方法研究的几个问题	225
----------------------------	-----

6.4.1 评价模糊集排序方法的基本准则	225
----------------------------	-----

6.4.2 关于模糊集排序指标间的联系研究	227
-----------------------------	-----

6.4.3 模糊集排序方法研究的未来展望	228
----------------------------	-----

参考文献	229
------------	-----

第七章 模糊多属性决策分析方法及其应用

7.1 多属性决策基础知识	233
---------------------	-----

7.1.1 多属性决策及其有关概念	233
-------------------------	-----

7.1.2 多属性决策问题解的定义	235
-------------------------	-----

7.1.3 多属性决策的量化处理	237
------------------------	-----

7.1.4 评价指标权重的确定方法	240
-------------------------	-----

7.1.5 多属性决策的基本方法	245
------------------------	-----

7.2 模糊多属性决策的基本原理	249
------------------------	-----

7.2.1 模糊多属性决策的基本模型	249
--------------------------	-----

7.2.2 模糊定性指标的定量化处理方法	251
----------------------------	-----

7.2.3 模糊指标值的归一化方法	254
-------------------------	-----

7.2.4 左模糊极大集、右模糊极小集和海明距离	255
--------------------------------	-----

7.3 属性权重未知的模糊多属性决策分析方法	258
------------------------------	-----

7.3.1 模糊乐观决策法 ($F-Maximax$)	258
7.3.2 模糊悲观决策法	261
7.3.3 模糊乐观系数法	264
7.4 属性权重已知的模糊多属性决策分析方法	267
7.4.1 模糊加权平均法	268
7.4.2 模糊逼近理想点法	275
7.5 基于模糊一致判断矩阵的模糊层次分析法	284
7.5.1 层次分析法 (AHP) 存在的问题	285
7.5.2 模糊一致矩阵的定义及其性质	285
7.5.3 用模糊一致矩阵表示因素间两两重要性比较的合理性解释	291
7.5.4 模糊一致矩阵的元素与权重的关系	292
7.5.5 基于模糊一致判断矩阵的模糊层次分析法的原理和步骤	295
7.6 基于模糊互反判断矩阵的模糊层次分析方法	301
7.6.1 梯形模糊数的运算与模糊互反矩阵的定义	302
7.6.2 基于模糊互反判断矩阵的模糊层次分析法的原理和步骤	303
参考文献	308
第八章 模糊规划决策及其应用	310
8.1 模糊线性规划	310
8.1.1 对称型模糊线性规划	311
8.1.2 非对称型模糊线性规划	316
8.1.3 含有模糊系数的线性规划	322
8.2 模糊多目标线性规划	324
8.2.1 多目标线性规划问题的模糊解法	325
8.2.2 在模糊约束下的多目标线性规划	328
参考文献	330

第九章 灰色决策分析方法及其应用	332
9.1 灰色决策的基础知识	332
9.1.1 灰数、灰关系、灰方程、灰矩阵	332
9.1.2 关联分析	333
9.1.3 生成数	335
9.1.4 GM (1, N) 模型	336
9.1.5 GM (1, 1) 模型	340
9.1.6 灰色决策	344
9.2 灰色局势决策	344
9.2.1 灰色局势决策的定义	344
9.2.2 灰色局势决策方法	345
9.3 灰色线性规划	352
9.3.1 灰色线性规划的定义	352
9.3.2 预测型线性规划	352
9.3.3 漂移型线性规划	355
9.4 灰色层次决策	359
9.4.1 灰色层次决策的含义及其决策原理	359
9.4.2 灰色层次决策分析方法的应用	363
参考文献	367

第一章 区间数决策分析基础

在实际工作中,由于测量误差,以及对研究对象认识不够深入和客观情况的复杂性等因素,使得人们往往不能用一个确定的数值来描述研究对象及其特征,但却能确定一个大致的范围,这个大致的范围可用一个区间来给予表示。比如,在进行油气田开发方案评价时,考虑的采油(气)速度、综合含水率、采出程度、渗透率等指标一般不能用一个精确的数值表示,只能确定它们的一个大致范围。另一方面,由于研究对象所处环境的多变性,如果一味地考虑用精确的数值去描述研究对象,势必会使研究结论失去应有的科学性和实用性。因此,研究区间数及其运算规律,以及在区间数环境下如何进行决策具有十分重要的现实意义。

