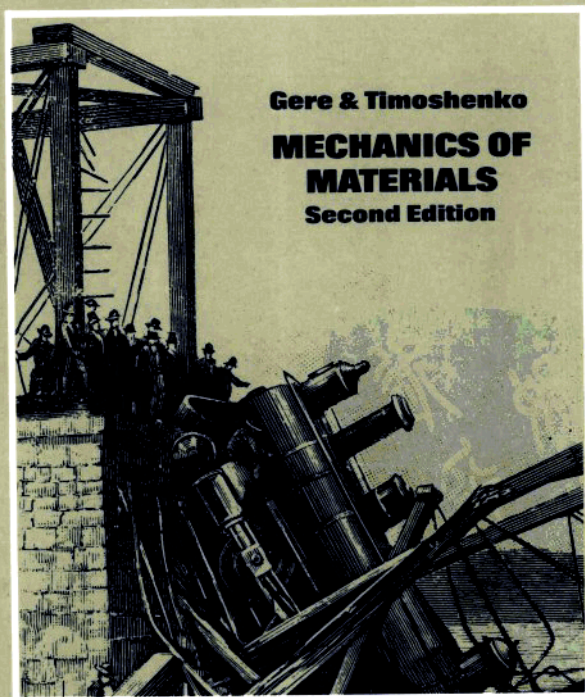


材料力學題解

第二版 下冊

解題者：林明煌 李成富



科技圖書股份有限公司

編輯者言

Timoshenko 與 Gere 合著的“材料力學”，自民國六十一年首由本公司譯印以來，經過十餘年歲月，其中在六十六年又加印 SI 制，兩種版本兼並發行，供應全國。七十四年二月又依 Gere 教授改編的第二版本重譯發行，更見風行。該書除酌加新題材、多附例題外，習題共列 1037 題，較第一版多出幾近一倍。茲為方便讀者核對練習結果起見，委請李成富、林明煌兩君代作演習，編印成書。因原書已附有全部答案，核對演算結果均無差異，故可認為正確。

查教科書中附列習題，原為測試學生瞭解該書程度而設，出版簡單解答，僅供教師參考，向不公開出售。茲因坊間出版各種教科書解答種類甚多，印行急促難免對學生學習發生反效果。故對此次出版內容，除力求正確外，運用精簡解法演出，使讀者在檢閱時尚可獲得若干學習機會，勿將此書作為滿足而自誤。

科技圖書股份有限公司

編輯部 謹識

材料力學題解 (下冊)

目 錄

第 七 章	樑的撓度.....	1
第 八 章	靜不定樑.....	98
第 九 章	不對稱彎曲.....	154
第 十 章	非彈性彎曲.....	225
第十一章	柱.....	275
第十二章	能量分析法	

第七章 樑的撓度

參閱“材料力學”下冊，87頁至106頁。

7.3-1 試將簡支樑負均佈載重的撓度曲線式〔見例題1的式(7-13)〕，用連續微分求得該樑的彎矩 M 與剪力 V 式，並用靜態平衡證明你的結果。

$$\text{【解】 } v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (7-13)$$

$$\text{微分之得：} M = -EIv'' = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$V = -EIv''' = \frac{qL}{2} - qx$$

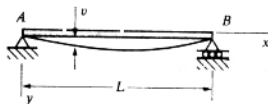
$$q = EIv''' = q$$

與4.4節中的式(e)相同。

7.3-2 簡支樑 AB (見習題圖7.3-2)的撓度曲線式為：

$$v = \frac{q_0 x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

試求樑上的負載。



習題圖 7.3-2 與 7.3-3

$$\text{【解】 將 } v = \frac{q_0 x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

連續微分之得：

$$v' = \frac{q_0}{360 EI} (7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

$$v'' = \frac{q_0}{360 EI} (-60L^2x + 60x^3)$$

$$v''' = \frac{q_0}{360 EI} (-60L^2 + 180x^2)$$

$$v'''' = \frac{q_0}{360 EI} (360x) = \frac{q_0 x}{EI}$$

$$\therefore q = EIv'''' = \frac{q_0 x}{L}$$

7.3-3 簡支樑 AB (見習題圖 7.3-3) 的撓度曲線式為:

$$v = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{L}$$

試求樑上的負載。

【解】 將 $v = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{L}$

連續微分之，得 4 階微分式為：

$$v'''' = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{q_0}{EI} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\therefore q = EIv'''' = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

