西安交通大學“十一五”规划教材

数学物理方法

刘峰 申建中 编

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學“十一五”规划教材

数学物理方法

刘峰　申建中　编

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是为高等学校非数学类理工科专业的本科生编写的数学物理方法教材，其中包括复变函数、积分变换及数学物理方程三部分内容。

本书集作者多年从事数学理论与应用研究的心得体会和从事本课程教学的经验编写而成，强调概念的理解和解决问题的思路。它既可作为高等学校相关专业本科生和研究生的教科书或参考书，也可供教师和科学技术工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/刘峰，申建中编．—西安：西安交通大学出版社，2008.8
(西安交通大学"十一五"规划教材)
ISBN 978-7-5605-2846-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①刘… ②申… Ⅲ.数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 105028 号

书　　名 数学物理方法
编　　者 刘　峰　申建中
责任编辑 李慧娜

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安新视点印务有限责任公司

开　　本 727mm×960mm　1/16　**印张** 19　**字数** 347 千字
版次印次 2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-2846-5/O・281
定　　价 29.60 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

序言

数学物理方法作为一门大学基础课，对于非数学理工类专业无疑是十分重要的。它是通过对一些具有典型意义的实际模型的深入剖析，阐明和讲述偏微分方程的基本理论、处理问题的典型技巧以及应用的物理背景。它既是数学联系其他自然科学和技术领域最重要的桥梁之一，同时也为非数学理工科专业的后继课程提供必要的数学工具，更重要的是对培养学生应用数学理论和方法解决实际问题的能力大有裨益。把数学理论、解题方法和物理实际这三者有机地结合是本课程有别于其他课程的一个鲜明特点。因此，学习该门课程对于提高理工类大学生的综合素质有着极其重要的作用。

本课程内容广泛，综合性强，应用面广。一方面它涉及到高等数学、线性代数、大学物理等方面的基础知识；另一方面其讲述的理论和方法也能广泛地应用于自然科学与工程领域。例如，在化学、力学、生物学和信息科学等领域都大量用到复变函数和积分变换的理论和方法，而其中的一些问题也是由数学物理方程问题引入和发展的。因此，学好本门课程，对学生未来的发展将产生深远的影响。

本课程主要以偏微分方程定解问题的解法为中心问题，比较系统地介绍与之相关的数学理论与方法，包括复变函数、积分变换与数学物理方程三块内容。其中前两部分内容不仅是学习数学物理方程的必备基础，也是本课程的重要组成部分，它们有自己的独立理论体系，也广泛应用于自然科学和许多工程技术领域。面对如此庞大的内容，本书力图做到陈述简明、条理清晰，并精选了例题和习题，既注意各部分内容之间的相互联系，又注意使各部分内容具有相互独立的单元式结构。对于一些重要结果，本书采用叙而不证的方式，重在介绍分析问题和解决问题的基本思想和方法，以使读者对所学数学理论的实际背景、数学本质有深入的理解。编者以为，只讲方法

不讲原理的教学态度是不可取的。在某种意义上，数学学习就是通过方法学习，从而达到明白道理的目的。只有这样，才能使读者得到思想上的升华，对所学知识能够举一反三、运用自如。另外，对于一些必要的证明，本书也不追求完备，以避免使用过多的数学知识和一些特殊的计算技巧。这样处理使得本教材篇幅适中，内容充实，且便于掌握和应用。对于编者认为重要的内容，例如变分法和偏微分方程数值方法等，由于学时有限，本书未曾涉及。但这两部分内容独立性强，如读者需进一步学习，可在参考文献中找到所需要的参考书目。

由于求解偏微分方程本质上是利用微分运算的逆运算——积分法，故定解问题解的表达式将不可避免地以无穷级数或含参变量积分形式给出。这样就使得解的表达式显得冗长，有些公式看起来还很繁杂。编者建议：读者在学习中应把主要精力放在对基本理论和方法的理解、应用以及对一些公式的推导思路上。通过认真听课、看书和做适量的习题，做到能比较熟练地应用基本理论和方法或通过查阅各种公式，独立地解决某些具体问题就可以了。要从繁杂的公式和过量的练习题中解放出来，透过现象抓本质，真正掌握和学到那些最基本的知识和方法，并深切领会数学在解决实际问题时所发挥出的巨大作用，提高对数学课程学习的积极性以及分析和解决实际问题的能力。

