

SHUXUE SIXIANG
FANGFALUN XUANJIANG

中小学教师
继续教育用书

数学思想方法论选讲

姚文孝 主编



东北师范大学出版社

中小学教师继续教育用书

SHUXUE SIXIANG

FANGFALUN XUANJIANG

■东北师范大学出版社

长 春



数学思想 方法论选讲

■ 姚文孝 主编

☐ 出版人:贾国祥

☐ 策划编辑:张 怡

☐ 责任编辑:刘效梅

☐ 封面设计:未 名

☐ 责任校对:张中敏 王宇燕

☐ 责任印制:张文霞

中小学教师继续教育用书
数学思想方法论选讲

姚文孝 主编

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街 138 号

邮政编码:130024

电话:0431—5695744 5688470

传真:0431—5695744 5695734

网址:<http://www.nnup.com>

电子函件:sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春市南关文教印刷厂印刷

2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:14.5 字数:343 千

印数:0 001 — 3 000 册

ISBN 7 - 5602 - 1663 - 3/G · 789 定价:16.00 元

中小学教师继续教育教材编写委员会

主 任：史宁中 盛连喜 赵 毅
委 员：张贵新 何艳茹 梁忠义
 李 全 贾国祥 李殿国

出版说明

历史将翻开新的一页,人类即将跨入 21 世纪。21 世纪是充满机遇和挑战的世纪,是一个科学技术更加发达,竞争更加激烈,社会对人的素质要求更高的世纪。提高人的素质的关键在教育,振兴教育的关键在教师,只有造就一支高素质的教师队伍,才能满足 21 世纪教育发展的要求。而建立和完善适应 21 世纪需要的中小学教师继续教育制度,则是造就高素质中小学教师队伍的根本措施。

1998 年 6 月,国家教育部师范教育司制定并印发了《中小学教师继续教育课程开发指南》(以下简称《指南》)。《指南》对中小学教师继续教育的教学内容和课程体系作了原则规定,对现阶段中小学教师继续教育提出了基本要求,这标志着我国中小学教师继续教育教学内容和课程体系的确立。

我们组织编写的这套教材是以《指南》为指导,按《指南》所规定的课程和内容要求而编写的。我们目前出版的这些教材,大部分都是《指南》中规定的必修课。根据中小学教师继续教育开展的情况,我们还将陆续组织编写出版《指南》中规定的其他教材。

在教材编写过程中,我们认真汲取了“八五”期间全国各地开展中小学教师继续教育的宝贵经验,坚持从中小学教师队伍建设

的需要和中小学的实际出发,力求反映先进的教育思想、教育理论,反映最新的学科知识发展动态、教育教学改革实践和研究成果,反映现代教育技术和先进教学方法,在确保科学性的前提下,进一步突出了教材内容的针对性、实效性、先进性和时代性,体现了中小学教师继续教育的特点和要求。

由于时间仓促,加之中小学教师继续教育教材建设尚处在起步阶段,缺乏足够的经验,缺憾之处在所难免,恳请广大读者不吝赐教,并在研究和探讨方面与我们进行更多的合作。

希望本教材能对广大中小学教师完善自我,提高自身素质,顺利地跨入 21 世纪,助一臂之力。

东北师范大学出版社

1999 年 7 月

目 录

绪 论 / 1

第一编 数学概念 / 4

第一讲 数学概念及其定义 / 6

第一节 概念的内涵和外延 / 7

第二节 概念的定义及其规则 / 22

第三节 数学概念定义的几种方法 / 28

第二讲 数学概念体系 / 35

第一节 概念间的关系 / 35

第二节 概念的划分及其规则 / 41

第三节 概念的制限与概括 / 55

第三讲 数学中的原始概念 / 59

第一节 原始概念的形成 / 60

第二节 原始概念的公理化 / 65

第三节 理想概念 / 73

第四讲 数学概念的演进/84

- 第一节 数学抽象与模式建构形式化/84
- 第二节 数学概念演进的方法/90
- 第三节 数学概念演进的思维进程/114

第五讲 数学概念与数学命题的关系/123

- 第一节 数学概念与存在性命题/123
- 第二节 数学概念与惟一性命题/139
- 第三节 关于数学概念与数学命题的相互制约
和依存的问题/145

第二编 数学命题/153

第六讲 命题及其演算/155

- 第一节 命题概述/155
- 第二节 命题演算/163
- 第三节 谓词演算/174

第七讲 数学命题/182

- 第一节 再议逻辑量词与逻辑联词/183
- 第二节 推理论证中常用的几种蕴涵命题和等价命题/188
- 第三节 具有特殊称谓的数学命题/198

第八讲 数学命题体系建构的公理化方法/212

- 第一节 公理化体系的范例/213
- 第二节 公理系建构的原则/223
- 第三节 以罗巴切夫斯基几何为例,再议公理化问题/227
- 第四节 悖论与公理集合论/232