本章主要介绍区间数及其有关概念,以及区间数的运算规则,为区间数决策分析方法,以及模糊数、模糊集、模糊关系等方面知识的学习和理解打下一个良好的基础。同时,作为数学的一个分支,区间分析在数值分析及其应用中也有广泛的用途,所以了解区间分析的有关知识是十分有意义的。

1.1 区间数的定义及其有关概念

在实际工作中,我们经常遇到这样的情况:某个感兴趣的实数值 x 仅知道它位于两个实数 a_1 和 a_2 之间,且 $a_1 < a_2$,但 x 到底为何值却是不确定的,这就形成了一个区间。通常,我们假定不

确定值 x 位于一个有界闭区间 $[a_1, a_2]$ 之中, 即 $a_1 \leq x \leq a_2$ 。在有些情况下, 也可以假定不确定值 x 位于一个有界开区间 (a_1, a_2) 之中, 即 $a_1 < x < a_2$; 或者位于一个有界闭开区间 $[a_1, a_2)$ 之中, 即 $a_1 \leq x < a_2$; 或者位于一个有界开闭区间 $(a_1, a_2]$ 之中, 即 $a_1 < x \leq a_2$; 或者位于一个无界的开或闭区间之中, 如 $(-\infty, a_2)$, $(-\infty, a_2]$, $(a_1, +\infty)$, $[a_1, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ 。本书假定区间数为有界闭区间, 其定义如下:

定义 1.1 设 R 是所有实数组成的集合, $\underline{a}, \bar{a} \in R$, 且 $\underline{a} \leq \bar{a}$, 则称 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 为一个区间数, 即

$$[\underline{a}, \bar{a}] = \{x \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a}, \underline{a}, \bar{a} \in R\}$$

当 $\underline{a} = \bar{a} = a$ 时, 区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 退化成一个实数, 即 $a = [a, a]$, 这时称 $[a, a]$ 为点区间数。由此可以看出, 普通实数是区间数的特例, 区间数是实数的扩展。记实数集 R 上全体区间数组成的集合为 $I(R)$, 其中的每个区间数用大写字母 $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ 表示, 而实数可以看作点区间数, 它们用小写字母 $a, b, c, \dots, x, y, z$ 表示。

定义 1.2 设 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 是任意一个区间数, 若满足: $0 \leq \underline{a} \leq \bar{a}$, 则称区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 为正区间数, 记实数集 R 上全体正区间数组成的集合为 $I^+(R)$; 若满足: $\underline{a} \leq \bar{a} \leq 0$, 则称区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 为负区间数, 记实数集 R 上全体负区间数组成的集合为 $I^-(R)$ 。

为了应用方便, 区间数还有其他表示形式。设 $[\underline{a}, \bar{a}] \in I(R)$, 则分别称 $m([\underline{a}, \bar{a}]) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a})$ 和 $w([\underline{a}, \bar{a}]) = \frac{1}{2}(\bar{a} - \underline{a})$ 为区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 的中心和半径。利用区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 的中心和半径, 可将区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 表示为 $[\underline{a}, \bar{a}] = \langle m([\underline{a}, \bar{a}]), w([\underline{a}, \bar{a}]) \rangle$, 即

$$\langle m([\underline{a}, \bar{a}]), w([\underline{a}, \bar{a}]) \rangle = [m([\underline{a}, \bar{a}]) - w([\underline{a}, \bar{a}]), m([\underline{a}, \bar{a}]) + w([\underline{a}, \bar{a}])]$$

定义 1.3 设 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 是任意区间数, 则称 $[\underline{a}, \bar{a}]^- = [-\bar{a}, -\underline{a}]$ 是区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 的象, 记作“ $[\underline{a}, \bar{a}]^-$ ”。