7.3-4 跨長 $L = 16$ ft 的寬翼樑 (W 14×26) 受均佈負載 q (見例題 1 與圖 7-3)。若 $q = 1.8$ k/ft, $E = 30 \times 10^3$ psi, 試計算最大撓度 δ 與支承處之旋角 θ 。

【解】 由式 (7-12) 與式 (7-13) 得：

$$v' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qL}{4} x^2 + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24} \right)$$

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$\text{而 } \delta = v \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (7-14)$$

$$\theta = \theta_s = \theta_b = v'(0) = \frac{qL^3}{24EI} \quad (7-15)$$

將 $L = 16 \text{ ft}$, $q = 1.8 \text{ k/ft}$, $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$

$I = 245 \text{ in}^4$ (查附錄 E) 等已知值代入(1)式得:

$$\delta = \frac{5 \times (1.8 \times \frac{1,000}{12}) \times (16 \times 12)^4}{384 \times 30 \times 10^6 \times 245} = 0.361 \text{ in.}$$

$$\theta = \frac{(1.8 \times \frac{1,000}{12})(16 \times 12)^3}{24 \times 30 \times 10^6 \times 245} = 6.02 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

7.3-5 一矩形斷面的簡支樑，受均佈負載重，使其中央點的撓度為 12 mm (見例題 1 與圖 7-3)。此樑欲改用相同材料同為矩形斷面的新樑代替。但新樑的寬度只有原樑的一半。若新樑在相同負載下，只有撓度 3 mm 。試與原樑的高度 h_1 比較，新樑的高度 h_2 將為若干？

【解】 $\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI_1} = 12 \text{ mm}$, $\delta_2 = \frac{5qL^4}{384EI_2} = 3 \text{ mm}$

$$\therefore \frac{I_2}{I_1} = \frac{12}{3} = \frac{\frac{1}{12} \left(\frac{b_1}{2} \right) h_2^3}{\frac{1}{12} (b_1) h_1^3}$$

$$\text{則 } \frac{h_2^3}{h_1^3} = 8$$

$$\therefore \frac{h_2}{h_1} = 2 \quad \text{或} \quad h_2 = 2h_1$$

7.3-6 一懸臂樑承受均佈載重 (見圖 7-4 與例題 2)，高 h 等於樑長 L 的十分之一。該寬翼斷面鋼樑， $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ，拉伸與壓縮容許應力均為 $20,000 \text{ psi}$ 。假定該樑承受最大容許載重。試求自由端的撓度與長度的比 σ/L 值。

4 材料力學題解 (下冊)

【解】 已知 $h = \frac{L}{10}$

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{2}$$

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{M_{\max} y}{I} = \frac{qL^2 \left(\frac{h}{2}\right)}{2I} = \frac{qL^3}{40I} = 20,000 \text{ psi}$$

$$\delta = \frac{qL^4}{8EI} = \left(\frac{qL^3}{40I}\right) \left(\frac{5L}{E}\right) = 20,000 \times \frac{5L}{30 \times 10^6}$$

$$\therefore \delta = 20,000 \times \frac{5}{30 \times 10^6} = \frac{1}{300}$$

7.3-7 若最大彎應力為 72 MPa，最大撓度為 3.0 mm，樑高為 400 mm，彈性模數為 200 GPa。試問承受均佈載重的寬翼斷面簡支樑的跨長 L 為何？（見圖 7-3 與例題 1）。

【解】 $M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$, $h = 0.4 \text{ m}$

$$\sigma = \frac{M_{\max} \left(\frac{h}{2}\right)}{I} = \frac{qL^2 (0.4)}{16I} = 72 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\therefore \frac{qL^2}{I} = 28.8 \times 10^8$$

