数学名著译丛

组合几何

〔美〕J.帕赫　P.K.阿格瓦尔 著

丁　仁　苏战军
苑立平　徐常青　魏祥林 译

科学出版社
www.sciencep.com

图字：01-2007-1855

内 容 简 介

组合几何是一门古老而又年轻的数学学科. 许多组合几何问题因其直观表述而独具魅力. 计算机科学的迅猛发展大大促进了组合几何的发展, 也为组合几何开拓了广阔的应用前景. 本书系统阐述组合几何领域近三十余年来若干最为重要的研究成果与方法, 并给出详尽证明. 本书涵盖数的几何、填充与覆盖、极图理论、超图理论、有限点集距离分布、几何图论、几何偏差理论等多个分支, 每章配有习题与解答提示.

原书作者特地为中文版撰写了反映 1995 年本书英文版出版以来最新研究成果的补充内容, 提供了大量最新参考文献.

本书可用作数学与计算机科学有关专业的教材与科研用书, 也可供组合几何爱好者赏析阅读, 还可供计算几何、计算机图形学、编码理论、机器人技术及计算机辅助设计等应用领域的专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合几何/(美)J. 帕赫, P. K 阿格瓦尔著; 丁仁等译. —北京: 科学出版社, 2008
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-021118-7
I.组… II.① 帕… ② 阿… ③ 丁… III.组合几何 IV.O157.3
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 031078 号

责任编辑: 陈玉琢 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 6 月第一次印刷 印张: 21 1/4
印数: 1—3 000 字数: 396 000

定价: 65.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

献给　Paul Erdős, László Fejes Tóth

与 C. Ambrose Rogers

中 文 版 序

近 20 年来, 世人见证了发生在中国的一次 “组合论复兴”. 一批批优秀的数学家、计算机科学家相继投身于组合论研究, 兴建研究机构, 召开国际会议, 出版专著, 发表论文, 一派兴旺景象. 所有这些活动, 主要涉及密切相关的两个领域 —— 代数组合论与计数组合论.

今天我们有机会向中国读者呈献一部展示组合论另一侧面 —— 几何学侧面的新书, 不胜欣喜. 这一领域中涌现的许多问题是极值问题, 因而, 很自然地, 解决这类问题常常用到经典分析与极值组合论相结合的方法. 事实证明, 极值图理论与超图理论也许是近代理论计算机科学与算法理论中十分独特的最具应用价值的工具. 本书第二部分提供了相关的基础知识. 四川大学柯召教授是这一领域的先驱者之一.

相传约 3000 年前, 洛河中跃出的一只神龟背上刻着的竟是组合论的第一个研究对象 —— 幻方. 具有象征意义的是, 组合论研究史上第二个研究对象最初或许也是以几何形式出现的, 那就是杨辉三角 (后来由帕斯卡重新发现). 20 世纪末, 组合论已经成为拥有大量有效方法与卓著成果的重要数学学科.

正如本书所述, 这些方法可用以证明甚至欧几里得都会十分欣赏的许多令人兴奋的定理, 有关三角形、正方形、圆与直线及其他几何元素的诸多命题. 相关结果在其他数学分支, 如计算几何、编码理论、计算机图形学与图画法中都有着多种应用.

如本书第一部分若干章节所指出的, 组合几何植根于经典数学, 植根于 Newton, Euler, Gauss, Minkowski, Erdős, Fejes Tóth 及其他数学家的工作. 然而, 组合几何学中尚未解决的难题比比皆是, 解决这些问题需要新思想与新方法. 组合几何学是有志挑战数学难题者一展身手的最佳领域之一. 长期以来, 中国团队在国际数学奥赛中一直雄踞榜首, 我竭诚希望, 本书将为中国无数才华横溢的学生引介一个多姿多彩的研究领域, 希望他们从中发现种种令人兴奋的亟待解决的问题, 学会解决这些问题的基本思想. 我深信, 青年一代在未来十年取得的成就, 会全面改写本书的内容.

诚挚感谢我的朋友、国际知名组合几何学家河北师范大学丁仁教授, 他与他的四位年轻同事学生苏战军、苑立平、徐常青、魏祥林共同完成了本书中文版的翻译工作. 为了反映本书英文版 1995 年出版以来组合几何领域的最新成果, 他们添加了我特地为中文版撰写的补充内容与最新文献. 在翻译过程中他们关注甚至极其

微小的技术性细节, 力求术语译名严谨准确, 为一部上乘之作付出了最大努力.

