21世纪

青少年科学知识文库

抽象的数学

（上）

44

黎小江　主编

刘韶跃　李以泉　编著

广　州　出　版　社

21世纪青少年科学知识文库

抽象的数学

（上册）

黎小江 主编

刘韶跃
李以泉 编著

广州出版社

粤新登字 16 号

责任编辑　赵辛予

责任校对　容晓风

封面设计　蒙复旦

书　　名　21 世纪青少年科学知识文库

作　　者　黎小江主编

出版发行　广州出版社　(广州市东风中路 503 号六、七楼　邮编:510045)

经　　销　各地新华书店

印　　刷　广东省茂名日报印刷厂(茂名市红旗中路 9 号)

规　　格　787×1092 毫米　32 开本　82.5 印张

字　　数　1396 千字

版　　次　2002 年 12 月第 1 版

印　　次　2002 年 12 月第 1 次

印　　数　1—21000 册

书　　号　ISBN7—80592—707—3/G・131

出版者的话

我们住在一个历史悠久的星球上，我们处于一个五彩缤纷的世界中，我们生活在一个日益发展的社会里。自古迄今，由猿到人，从原始愚昧至文明进步，我们人类已经走过漫长的历程，终于走到了自有公元纪年以来的二十世纪的末叶，即将跨入那崭新而充满希望的二十一世纪。

站在世纪交会的接壤处，蓦然回首，反顾来路的坎坷，我们会惊讶于那岁月积淀的沉厚、文化蕴藏的浩瀚；欣然前瞻，憧憬前途的璀璨，我们将肃穆于那科技更新的神速、肩负责任的重大。没有疑问，历史需要跨世纪的人才。

跨世纪人才的培养，重点当然就在今天的青少年一代。他们必须比他们的先辈具有更为开阔的视野、更为敏锐的触觉、更为广博的知识，才能适应历史发展、社会进步的需要，才能肩负起建好祖国、造福人类的重任。因此，继承传统的精神，采撷前人的成果，反

思过往的历史，认识周围的世界，就成为中小学生们现实学习之渴求与必须，也正是我们编纂出版这套《百科世界丛书》的初衷与目的。

这套丛书，共六辑一百二十本。它们门类博杂，囊括百科，举凡天文、地理、动物、植物、历史、文学、语言、建筑、科技、美术、音乐、绘画、饮食、体育、军事、卫生以至社会生活各个方面都有涉及和介绍。

由北京商学院、北京服务管理学校、中山大学、暨南大学、华南师范大学、广东工业大学、广东商学院、湘潭大学、广西医科大学、广西中医学院、广州博物馆、广东司法报社、广东南方信息报社等单位的学者、专家、研究员们，为撰写这套丛书付出了艰辛的劳动，我们在此表示由衷的感谢。他们写成的这套丛书，力图用崭新的视角、丰富的材料、简短的篇幅和浅显的文字，将读者导入一个多彩而神奇的世界。

青少年朋友，愿这套丛书成为你心灵相通、人生伴行的挚友。

第一辑：

1. 神秘的宇宙(上)
2. 神秘的宇宙(下)
3. 广袤的大地(上)
4. 广袤的大地(下)
5. 蔚蓝的海洋(上)
6. 蔚蓝的海洋(下)
7. 变幻的气象
8. 巍峨的山岳
9. 奔腾的江河
10. 平静的湖泊
11. 清澈的溪泉
12. 著名的古迹(上)
13. 著名的古迹(下)
14. 驰誉的桥梁
15. 古老的塔楼
16. 驰名的学校
17. 茂绿的草木
18. 绚丽的花卉
19. 丰硕的果实(上)
20. 丰硕的果实(下)

第二辑：

21. 远古的恐龙
22. 珍稀的飞禽(上)
23. 珍稀的飞禽(下)
24. 珍奇的走兽(上)
25. 珍奇的走兽(下)
26. 繁盛的昆虫(上)
27. 繁盛的昆虫(下)
28. 自在的游鱼
29. 驯良的家畜
30. 可爱的家禽
31. 动人的传说
32. 中华的习俗
33. 环宇的风情
34. 伟大的发明
35. 庄严的法律
36. 神秘的宗教
37. 繁荣的经济
38. 深邃的哲学
39. 深奥的医学
40. 昌明的教育