第九讲 数学命题的发现与演进/240

- 第一节 数学命题的发现/241
- 第二节 数学命题的演进/261
- 第三节 数学命题的变更/266

第三编 数学论证/276

第十讲 数学推理/278

- 第一节 形式逻辑的基本规律/279
- 第二节 数学中的演绎推理/286
- 第三节 数学中的归纳推理/295

第十一讲 数学论证/301

- 第一节 证明的规则/302
- 第二节 演绎证法与归纳证法/307
- 第三节 分析法与综合法/314
- 第四节 直接证法与间接证法/322
- 第五节 数学归纳法/335
- 第六节 反 驳/346

第四编 解证方法/356

第十二讲 解题研究/358

- 第一节 解题研究的意义/359
 - 第二节 题型规划与解证规范/368
 - 第三节 波利亚:怎样解题/375
 - 第四节 波利亚:数学模式/384
-

第十三讲 化归原则与关系映射反演方法/394

- 第一节 化归原则/395
 - 第二节 RMI 方法/405
-

第十四讲 解题原则与解证策略/418

- 第一节 解题原则/419
 - 第二节 解题策略/427
-

主要参考文献/447
后记/449

绪 论

什么是方法论?徐利治先生说,方法论就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问. 什么是方法? 张奠宙先生说,方法,是没法精确定义的概念,大体可将方法描述为“人们在认识世界和改造世界活动中所采取的方式、手段、途径”. 方法总是相对一种目的. 过河,就得要造桥或驾船. 同时,方法也是人的心智活动的主观能动的选择、组合和创造,即是,方法一方面是客观的需要与实现,为目的而创造方法,另一方面也是主观的选择与创造. 好的方法也会创造成果,达到更高的目的.

什么是数学方法论?徐利治先生界定为“数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问”,并且将数学置于人类社会科学技术发展的总体组成中来考察数学发展的规律,称为宏观的数学方法论;而将研究者必须遵循的发明和发现的方法和法则,称为微观的数学方法论. 在《数学方法论选讲》这一论著中,徐利治教授将“数学模型方法”、“关系映射反演原则”、“公理化方法”等作为数学方法的范例,剖析了布尔巴基学派的结构主义思想、伽罗华的群论思想和非标准数域的构造方法,同时评析了关于数学基础研究的形式主义、逻辑主义和直觉主义等哲学学派,以及悖论与数学基础的

问题. 可见,徐利治教授将数学方法论界定在一个十分广阔的范畴,并赋予它很重大的理论意义.

张奠宙、过伯祥著的《数学方法论稿》也是一本有独到见解的关于数学方法论的代表作. 他们将数学方法与哲学思想联系起来,用辩证法剖析数学中各个矛盾的侧面和处理这些矛盾对立面的思想方法,诸如“数学方法·形式与内容”、“数理逻辑方法·原因与结果”、“几何方法·时间与空间”、“微积分方法·运动与静止”、“概率方法·偶然与必然”、“模糊数学方法·同一与差异”、“拓扑方法·局部与整体”、“计算方法·量、质、度”、“控制论方法·可能与现实”、“数学模型方法·实践与认识”. 除此之外,也讨论了一般科学方法,如实验、观察、直觉、归纳、类比、猜想、证明等在数学中的应用.

日本数学家、教育家米山国藏教授甚至将数学运动发展、发明创造的机制推崇为一种数学精神. 例如,以“贯穿在整个数学中的精神”为题,他指出了如下各个方面:“应用化精神”,“扩张化、一般化精神”,“组织化、系统化精神”,“研究精神,致力于发明发现的精神”,“统一建设的精神”,“严密化精神”以及“思想经济化精神”.

还有波利亚的《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,拉卡托斯的《证明与反驳》以及克莱因的《古今数学思想》,均可视为关于数学思想方法研究的经典之作.

可以看出,哪怕仅限于这些主要论著对数学思想方法的界定也尚未取得共识,各自有不同的切入角度和层面,但有一点是统一的,都是在探索数学的产生、运动、发展直至建构的规律和方法,指明数学方法区别于一般的科学方法的特征.

至于国内其他的以数学思想方法命名的著述更是各自在不同的层面展开,都提出了一种见解,提炼出了一些认识和规律. 大体说来,可以归纳为以下一些侧面:(1)数学的真理性问题、数学哲学;(2)推动数学运动发展以及建构数学理论体系的方法;(3)数学

家的思维、心理活动；(4)基本的数学思想方法；(5)解证模式、技术与技巧。

面对这样程度不同的各个层面丰富的研究成果，本书采用了一种新的切入角度，即着重于讲述数学的建构方法，并且将建构方法置于静态和动态两种情景中来考察。作者认为，任何一门科学的建构，都是由概念、命题、论证、应用四大体系构成的，也恰好在这几方面，数学除了遵循一般科学方法论的原理原则之外，还有其鲜明的区别于其他社会科学和自然科学的特征。其中，有一些也许恰好是只有数学科学才具有的特征。同时，作为数学学习者和工作者，特别是数学教师，了解数学体系的建构方法并从中领会数学科学的真谛和实质，无疑是非常必要的。