下面列举的是本书英文版 1995 年出版以来先后问世的 6 部相关的重要专著.

K. Böröczky, Jr., *Finite Packing and Covering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

P. Brass, W. Moser and J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.

J. E. Goodman and J. O'Rourke, eds., *Handbook of Discrete and Computational Geometry (2nd ed.), Discrete Mathematics and its Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2004.

P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry, Grundlehren Math. Wiss.* **336**, Springer, Heidelberg, 2007.

J. Matoušek, *Lectures on Discrete Geometry, Graduate Texts in Mathematics* **212**, Springer, New York, 2002.

J. Pach, ed., *Towards a Theory of Geometric Graphs*, Contemporary Mathematics Series, vol. **342**, American Mathematical Society, Providence, 2004.

J. 帕赫 (János Pach)
2007 年 11 月于纽约

英文版原序

“数学基础危机”、“判定问题”与“哥德尔定理”*当然都应归属 20 世纪初期最热门的科学论题. 相关研究促成了种种令人瞩目的新发现. 这些发现渗透到广阔的数学领域, 促进了许多曾被认为“死亡”的数学分支的发展. 然而直觉 (初等) 几何却沦为落伍者之一. 总的说来, 这一领域未受到应有重视, 而几何学中一些较为“抽象”的领域, 如拓扑学与微分几何, 却十分活跃, 对人类认识物质世界产生了重大影响. 35 年前, 在一次学术会议上迪厄多内 (J. Dieudonné) 慷慨激昂地喊出了“打倒欧几里得!”“永别了, 三角形!”的口号, 多数与会者竟持有同感 **.

然而, 随后世人即见证了直觉几何的复苏. 若干不同渠道为直觉几何输入了新鲜血液. László Fejes Tóth 与 C. Ambrose Rogers 的工作为 Newton, Gauss, Minkowski, Hilbert 等人研究的经典问题开创了新的组合论途径, 奠定了填装与覆盖理论的基础. 与此同时, P. Erdős 接连不断提出大量组合几何的新问题, 这些问题欧几里得如若在世也会赞赏不已. 事实表明, 其中许多问题在编码理论、组合优化、计算几何、机器人理论、计算机图形学等领域有着极为重要的应用. 计算机技术的迅猛发展为纯粹数学与应用数学众多领域的研究提供了巨大动力, 组合几何是从中获益最多的领域之一.

组合几何的大多数问题都涉及点、直线、圆、球面的配置问题, 涉及的是欧氏几何中最基本的研究对象. 其中许多问题因其直观表述而具有很强的吸引力, 可以让外行听来也头头是道. 例如, 在一个体积一定的箱子中可以填装多个单位球? 平面上 n 条直线与 n 个点之间的最大关联数是多少? 本书旨在提供一部独立的入门书, 阐述凸体配置 (第一部分) 与点线配置 (第二部分) 的重要结果. 本书论及的课题尽管显得较为初等, 但约一半内容都是近 20 年来的研究成果, 尚未见诸任何教材与专著. 相关论著与综述列举如下:

- *Geometry of Numbers*: J. Cassels (1959); P. Gruber and C. Lekkerkerker (1987); Erdős, P. Gruber, and J. Hammer (1989); M. Deza, V. Grishukhin, and M. Laurent (1993).
- *Theory of Packing and Covering*: C. A. Rogers (1964); L. Fejes Tóth (1964,

---

* 指“哥德尔不完备性定理”(Gödel Incompleteness Theorem). —— 译者注

** 20 世纪 20 年代末 30 年代初法国迪厄多内、嘉当 (H. Cartan) 等一批年轻的数学家组成了名为布尔巴基 (Bourbaki) 的团体, 倡导法国数学教学改革, 对 20 世纪数学有深远影响. 学术会议指的是 1959 年 12 月由欧洲经济合作组织 (OEEC) 在法国主办的 Royaumont 研讨会. —— 译者注

1972); G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1992, 1993d).