第三辑：

41. 先进的科技(上)
42. 先进的科技(中)
43. 先进的科技(下)
44. 抽象的数学(上)
45. 抽象的数学(下)
46. 奇妙的物理(上)
47. 奇妙的物理(下)
48. 奇幻的化学(上)
49. 奇幻的化学(下)
50. 奇异的人体
51. 神奇的能源
52. 奥秘的电子
53. 奇趣的通讯
54. 畅达的交通
55. 奇巧的建筑
56. 壮美的航天
57. 有趣的电影
58. 迷人的电视
59. 多彩的家电
60. 新型的材料

第四辑：

61. 中国的文物
62. 精湛的工艺
63. 精美的雕塑
64. 美丽的街道
65. 多彩的绘画
66. 典雅的书法
67. 动听的音乐
68. 悦耳的曲艺
69. 激烈的体育(上)
70. 激烈的体育(下)
71. 政坛的要人
72. 战场的猛将
73. 文苑的名流
74. 科学的精英
75. 体坛的健儿
76. 商海的富豪
77. 教育的园丁
78. 艺堂的巨匠
79. 早慧的神童
80. 拔萃的巾帼

第五辑：

81. 悠久的历史(上)
82. 悠久的历史(下)
83. 悲壮的战争(上)
84. 悲壮的战争(下)
85. 锐利的武器
86. 发达的文化(上)
87. 发达的文化(下)
88. 丰富的语言
89. 生动的词汇
90. 有益的阅读
91. 辛勤的写作
92. 陶情的小说
93. 优美的散文
94. 辉煌的诗歌
95. 贴切的修辞
96. 缜密的逻辑
97. 精练的成语
98. 通俗的谚语
99. 工整的对联
100. 启智的谜语

第六辑：

101. 重要的粮食
102. 鲜嫩的蔬菜
103. 传统的佳肴
104. 浓醇的美酒
105. 甘润的香茶
106. 美味的食品
107. 琳琅的商品
108. 缤纷的服装
109. 名贵的中药
110. 有害的烟草
111. 身体的保健
112. 家电的使用
113. 购物的指南
114. 得法的收藏
115. 讲究的烹饪
116. 合适的穿戴
117. 怡情的种养
118. 合理的饮食
119. 得体的美容
120. 适度的娱乐

目　录

一、有趣的数

有这样一个故事：原始部落中有两个人决定做计数游戏——谁说的数字大谁就赢。

“好，”一个人说，“你先说吧！”

另一个人绞尽脑汁想了许久，最后说出了他想到的最大数字：“三。”

第一个人听后，冥思苦想了半天，最后他无可奈何地说：“你赢啦！”

很多人会认为这是不可能的，现在幼儿园的小朋友都不至于此。可别忘了这是在原始部落里。不信的话，请看我们下面的介绍。

1. 从1开始到实数

恩格斯曾指出：“数学是从人的需要产生的。”作为数学最基本的概念之一的数也不例外。人类在远古

时代长期狩猎、捕鱼等生产实践活动中，经常接触到如一条鱼、一块石头、一只猎物等，逐步认识到它们在量上具有共同特征，即“一”个东西，于是舍弃事物的具体内容而得到抽象的数“一”。数“二”的出现，可能是由于双手各拿一件物品抽象得到的。但开始很多部落都不存在比三大的数词，要是有数字大于三的东西，他只会回答说：“许多个”。难怪前面的故事会发生。当然，随着时间的推移，产生了越来越多的数。

然后，出现了原始的计数方法，即使用简单算筹以一一对应的原则来进行。如数一个扳一个指头，或在木头上刻一个槽，或在绳上打一个结。由于人的手指提供了一个方便的计数工具，所以我们选择十进位制数也就不奇怪了。