定义 1.4 设 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 是任意区间数, 且 $0 \in [\underline{a}, \bar{a}]$, 则设

$[\underline{a}, \bar{a}]^{-1} = [\frac{1}{\bar{a}}, \frac{1}{\underline{a}}]$ 是区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 的倒数, 记作“ $[\underline{a}, \bar{a}]^{-1}$ ”。

定义 1.5 设 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 是任意区间数, 则称 $|[\underline{a}, \bar{a}]| = \max\{|\underline{a}|, |\bar{a}|\}$ 为区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 的绝对值, 记作“ $|[\underline{a}, \bar{a}]|$ ”。

例 1.1 设 $A = [3, 5]$, 则

$$A^{-} = [-5, -3], A^{-1} = [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}], w(A) = 5 - 3, |A| = \max\{|3|, |5|\} = 5.$$

定义 1.6 设 $[\underline{a}, \bar{a}]$, $[\underline{b}, \bar{b}]$ 是任意两个区间数, 若满足: $\underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{a} \leq \bar{b}$, 则称区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 包含于区间数 $[\underline{b}, \bar{b}]$, 或称区间数 $[\underline{b}, \bar{b}]$ 包含区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$, 记作“ $[\underline{a}, \bar{a}] \subseteq [\underline{b}, \bar{b}]$ ”, 或“ $[\underline{b}, \bar{b}] \supseteq [\underline{a}, \bar{a}]$ ”。

例 1.2 设 $A = [-2, 6]$, $B = [2, 4]$, 由于 $-2 < 2 < 4 < 6$, 所以 $[2, 4] \subseteq [-2, 6]$ 。

定义 1.7 设 $[\underline{a}, \bar{a}]$, $[\underline{b}, \bar{b}]$ 是任意两个区间数, 若满足: $\underline{a} = \underline{b}$, $\bar{a} = \bar{b}$, 则称区间数 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 和 $[\underline{b}, \bar{b}]$ 相等, 记作“ $[\underline{a}, \bar{a}] = [\underline{b}, \bar{b}]$ ”。

1.2 区间数的运算

1.2.1 区间数的四则运算及其性质

区间数与实数一样可以进行加、减、乘、除、乘方、开方等运算, 区间数的加、减、乘、除、乘方、开方运算的定义如下:

定义 1.8 设 $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ 和 $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ 是任意两个区间数, $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ 与 $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ 的和定义为:

$$A + B = [\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

记作“ $[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}]$ ”。

定义 1.9 设 $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ 和 $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ 是任意两个区间数, $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ 与 $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ 的差定义为:

$$A - B = [\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

记作“ $[a, \bar{a}] - [b, \bar{b}]$ ”。

定义 1.10 设 $A = [a, \bar{a}]$ 和 $B = [b, \bar{b}]$ 是任意两个区间数, $A = [a, \bar{a}]$ 与 $B = [b, \bar{b}]$ 的积定义为:

$$A \times B = [a, \bar{a}] \times [b, \bar{b}] = [\min\{\underline{ab}, \underline{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{ab}, \underline{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}\}]$$

记作“ $[a, \bar{a}] \times [b, \bar{b}]$ ”。

定义 1.11 设 $A = [a, \bar{a}]$ 和 $B = [b, \bar{b}]$ 是任意两个区间数, 且 $0 \notin [b, \bar{b}]$ $A = [a, \bar{a}]$ 与 $B = [b, \bar{b}]$ 的商定义为:

$$A \div B = [a, \bar{a}] \div [b, \bar{b}] = [\min\{\frac{a}{b}, \frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\}, \max\{\frac{a}{b}, \frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\}]$$

记作“ $[a, \bar{a}] \div [b, \bar{b}]$ ”。

由区间数的性质可以看出, 有以下结论成立:

(1) 区间数 $A = [a, \bar{a}]$ 和 $B = [b, \bar{b}]$ 的差可以看成是区间数 $A = [a, \bar{a}]$ 与区间数 $B = [b, \bar{b}]$ 的象的和, 即

$$A \div B = [a, \bar{a}] \div [b, \bar{b}] = [a, \bar{a}] + [-b, -\bar{b}] = [a - \bar{b}, \bar{a} - b]$$

(2) 区间数 $A = [a, \bar{a}]$ 和 $B = [b, \bar{b}]$ 的商可以看成是区间数 $A = [a, \bar{a}]$ 与区间数 $B = [b, \bar{b}]$ 的倒数的积, 即

$$A \times B^{-1} = [a, \bar{a}] \times [b, \bar{b}]^{-1} = [a, \bar{a}] \times [\frac{1}{b}, \frac{1}{\bar{b}}]$$

(3) 区间数 $A = [a, \bar{a}]$ 与其象 $A^{-} = [a, \bar{a}]^{-}$ 之和并不等于实数零, 这是因为:

$$A + A^{-} = [a, \bar{a}] + [-\bar{a}, -a] = [-(\bar{a} - a), (\bar{a} - a)] \neq 0$$

但 $0 \in A + A^{-}$, 而且 $A + A^{-}$ 的左右端点关于 0 是对称的。

(4) 区间数 $A = [a, \bar{a}]$ 与其倒数 $A^{-1} = [a, \bar{a}]^{-1}$ 的乘积并不等于实数 1, 这是因为:

$$A \times A^{-1} = [a, \bar{a}] \times [a, \bar{a}]^{-1} \neq 1$$

但 $1 \in A \times A^{-1}$ 。

当区间数 $A=[\underline{a}, \bar{a}]$ 是实数 (即点区间数) $a=[a, a]$ 时, 由于它的象和倒数分别为 $a^- = [-a, -a]$, $a^{-1} = [\frac{1}{a}, \frac{1}{a}] = \frac{1}{a}$, 故有 $a + (-a) = 0$, $a \cdot a^{-1} = 1$, 由此可以看出实数的四则运算是区间数四则运算的特殊情况, 区间数运算比实数运算要复杂得多。

例 1.3 设 $A=[-1, 3]$, $B=[4, 7]$, 则

$$[-1, 3] + [4, 7] = [3, 10]; \quad [-1, 3] - [4, 7] = [-8, -1];$$

$$[-1, 3] \times [4, 7] = [-7, 21]; \quad [-1, 3] \div [4, 7] = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}].$$

由上述运算结果可知: 如果确定数 x 和 y 分别位于区间 A 和 B 中, 那么 $x+y$, $x-y$, $x \times y$, $x \div y$ 仍然是一个确定数, 且它们分别在 $A+B$, $A-B$, $A \times B$ 和 $A \div B$ 中。

区间数四则运算具有如下性质:

定理 1.1 设 $A=[\underline{a}, \bar{a}]$, $B=[\underline{b}, \bar{b}]$, $C=[\underline{c}, \bar{c}]$ 是任意三个区间数, 则有

(1) 加法满足结合律, 即 $(A+B)+C=A+(B+C)$ 。

(2) 加法满足交换律, 即 $A+B=B+A$ 。

(3) 乘法满足结合律, 即 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ 。

(4) 乘法满足交换律, 即 $A \times B = B \times A$ 。

(5) 点区间数 $0=[0, 0]$ 和 $1=[1, 1]$ 对区间数加法和乘法运算而言是两个唯一的中性元素, 即

$$A = A + 0 = 0 + A$$

$$A = A \times 1 = 1 \times A$$

(6) 区间数乘法对区间数加法一般不满足分配律, 但点区间数 $a=[a, a]$ (实数) 对区间数加法满足分配律, 即有

$$a \times (B + C) = a \times B + a \times C$$

证明: (1) 因为

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= ([\underline{a}, \bar{a}]+[\underline{b}, \bar{b}])+[\underline{c}, \bar{c}] = [\underline{a}+\underline{b}, \bar{a}+\bar{b}]+[\underline{c}, \bar{c}] \\ &= [\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}], \end{aligned}$$