- *Coding Theory*: I. Csiszár and J. Körner (1981); J. van Lint (1982); J. Conway and N. Sloane (1988).
- *Convexity*: T. Bonnesen and W. Fenchel (1934); L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee (1963); B. Grünbaum (1967); I. Yaglom and V. Boltyansky (1951); R. Schneider (1993).
- *Combinatorial Geometry*: H. Hadwiger, H. Debrunner, and V. Klee (1964); V. Boltyansky and I. Gohberg (1985); P. Erdős and G. Purdy (1995); W. Moser and J. Pach (1986); V. Klee and S. Wagon (1991).
- *Computational Geometry*: F. Preparata and M. Shamos (1985); H. Edelsbrunner (1987); K. Mehlhorn (1985); K. Mulmuley (1994); J. O'Rourke (1994); M. Sharir and P. Agarwal (1995).
- *Linear Programming*: Chvátal (1983).
- *Convex Optimization*: M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver (1985).

作者曾在纽约大学柯朗研究所开设两门相关课程, 本书是以该课程的讲稿为基础撰写的. 在此谨向听课并参加研讨的学生与同事深表谢忱. 令人欣慰的是, 本书中的部分结果正是听课者在听课阶段及其后做出的研究成果. 在此谨向 Boris Aronov, Vasilis Capoyleas, Mikhael Gorbunov, Bud Mishra, Marco Pellegrini, Richard Pollack, Nagabhushana Prabhu, Micha Sharir, Joel Spencer, Marek Teichmann 与 Chee Yap 致谢.

特别要感谢 Pankaj K. Agarwal, 他笔录了我的讲课内容, 将我的手稿整理为 TeX文档, 细心审读所有材料并作了修改, 编写了全部参考文献, 为习题提供了诸多解答提示, 绘制了所有附图, 撰写了第 11,13 章的初稿. 没有他的锲而不舍的热心支持, 本书是不可能问世的.

还要感谢 Boris Aronov, Peter Brass, György Csizmadia, Herbert Edelsbrunner, György Elekes, Gábor Fejes Tóth, Zoltán Füredi, János Komlós, Wlodzimierz Kuperberg, David Larman, Endre Makai, Jiři Matoušek, Richard Pollack, Günter Rote, Jason Rush, Micha Sharir, Torsten Thiele, Géza Tóth, György Turán 与 Emo Welzl, 他们认真阅读了本书的初稿, 并提出了宝贵意见, 还将本书初稿作为本科生与研究生教材使用. 本书几经修改才得以定稿, 凡是具有坚实微积分基础, 熟悉组合论、概率论基本概念的大学生都应能读懂本书. 对于希望探索这一引人入胜的研究领域的研究生、专业数学工作者、业余数学爱好者, 本书则是研究课题的来源.

最后我要感谢我的老师与朋友 Paul Erdős, László Fejes Tóth 与 C. Ambrose Rogers, 他们造就了我的数学思维. 本书大部分基本结果或应归属他们, 或直接得益于他们的研究.

1990 年春, 在一次学术报告中, 盖尔范德 *说:“我年岁越大越相信, 绝大多数艰深数学问题的背后都有一个组合论问题.” 本书集中探讨的正是这样一个组合论在其中起着开创性引导作用的迅速发展的领域.

J. 帕赫 (János Pach)
1995 年 7 月于匈牙利布达佩斯

* L. M. Gelfand, 前苏联数学家, 1913 年生于乌克兰, 苏联科学院院士. 由于在泛函分析、群表示论、一次代数学等方面的成就, 1978 年获沃尔夫数学奖. —— 译者注

目　录

第二部分 点与直线的配置

第一部分　凸集的配置

第1章　数的几何

数的几何起源于数论, 是一门有着百余年历史的数学学科. Minkowski (1896) 富有成效的研究表明, 数论中的丢番图逼近及其他数论分支中许多重要结果都可以通过简单的几何论证得到. Minkowski 的一个独具创见的命题 (定理 1.7) 是数的几何理论的起点, 它可以视为鸽笼原理在可测集上的一个显而易见的推广. 本章旨在给出这一结论导出的一些直接结果, 包括 Fermat 的二平方和定理与四平方和定理的简洁证明.

1.1　格

下面是数的几何中的一个基本概念.