$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5L^2}{384E} \left(\frac{qL^2}{I}\right)$$

$$= \frac{5L^2}{384 \times 200 \times 10^9} (28.8 \times 10^8) = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\therefore L^2 = 16, \quad L = 4 \text{ m}$$

7.3-8 承受均佈載重的寬翼簡支鋼樑（見圖 7-3 與例題 1），在其中央點之撓度為 $\frac{5}{16}$ in。兩端斜率為 0.01 徑。若最大彎應力 $\sigma = 18,000$ psi， $E = 30 \times 10^6$ psi。試求樑高 h 。

【解】 已知 $\delta = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5}{16} \text{ in.}$ (1)

$$\theta = \frac{qL^3}{24EI} = 0.01 \text{ 弧度} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{得 } \frac{\delta}{\theta} = \frac{5}{16} L = 31.25$$

$\therefore L = 100 \text{ in.}$ ，再將 L 代入 (2) 式得：

$$\frac{q}{I} = \frac{0.01 \times 24 E}{L^3} = \frac{0.01 \times 24 \times 30 \times 10^6}{(100)^3} = 7.2$$

$$\text{因 } M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M \left(\frac{h}{2} \right)}{I} = \frac{qL^2 h}{16 I} = 18,000 \text{ psi}$$

$$\therefore h = \frac{16 I \times 18,000}{qL^2} = 16 \times \frac{1}{7.2} \times \frac{18,000}{(100)^2} = 4 \text{ in.}$$

7.3-9 若跨長 $L = 2 \text{ m}$ ， $q = 2.5 \text{ kN/m}$ ，最大彎應力 $\sigma = 60 \text{ MPa}$ 。試求均佈載重簡支樑的最大撓度 δ （見圖 7-3 與例題 1）。該樑係鋁製，並具正方形斷面，彈性模數 $E = 70 \text{ GPa}$ 。

$$\text{【解】 } M_{\max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{1}{8} (2.5) (2)^2 = 1.25 \text{ kN/m}$$

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{1.25 \times 10^3}{\left(\frac{a^3}{6} \right)} = 60 \times 10^6 \text{ (設 } a \text{ 為斷面邊長)}$$

$$\therefore a = 0.05 \text{ m}$$

$$I = \frac{a^4}{12} = 5.208 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \times (2.5 \times 10^3) \times 2^4}{384 \times (70 \times 10^9) \times (5.208 \times 10^{-7})} \\ &= 0.0143 \text{ m} = 14.3 \text{ mm} \end{aligned}$$

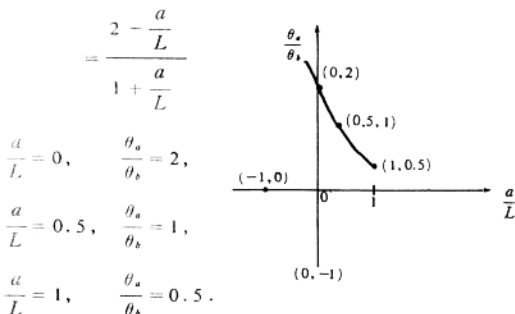
7.3-10 一簡支樑 AB 承受集中負載 P 如圖 7-5 所示與例題 3 所討論。畫圖顯示支承處旋角 θ_s/θ_b 的比，如何隨着指定載重 P 位置

a/L 的比而變化。($0 < a/L < 1$)。

【解】 用式 (7-22a) 與式 (7-22b)

$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}, \quad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{得} \quad \frac{\theta_a}{\theta_b} = \frac{L+b}{L+a} = \frac{2L-a}{L+a}$$



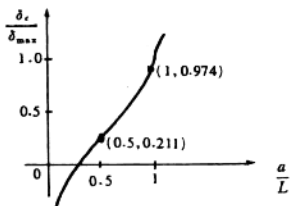
7.3-11 承受集中載重 P 的簡支樑 (見圖 7-5 與例題 3), 試求其中央點撓度對最大撓度的比 $\delta_c/\delta_{\max}$, 並畫出 $\delta_c/\delta_{\max}$ 對指定載重位置的比值 a/L 圖 ($0.5 < a/L < 1$)。