另外，数字“0”的产生也是相当重要的；前面的各种表示数字的符号中，没有代表“0”的符号。从第一个数字符号开始计数到想出一个表示“无”的符号，经过了人类相当长的时间。据考证，成功地解决这个问题的可能是生活在不迟于9世纪的一个印度人。在算筹数码中，最早在遇到某位数是零时，是不摆放算筹，将该位空出，如6021表示为⊥　=|，后来改为用圈0表示零，6021就表示成⊥〇=|。需注意的是，数字“0”并不表示绝对的无。如温度为0℃，并不表示没有温度。数学中的“0”只表示某物特定的无，是

对任何一个确定量的否定，但本身也有量的规定。

产生自然数后，由于人类实践的发展，认识的深化，自然数又不够用了。例如，人们在建筑房屋、制造工具和丈量土地等实践中，遇到了大量的测量问题。而在测量中，往往出现用事先规定的单位长度不能正好量度完的情况。于是，只好将单位再缩小一些，如将原单位缩小一半，作为新单位再去量，若还不能量完，就再将单位缩小一半，作为新的单位再去量，……。这样，便逐渐产生了分数概念，如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，……。据史料记载，古代巴比伦人已应用60、60^2、60^3为分母的分数。我国古代数学名著《九章算术》中，不仅记载了分数的概念，而且还系统叙述了分数的算法。分数概念的形成，在实践中解决了不能正好量尽的矛盾，在数学上解决了在自然数范围内，除法不能畅通无阻的矛盾。

负数概念的引入，是由于用自然数和分数无法解决一些具有相反意义量的问题，如卖出和买入，上升与下降等等。为解决这些实际问题，引入了正负数的概念，如记卖出为正，买入为负；余款为正，欠款为负等。但负数的引入及应用曾引起相当大的恐慌，主要是取消了较小数减较大数的禁令。曾有人用$\frac{1}{-1}=$

$\frac{-1}{1}$这个等式来反对负数，其理由是等式左边为较大数与较小数之比，右边为较小数与较大数之比（因为$-1<1$），它们怎么会相等呢？当时很多数学家在解方程时都不取负根。然而，在实践的推动下，负数作为正数的补充，逐渐得到人们的公认。有了负数，减法就可以畅通无阻了。

正整数、负整数、正分数、负分数和零，统称为有理数。这样，人们对数的认识便从“1”发展到了有理数。到了此时，很多人都以为只有这些数了，或者说这些数可用来对付任何事物。果真如此吗？

在实际度量中，原先人们都以为，只要单位取得充分小，总可以把两个量同时量尽，或者说令其中一个量为单位，另一个量总可表示成分数。但实际上，并不是任何一条线段均可与单位长线段通约，这是早期希腊数学家最惊人的发现之一，即存在不同公度线段。换句话说，如果规定一线段为单位长，则存在这样的线段，它的长不是有理数，这就意味着存在不是有理数的数，我们称这种数为无理数。这标志着数学上严格推理的起源，是科学上极其重要的事件。

我们举例说明，求证一正方形的对角线和它的边长不可公度。给定正方形边长为1，设对角线长为x，由勾股定理，有$x^2=1^2+1^2=2$，假设X与1是可公度

的，则能找到两个整数 m 和 n，使 $x=\frac{m}{n}$，则 $m^2=2\cdot n^2$，我们不妨假定 m 和 n 不可约（如可约，则先约），所以 m^2 必定为一偶数，则 m 也必定为一偶数，于是我们可以令 $m=2r$，则得到 $4r^2=2\cdot n^2$，即 $n^2=2\cdot r^2$，所以 n^2 也为偶数，同理 n 也必为偶数。由于 m，n 都为偶数，这与以前假定 m 和 n 不可约矛盾。所以，x 不能为有理数，即没有等于 $\sqrt{2}$ 的有理数，这就严格证明了无理数的存在。有理数和无理数统称为实数。

有了实数的概念，就成功解决了只有有理数概念时不可公度和开方不尽的矛盾。数的概念又一次扩展。

2. 负数有平方根吗

12 世纪，印度数学家拜斯迦罗说过这样一句话："正数的平方是正数，负数的平方也是正数。因此，一个正数的平方根是两重的：一个正数和一个负数。负数没有平方根，因为负数不是平方数。"在实数范围内，确实没有一个数的平方会等于-1。但 16 世纪的意大利数学家卡尔丹却将负数的平方根这个"显然"没有意义的东西写进公式中。他在讨论是否有可能将