既然讲建构方法，当然要分为静态和动态两个方面。从静态方面说，是数学建构遵守的原理原则，这自然应以形式逻辑与数理逻辑为指导。从动态方面说，是揭示数学理论诞生、成长、发展、定型的规律，这自然应以认识论、辩证法为指导。以对这样两个侧面的剖析来带动数学思想方法的讲述是一种尝试，希望对数学教师来说会感到容易一些。为此，书中不仅尽量地给出示例，而且介绍了数学史中一些有代表性的事件，使读者对数学思想方法有更深的领悟。

第 一 编

数 学 概 念

概念、判断和推理论证是人类思维活动的三种最基本的形式，因而，任何学科体系的基础建构，也都由概念体系、命题体系和论证体系三部分组成。尽管由于学科门类的不同，其各自建构的方法存在重大差异，但三者均不可或缺。由于判断由概念组成，推理论证又由判断组成，所以概念是判断和推理论证的基础，是思维的起点。同时，通过判断、推理、论证获得的新认识，又将形成新的更为深刻和广泛的概念，因此，概念又是判断和推理论证的结晶，是人类思维在某一阶段认识的终点。所以，概念及其体系的建设处于一切学科体系建构基础的核心地位，在数学科学中当然也不例外。

由于数学科学的传统和其自身区别于社会科学及自然科学的特点，它在概念及其体系的建设上也具有非常鲜明的个性，采用了十分严谨和连贯的方法。本编将从两个方面来剖析这些特征，介绍这些方法。

一、把数学概念及其体系当作一个静止的系统，研究如何明确一个概念，如何剖析它们之间的联系。这是第一讲和第二讲的内

容,主要遵循逻辑的一般原理原则来阐述.

二、把数学概念及其体系建设视为一个动态的过程,观察概念形成和演进的诸种动因和方式.这是第三、四、五讲的内容,主要遵循辩证法的一般原理原则来阐述.其中,第三讲注重于体系建设的基础追溯,以及指明数学概念的一些最本质的特征,第四讲注重于阐述概念演进的方法,第五讲注重于阐述命题对概念的支撑作用和对概念演进的反作用.

第 一 讲

数学概念及其定义

每一个概念都有质和量这两个侧面. 所谓质, 是指概念所专指的事物类的共同的本质属性; 所谓量, 是指概念所专指的个体所组成的集合. 形式逻辑中, 将这两个方面分别称为概念的内涵和外延. 明确一个概念, 即是明确其内涵和外延, 这可以用“下定义”的逻辑方法来实现. 本讲正是针对一个一个的概念讲述明确或者说界定其意义的方法, 这些方法的讲述都以形式逻辑为依据.

但是, 对每一个概念来说, 它的产生、形成、历史变迁又是一个动态的进程, 因此, 认为数学概念是呆滞的、静止的观点是不符合数学发展的历史现实的, 关于这一方面内容, 我们将在以后各讲来阐述. 在本讲中, 只是初步指出, 既要注意概念的确定性的一面, 又要关注概念的变迁性的一面, 这样才能形成对概念的全面的辩证的认识.

本讲中, 还提出了“属性集”与“本质属性集”、数学概念的定义方法等一些值得进一步深入探讨的问题, 以供大家思考和研究.

第一节 概念的内涵和外延

一、概念的形成

概念是反映事物的特有属性的思维形式。它的形成过程属于认识论的研究范畴。简要说来,事物客观地具有各种性质和关系,这些性质和关系构成该事物的属性。一事物与他事物的异同,即是其所具有的属性的异同。具有相同属性的个别事物汇集则成类,人们在对这些事物类及其属性通过多次的感觉、知觉,并进行一定程度的综合之后,产生了对事物的感性认识。在对感性认识阶段的各种直观的、外部的、片面的各种表象进行比较、分析、抽象和概括,去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的深刻化过程,引起质的飞跃后,就得到理性的概念。这时,它所反映的是事物的本质的、全面的、内部联系的特有属性。数学概念的形成,毫无疑问也遵循这一认识论的基本规律。数学史上最早产生的一批关于数和形的概念,正是经过了漫长的从感性到理性的认识过程才逐步得以明确的。人们在计数活动中,从三只羊、三头牛、三个手指等抽象出了具有普遍意义的数“3”,从对太阳、满月的感觉产生了“圆”的观念,从尼罗河泛滥引起的反复丈量土地的活动,产生了纯粹理念的“矩形”、“三角形”等概念,这都是人类特有的高级思维活动的成果。我们在研究教学法时,探讨引入概念的各种实践方法,正是使概念形成过程得以简明的重现,使之与人的认识过程大体趋于一致。