【解】 由式 (7-24) 與式 (7-25)

$$\delta_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI} \quad (a \geq b)$$

$$\delta_c = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad (a \geq b)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\delta_c}{\delta_{\max}} &= \frac{9\sqrt{3}L(3L^2 - 4b^2)}{48(L^2 - b^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}L[3L^2 - 4(L-a)^2]}{16[L^2 - (L-a)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}s}{16t^{3/2}} \end{aligned}$$



$$\text{其中 } s = -1 + \frac{8a}{L} - \frac{4a^2}{L^2}, \quad t = \frac{2a}{L} - \frac{a^2}{L^2}$$

$$\frac{a}{L} = 0, \quad s = -1, \quad t = 0, \quad \frac{\delta_c}{\delta_{max}} = -\infty$$

$$\frac{a}{L} = 0.5, \quad s = 2, \quad t = \frac{3}{4}, \quad \frac{\delta_c}{\delta_{max}} = \frac{27}{128} = 0.211$$

$$\frac{a}{L} = 1, \quad s = 3, \quad t = 1, \quad \frac{\delta_c}{\delta_{max}} = \frac{3\sqrt{3} \times 3}{16} = 0.974$$

習題 7.3-12 到 7.3-19 用積分撓度曲線的二次微分方程式（彎曲-力矩方程式）求解。

7.3-12 懸臂樑 AB 在自由端承受載重 P （見習題圖 7.3-12）。試求其撓度曲線式，同時，求自由端的撓度 δ_b 與旋角 θ_b 。



習題圖 7.3-12

【解】 $M = -P(L - x)$

$$EIv'' = P(L - x)$$

$$EIv' = PLx - \frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EIv = \frac{PL}{2}x^2 - \frac{Px^3}{6} + c_1x + c_2$$

$$v(0) = 0, \quad c_2 = 0$$

$$v'(0) = 0, \quad c_1 = 0$$

$$\therefore v = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x), \quad v' = \frac{Px}{2EI}(2L-x)$$

$$\therefore \delta_b = v(L) = \frac{PL^3}{3EI}, \quad \theta_b = v'(L) = \frac{PL^2}{2EI}$$

7.3-13 簡支樑 AB 在端點承受力偶 M_0 (見習題圖 7.3-13)。試求其撓度曲線式。同時, 求其最大撓度 $v_{\max}$ 。



習題圖 7.3-13

【解】 R_a 與 R_b 需形成一力偶始保平衡而得：

$$R_a = R_b = \frac{M_0}{L}$$

$$\therefore M = M_0 - R_a x = M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$EIv'' = -M = -M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$EIv' = -M_0 \left(x - \frac{x^2}{2L} + c_1\right)$$

$$EIv = -M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} + c_1x + c_2\right)$$

$$\text{依邊界條件, } v(0) = 0, \quad v(L) = 0$$

$$\text{得 } c_2 = 0, \quad c_1 = -\frac{L}{3}$$

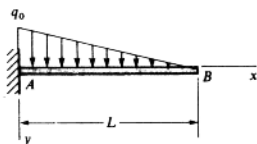
$$\therefore v = \frac{M_0 x}{6 E I L} (2 L^2 - 3 L x + x^2)$$

欲得 $\delta_{\max}$ ，使 $v' = 0$ ，或使

$$x - \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{3} = 0, \quad x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)L$$

$$\therefore \delta_{\max} = v \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)L \right] = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

7.3-14 懸臂樑 AB 承受三角形均佈載重，其最大強度為 q_0 ，如習題圖 7.3-14 所示。試求自由端的撓度 δ 與旋角 θ 。



習題圖 7.3-14

【解】 今 $M = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{L-x}{L} \right) q_0 \right] (L-x) \times \left(\frac{L-x}{3} \right)$