定义 1.1　给定 d 维欧氏空间$\mathbb{R}^d$ 中的 d 个线性无关的向量 (点) $u_1, \cdots, u_d$, 这些向量生成的**格** $\mathbf{\Lambda}$ 定义为

$$\mathbf{\Lambda}(u_1, \cdots, u_d) = \{m_1u_1 + \cdots + m_du_d | m_1, \cdots, m_d \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集.

称集 $\{u_1, \cdots, u_d\}$ 为 $\mathbf{\Lambda}$ 的**基**. 由形如 $m_1u_1 + \cdots + m_du_d$ (对每个 i, $m_i \in \{0, 1\}$) 的 2^d 个顶点导出的平行体 P 称为 $\mathbf{\Lambda}$ 的**基本平行体**或**胞腔**. 显然,

$$\operatorname{Vol} P = |\det(u_1, \cdots, u_d)|.$$

当然, 同一个格可以有许多不同的生成方式, 即 $\mathbf{\Lambda}$ 有许多不同的基. 因而 $\mathbf{\Lambda}$ 有许多不同的基本平行体. 但所有这些基本平行体的体积相等. 事实上, 设 P 是 $\mathbf{\Lambda}$ 的一个基本平行体, $B^d(R)$是 $\mathbb{R}^d$中球心在原点半径为 R 的球. 如果 R 很大, 那么对某些 $u \in \mathbf{\Lambda} \cap B^d(R)$, P 的形如 $P + u$ 的平移不交叠且 "几乎完全" 覆盖 $B^d(R)$.

定义 1.2　设 $\det \mathbf{\Lambda}$ 为 $\mathbf{\Lambda}$ 的任一基本平行体的体积. 若 $\det \mathbf{\Lambda} = 1$, 则称 $\mathbf{\Lambda}$ 为**单位格**.

下面通过若干简单命题说明格、球填装与丢番图逼近之间的密切关系. 为简单起见, 考虑 $d = 2$, 即平面情形.

定理 1.3　设 $\mathbf{\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个单位格. 则存在两个格点, 它们之间的距离至多为 $\sqrt{2/\sqrt{3}}$.

证明 设 $u, v \in \mathbf{\Lambda}$ 是一对格点, 它们之间的距离 $\delta^\star$ 最小. 不妨设 $u = \mathbf{0}$, 则对每个整数 k, 有 $kv \in \mathbf{\Lambda}$. 根据 $\delta^\star$ 的最小性, 以 kv 为圆心 $\delta^\star$ 为半径的圆盘的并中不可能有其他格点. 若 ℓ 表示经过 $\mathbf{0}$ 和 v 的直线, 则这些圆盘覆盖一个围绕 ℓ 的半宽为 $(\sqrt{3}/2)\delta^\star$ 的带形区域 (图 1.1). 另一方面, 由于 $\mathbf{\Lambda}$ 是单位格, 因此在平行于 ℓ 且到 ℓ 的距离为 $1/\delta^\star$ 的直线 t 上有无穷多个格点, 于是 $(\sqrt{3}/2)\delta^\star \leqslant 1/\delta^\star$, 结论成立. 显然一般情况下常数 $\sqrt{2/\sqrt{3}}$ 不能改进. □

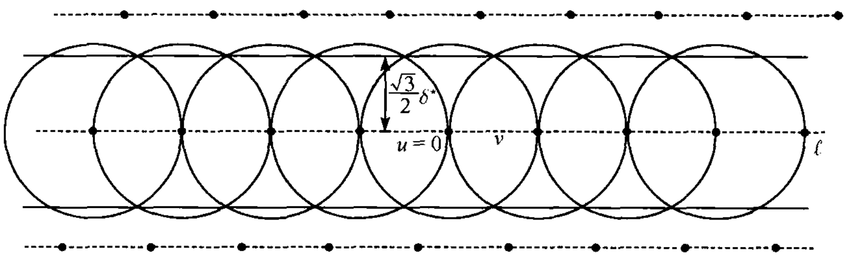

图 1.1 被圆盘覆盖的带形区域

围绕格 $\mathbf{\Lambda}$ 的每个格点画一个半径为 r 的圆盘. 若这些圆盘不交叠, 则称这些圆盘形成**格填装**. 一个格填装的**密度**是 $\pi r^2/\det\mathbf{\Lambda}$, 即平面被圆盘覆盖部分所占的比例.

推论 1.4 全等圆盘形成的格填装密度至多为 $\pi/\sqrt{12}$, 且此界可达.