10 分成两部分，使两者的乘积等于 40 时，写下了下面两个等式：

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10$$

$$(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15})=40$$

写完后，他本人也认为这个表达式没有意义，是虚构的、想象的。不管这想法有多么荒诞，毕竟还是实现了把 10 分成两个乘起来等于 40 的部分，卡尔丹给它起了个名字，叫“虚数”。

后来，虚数被越来越多的科学家使用，但总有很大保留，并每次都提出借口。如著名瑞士科学家欧拉在 1770 年发表的著作中，有许多地方用到了虚数，但又加上这样的评语：“一切形如$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$的数学式，都是不可能有的、想象的数，因它们所表示的是负数的平方根。对于这类数，我们只能断言，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么，它们纯属虚构。”这反映了当时对虚数的一种复杂心理。

尽管虚数用起来非常勉强，但还是迅速成了根式中无法避免的东西。没有它们，可以说是寸步难行。

像我们从基础 1 可得到所有实数一样，可以把$\sqrt{-1}$称为虚数的基数，并把它写作 i，从而可得到所

有的虚数，如$\sqrt{-9}=3i$，$\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$等等。每个实数都有一个虚数搭配。另外，实数与虚数还能结合起来，形成复数，如$5+\sqrt{-15}=5+\sqrt{15}i$。

两个世纪后，两位业余数学家对虚数作了简单的几何解释，才揭示虚数神秘的、不可思议的面纱。这

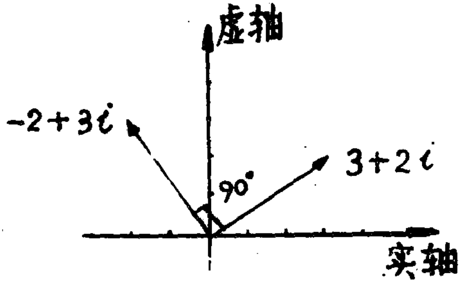

图 1

两位业余数学家是测绘员威塞尔和会计师阿尔刚。他们的解释是：一个复数，例如$3+2i$，可以像图1那样表示出来，其中3为水平坐标，2为垂直坐标。所有实数对应实轴上的点，而纯虚数对应纵轴上的点。我们把位于实轴上的数2乘以i后，在几何上相当于逆时针逆转90°，同样，将$3+2i$乘以i，得到

$$(3+2i)\times i=3i+2i^2=-2+3i$$

从几何上看，$-2+3i$这个点正好也是相当于$3+2i$这个点绕原点逆时针旋转90°。同理，一个数乘上$-i$就是绕原点顺时针方向旋转90°。这样，复数就被理解成平面上的点或向量，并可与物理学上的各种向量联系起来。

到这时，人们才完全消除对虚数的怀疑，复数理论得到了迅速发展。虚数的引入解决了负数不能开偶次方的矛盾。从而数的概念就出现了从自然数→有理数→实数→复数这样一个演变、扩展的系列。

3. 奇怪的π和e

这两个数是我们常用的怪数，也是唯一用专业符号表示的两个数。它们不仅是无理数，而且是不多见的超越数。超越数的概念是1744年瑞士数学家首先提出的，他把能满足某个整数系数的代数方程的数称为代数数，如$\sqrt{2}$为代数数，因为它是$x^2-2=0$这个整数系数代数方程的根，而把不是代数数的实数称为超越数。正如欧拉所说，超越数“超越于代数方程的能力之外”。超越数一定是无理数，无理数不一定是超越数。

超越数的个数很多，有定理可以推出超越数的个数比代数数多得多。但在科学上最著名用得最多的却是圆周率π和自然对数的底e。

先说π。π在历史上曾叫鲁道夫数、祖率、环率、圆率等。1706年，英国数学家琼斯首次正式只用π表示圆周率，即圆的周长与直径之比。