$$= \frac{-q_0}{6L} (L-x)^3$$

$$EI v'' = -M = \frac{q_0}{6L} (L-x)^3$$

$$EI v' = \frac{-q_0}{24L} (L-x)^4 + c_1$$

$$EI v = \frac{q_0}{120L} (L-x)^5 + c_1 x + c_2 \dots\dots\dots (1)$$

依邊界條件： $v(0) = 0, \quad v'(0) = 0$

得 $c_2 = \frac{-q_0 L^5}{120}, \quad c_1 = \frac{q_0 L^4}{24L}$

將 c_1, c_2 代入(1)式得：

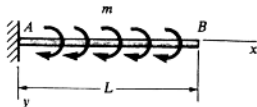
$$v = \frac{q_0 x^3}{120 LEI} (10 L^3 - 10 L^2 x + 5 L x^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24 LEI} (4 L^3 - 6 L^2 x + 4 L x^2 - x^3)$$

$$\delta_b = v(L) = \frac{q_0 L^4}{30 EI}$$

$$\theta_b = v'(L) = \frac{q_0 L^3}{24 EI}$$

7.3-15 強度 m (每單位長) 的均佈力矩沿樑軸作用在懸臂樑 AB 上 (見習題圖 7.3-15)。試求撓度曲線式並求出自由端的撓度 δ_b 與旋角 θ_b 。



習題圖 7.3-15

【解】 今 $M = -m(L - x)$

$$EI v'' = -M = m(L - x)$$

$$EI v' = m(Lx - \frac{x^2}{2}) + c_1$$

$$EI v = m(\frac{L}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}) + c_1 x + c_2$$

由邊界條件： $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$

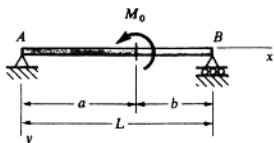
得 $c_2 = 0$, $c_1 = 0$

$$\therefore v = \frac{mx^2}{6EI} (3L - x)$$

$$v' = \frac{mx}{2EI} (2L - x)$$

$$\delta_b = v(L) = \frac{mL^3}{3EI} , \quad \theta_b = v'(L) = \frac{mL^2}{2EI}$$

7.3-16 簡支樑 AB 在距左端 a 處有力偶 M_0 作用，試求其撓度曲線式。



習題圖 7.3-16

【解】 R_a 與 R_b 需形成一力偶始保平衡，因而得：

$$R_a = R_b = \frac{M_0}{L}$$

$$EI v'' = -M = -\frac{M_0}{L} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EI v'' = -M = M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (a \leq x \leq L)$$

$$EI v' = -\frac{M_0}{2L} x^2 + c_1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EI v' = M_0 \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) + c_1 \quad (a \leq x \leq L)$$

$$EI v = -\frac{M_0}{6L} x^3 + c_1 x + c_2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EI v = M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) + c_1 x + c_2 \quad (a \leq x \leq L)$$

由邊界條件：(1) 在 $x=a$ ， v' 相等，(2) 在 $x=a$ ， v 相等，

(3) $v(0) = 0$ ，(4) $v(L) = 0$ 。

$$\therefore (1) \quad -\frac{M_0}{2L} a^2 + c_1 = M_0 \left(a - \frac{a^2}{2L}\right) + c_1$$

$$(2) \quad -\frac{M_0}{6L} a^3 + c_1 a + c_2 = M_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6L}\right) + c_1 a + c_2$$

$$(3) \quad c_2 = 0$$

$$(4) \quad M_0 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6L} \right) + c_3 L + c_4 = 0$$

$$\text{解得 } c_1 = M_0 a - \frac{1}{3} M_0 L - \frac{M_0}{2L} a^2$$

$$c_3 = -\frac{1}{3} M_0 L - \frac{1}{2L} M_0 a^2$$

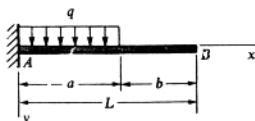
$$c_4 = \frac{1}{2} M_0 a^2$$

$$\therefore v = \frac{M_0 x}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = \frac{M_0}{6LEI} (3a^3 L - 3a^3 x - 2L^2 x + 3Lx^2 - x^3) \quad (a \leq x \leq L)$$

$$= \frac{M(L-x)}{6LEI} [3a^2 + x(2L-x)]$$

7.3-17 懸臂樑 AB 在其部分跨度上承受強度 q 的均佈負載 (見習題圖 7.3-17), 試求其撓度曲線式。



習題圖 7.3-17

【解】 $0 \leq x \leq a$ 時

$$EI v_1''' = q$$

$$EI v_1'' = qx + c_1$$

$$EI v_1' = \frac{q}{2} x^2 + c_1 x + c_2$$

$$EI v_1 = \frac{q}{6} x^3 + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3$$