证明 不妨假设 $\mathbf{\Lambda}$ 是单位格. 设 $\delta^\star$ 的含义与定理 1.3 证明中的 $\delta^\star$ 相同, 则对半径为 r 的不交叠的圆盘来说, r 的最大值为 $\delta^\star/2$. 因此, 由定理 1.3 知格填装密度为

$$\frac{(\delta^\star/2)^2\pi}{\det\mathbf{\Lambda}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$ □

推论 1.5 设 $f(m,n) = am^2 + 2bmn + cn^2$ 是一正定型, $a > 0$, $ac - b^2 = 1$. 则存在两个整数 m' 和 n', 其中至少一个不为 0, 且 $f(m',n') \leqslant 2/\sqrt{3}$.

证明 易知

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{\left(\sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n,\ \frac{1}{\sqrt{a}}n\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, m \text{ 与 } n \text{ 均为整数}\right\}$$

是单位格. 因此, 由定理 1.3 知, 存在一个非原点的格点

$$\left(\sqrt{a}m' + \frac{b}{\sqrt{a}}n',\ \frac{1}{\sqrt{a}}n'\right),$$

该格点到原点的距离至多为 $\sqrt{2/\sqrt{3}}$, 即

$$\left(\sqrt{a}m' + \frac{b}{\sqrt{a}}n'\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}n'\right)^2 = f(m',n') \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$ □

推论 1.6 设 α 是任一无理数, 则存在无穷多个整数对 (m, n), 使得

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n^2}.$$

证明 给定 $\varepsilon > 0$, 设

$$f(m,n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + (\varepsilon n)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}m^2 - \frac{2\alpha}{\varepsilon^2}mn + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right)n^2,$$

则 $f(m,n)$ 满足推论 1.5 的条件, 因此可以选取 $m', n' \in \mathbb{Z}$ (整数集), 使得

$$f(m',n') = \left(\frac{\alpha n' - m'}{\varepsilon}\right)^2 + (\varepsilon n')^2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

而此时

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{m'}{n'}\right| &= \left|\frac{\alpha n' - m'}{\varepsilon}\right| \cdot (\varepsilon n') \cdot \frac{1}{n'^2} \\ &\leqslant \frac{\left(\frac{\alpha n' - m'}{\varepsilon}\right)^2 + (\varepsilon n')^2}{2} \cdot \frac{1}{n'^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n'^2}.\end{aligned}$$

注意, 如果 ε 充分小, 那么 $n' \neq 0$. 同样地, 选取越来越小的 ε, 可得到无穷多个满足条件的数对 (m,n). □

d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 中内部非空的紧凸集称为**凸体***. 下面是本章开头提到的 Minkowski 的重要结果.

定理 1.7 (Minkowski, 1896) *设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是关于原点对称的凸体, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是单位格. 如果 $\operatorname{Vol} C > 2^d$, 那么 C 至少含一个不同于 $\mathbf{0}$ 的格点.*

证明 考虑凸体 $C/2 + u = \{c/2 + u \mid c \in C\}$, 其中 $u \in \boldsymbol{\Lambda}$. 如果这些凸体中的两个 (例如, $C/2+u$ 和 $C/2+v$) 有公共点 p, 那么 $p-u, p-v \in C/2$. 但此时 $v-p \in C/2$, 从而 $\mathbf{0} \neq v-u = (v-p)+(p-u) \in C/2+C/2 = C$ 且 $v-u \in \boldsymbol{\Lambda}$, 即得结论.

若集合 $C/2+u$ $(u \in \boldsymbol{\Lambda})$ 是不相交的, 则易知 $\operatorname{Vol}(C/2) = (1/2^d)\operatorname{Vol} C \leqslant 1$, 矛盾. □

事实上, 同理可证

定理 1.8 (Blichfeldt, 1921; van der Corput, 1936) *设 k 是自然数, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 是满足 $\operatorname{Vol} S > k$ 的**Jordan可测集**, 且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是一单位格. 则存在 $s_0, s_1, \cdots, s_k \in S$, 使得对所有 $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, 有 $s_i - s_j \in \boldsymbol{\Lambda}$.*

* $\mathbb{R}^2$ 即平面中的凸体通常称为凸区域. 为便于讨论, 一概称为凸体. —— 译者注