本书由 10 章组成。前 4 章介绍复变函数的基本理论。第 5 章介绍积分变换。鉴于小波变换的日益成熟及其在工程技术领域的广泛引用，作为开阔视野的窗口，我们在这一章用较小的篇幅介绍了小波的基本概念，希望读者对小波的引入及作用有一个初步了解。第 6 章介绍一些典型物理问题的数学模型建立、叠加原理和齐次化原理。其中方程和边界条件的导出以及两个原理的使用既是重点也是难点，建议读者要认真学习这些内容，为后面章节的学习打下坚实的基础。第 7 章介绍分离变量法。首先通过弦振动问题介绍分离变量法的主要思想和步骤，然后通过大量例子讲解分离变量法的各种应用。本章重点是前两节，难点是最后两节。后两节涉及到特殊函数，读者需耐心地学习这一部分内容，有意识地培养自己的数学运算能力

和韧性。最后3章分别介绍求解数学物理方程的积分变换法、格林函数法和特征线法。这3章内容比较少，也相对容易一些。

本书可作为非数学类理工科各专业本科教材使用。除去带“*”号的选学内容，讲完本书约需80学时。若安排学时较少(如72学时)，可去掉第8章的部分内容以及第9章的内容。另外，本书的复变函数、积分变换两部分内容也可单独讲授。而第5章后的内容，去掉第8章的积分变换法，也可作为24到32学时的数学物理方程课程教材单独讲授。

编者十多年来曾数次为西安交通大学非数学理工类专业的学生讲授“数学物理方法”课程。本教材是在编者总结多年从事本课程教学的经验和从事数学理论与应用研究的体会基础上编写而成的。本书的写作主要参考了本书参考文献中所列的众多书目。在此，谨向各书的作者们表示诚挚的谢意。本书的写作得到西安交通大学“985计划”、西安交通大学教务处和西安交通大学理学院“工科数学中心”的资助。对此，编者也深表感谢。

西安交通大学理学院王绵森教授审阅了本书初稿并提出许多宝贵意见；西安交通大学理学院李惜雯教授在本书作为讲义试用期间，对本书做了认真的审阅并提出了许多宝贵建议。在此，编者对两位老师表示衷心的感谢。也非常感谢李田老师为本书提供了部分习题解答。

本书第1章至第5章由刘峰执笔，第6章至第10章由申建中执笔，限于作者的学识与水平，书中错误和不妥之处恐在所难免，诚请读者批评指正。

西安交通大学理学院

刘 峰　申建中

2008.5.10

目　录

第 1 章

解析函数初步

我们知道，实变函数的自变量与因变量是在实数集合上取值的，如果取值范围推广到复数范围，便可得到复变函数的概念。因而复变函数是实变函数的推广，它具有许多类似于实变函数的性质，但也有自己的特殊性质，例如，在某一区域内存在一阶导数的复函数必然在该区域内有任意阶的导函数。这是复变函数所特有的性质，实变函数并不具有这样的性质。我们把这类在某一区域内处处可导的函数称为解析函数，它是复变函数的主要研究对象，许多重要理论与应用都是建立在函数解析性假设的基础之上。

本章在复习复数基本概念的基础上，首先介绍复变函数的基本性质，包括复函数的极限、连续性及其解析性。然后介绍共形映射的概念，主要讨论分式线性映射与一些基本初等函数构成的映射的基本性质。希望读者在学习过程中仔细研读、比较复变函数与实变函数的共性与差异。

§1.1　复数及复变函数

1.1.1　复数

1. 复数的基本概念

所谓复数是指形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数，其中 x, y 都是实数，分别称为复数 z 的实部与虚部，用 Re()，Im()表示，即 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$，而 i 为虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$。

两个复数相等定义为它们的实部与虚部分别相等，特别是一个复数 $z=0$ 意味着它的实部与虚部都是零。一个复数 z 的共轭为复数 $x-\mathrm{i}y$，通常记作 $\bar{z}$。除共轭运算之外，复数之间可进行有理运算。任给复数 $z_1=a+\mathrm{i}b$，$z_2=c+\mathrm{i}d$，则它们的加法、减法与乘法分别定义为

$$z_1 \pm z_2 = (a+\mathrm{i}b) \pm (c+\mathrm{i}d) = (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i}$$

$$z_1 z_2 = (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = (ac-bd) + (bc+ad)\mathrm{i}$$

在复数乘法中，应利用 $\mathrm{i}^2=-1$，$\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$，…，等表达式尽可能的化简表达式。

复数的除法定义为乘法的逆，即 $z_1/z_2=(a+\mathrm{i}b)/(c+\mathrm{i}d)\quad(c+\mathrm{i}d\neq 0)$是满足等式

$$(c+\mathrm{i}d)(x+\mathrm{i}y)=a+\mathrm{i}b$$

的复数 $z=x+\mathrm{i}y$。根据乘法定义，我们有

$$(cx-dy)+(dx+cy)\mathrm{i}=a+\mathrm{i}b$$

即

$$cx-dy=a,\ dx+cy=b$$

求解 x 与 y，可得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

于是

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$$

注意到，对于任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$，有等式 $z\bar{z}=x^2+y^2$ 成立，所以两个复数的商通常是以分母的共轭同乘以分子与分母来求得的，即

$$\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}=\frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$$