$$EI v_1 = \frac{q}{24} x^4 + \frac{c_1}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

$$\left. \begin{aligned} \text{由邊界條件: } v_1(0) &= 0, & c_4 &= 0 \\ v_1'(0) &= 0, & c_3 &= 0 \\ v_1''(a) &= 0, & c_2 &= -qa \\ v_1'''(a) &= 0, & c_1 &= \frac{qa}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore v_1 = \frac{qx^3}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2)$$

$$v_1' = \frac{qx}{6EI} (3a^2 - 3ax + x^2)$$

當 $a \leq x \leq L$ 時

$$EIv_1''' = 0, \quad EIv_1'' = c_1'x + c_2'$$

$$EIv_2''' = c_1', \quad EIv_2' = \frac{c_1'}{2}x^2 + c_2'x + c_3'$$

$$EIv_2 = \frac{c_1'}{6}x^3 + \frac{c_2'}{2}x^2 + c_3'x + c_4'$$

$$\text{由邊界條件: } v_2'''(L) = 0, \quad c_1' = 0$$

$$v_2''(L) = 0, \quad c_2' = 0$$

$$v_2'(a) = c_3' = \frac{qa^3}{6EI}$$

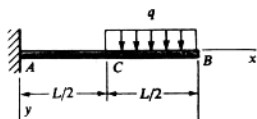
$$v_2(a) = c_3'a + c_4' = \frac{qa^4}{8EI}, \quad c_4' = \frac{-qa^4}{24EI}$$

$$\text{得 } v_2 = \frac{qa^3}{24EI} (4x - a)$$

$$v_2' = \frac{qa^3}{6EI}$$

7.3-18 懸臂樑 AB 在跨度的一半上承受強度 q 的均佈載重 (見習題圖 7.3-18), 試求 B 點的撓度 δ_b 與 C 點的撓度 δ_c 。

【解】 已知 $R_A = \frac{1}{2}qL$, $M_A = \frac{1}{2}qL(L - \frac{L}{4}) = \frac{3}{8}qL^2$



習題圖 7.3-18

$$\text{當 } 0 \leq x < \frac{L}{2}, \quad M = -\frac{3}{8} q L^2 + \frac{1}{2} q L x$$

$$EI v_1'' = -\frac{1}{2} q L x + \frac{3}{8} q L^2$$

$$EI v_1' = -\frac{1}{4} q L x^2 + \frac{3}{8} q L^2 x + C_1$$

$$EI v_1 = -\frac{1}{12} q L x^3 + \frac{3}{16} q L^2 x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\text{當 } \frac{L}{2} \leq x \leq L, \quad M = \frac{1}{2} q L x - \frac{3}{8} q L^2 - \frac{1}{2} q \left(x - \frac{L}{2}\right)^2$$

$$\therefore EI v_2'' = -M = \frac{1}{2} q x^2 - q L x + \frac{1}{2} q L^2$$

$$EI v_2' = \frac{1}{6} q x^3 - \frac{1}{2} q L x^2 + \frac{1}{2} q L^2 x + C_1'$$

$$EI v_2 = \frac{1}{24} q x^4 - \frac{1}{6} q L x^3 + \frac{1}{4} q L^2 x^2 + C_1' x + C_2'$$

$$\text{由邊界條件: } v_1(0) = 0, \quad C_2 = 0$$

$$v_1'(0) = 0, \quad C_1 = 0$$

$$v_1 = \frac{q L x^3}{48 EI} (9L - 4x)$$

$$EI v_2' \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7}{48} q L^3 + C_1' = \frac{1}{8} q L^3 \quad \therefore C_1' = -\frac{1}{48} q L^3$$

$$EI v_2 \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{13 q L^4}{384} + C_2' = \frac{14 q L^4}{384} \quad \therefore C_2' = \frac{1}{384} q L^4$$