复数共轭运算具有许多简单而重要的性质，如

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

(2) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

这些等式可用复数的四则运算与共轭定义直接验证，我们把它留作习题。

2. 复数的几何表示

如果将复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部 x 与直角坐标系的横坐标对应，虚部 y 与纵坐标对应，那么该复数可用平面上的点 $P(x,y)$或以原点为起点，P 为终点的向量 $\boldsymbol{OP}$ 来表示，这就是通常所说的几何表示，如图 1.1 所示。在几何表示中，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，所确定的平面称为复数平面，简称复平面或 z 平面。显然，在几何表示中，每个复数与复平面上一个点对应，而复平面上的一个点也仅有一个复数与它对应，也就是说复数的全体与复

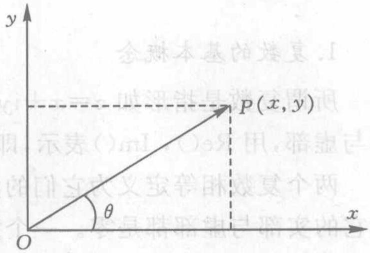

图 1.1 复数的几何表示

平面内的点构成一一对应关系。

我们称向量 **OP** 的长度为复数 z 的模或绝对值，用 $|z|$ 表示。由图 1.1 知，

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

若 $z\neq0$，则称以正实轴为始边，向量 **OP** 为终边的角的弧度数为 z 的辐角，记为 $\theta=\operatorname{Arg}z$，$\theta$ 以逆时针方向为正，顺时针方向为负；当 $z=0$ 时，辐角不确定。

显然，当 $z\neq0$ 时，z 的辐角有无穷多个。如果 θ_1 是其中的一个辐角，那么 z 的所有辐角可表示为

$$\operatorname{Arg}z=\theta_1+2k\pi,\quad k\text{ 为任意整数}$$

我们把满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角称为 $\operatorname{Arg}z$ 的主值，记作 $\arg z$。

记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。于是，$z=x+\mathrm{i}y$ 可写成如下的等价形式

$$z=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

该形式称为复数的三角形式。

复数的三角形式在复数的运算中是非常重要的，以下我们作一个简单的讨论。设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则它们积可以写成

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

上式表明，两个复数的积仍是一个复数，其模是这两个复数的模之积，而其辐角则是这两个复数的辐角之和。

复数 z_1 与 z_2 的商（$r_2\neq0$）可以写成

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]\end{aligned}$$

即，两个复数的商仍是一个复数，其模是这两个复数的模之商，而其辐角则是这两个复数的辐角之差。

综上所述，当复数相乘或相除时，其辐角的性质可用公式

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2,\quad z_2\neq0$$

简明地表示。但应当注意，由于辐角的多值性，上式应当理解为：对于左端的任一

值，右端必有一值与它相等，反之，对于右端的任一值，左端也必有一取值与之相等。

上述乘积的结论可以推广到两个以上复数的积。假设有 n 个复数：$z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k)$，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

特别地，如果所有的因子都相同，则有如下公式：

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.1}$$

当 $r=1$ 时，公式(1.1)称为棣莫弗(Demoivre[①])公式。由于

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}[\cos(0-\theta)+\mathrm{i}\sin(0-\theta)]=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$$

所以式(1.1)对所有整数 n(不论是正或负)都成立。

式(1.1)还可以推广到求复数 n 次方根 $z^{1/n}$ 的情况。我们定义：复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根为满足等式 $w^n=z$ 的任何复数 w。按式(1.1)，若记 $w=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则有

$$R^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

注意到，两个复数相等时，它们的模必相等，而它们的辐角不是相等便是相差一个 2π 的整数倍，因此

$$R^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$$

或

$$R=r^{1/n},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad k\in\mathbf{Z}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，n 个不同的辐角 φ 确定了 n 个不同的 w 的值，而当 k 取其他整数时，w 重复取这 n 个不同值中的某一个，所以 $w=z^{1/n}$ 只有 n 个不同的值

$$w_k = z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1.2}$$

在复平面上，这 n 个不同的方根均匀地分布在以原点为圆心，$r^{1/n}$ 为半径的圆周上。

例 1.1 求 $-8\mathrm{i}$ 的四次根。

解 由于 $-8\mathrm{i}$ 的模是 8，且有一个辐角 $3\pi/2$，所以它可以表示为

$$-8\mathrm{i}=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

利用式(1.2)，可求得 $-8\mathrm{i}$ 的 4 个四次根：

$$w_k=8^{1/4}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\right],\quad k=0,1,2,3$$

---

① Abraham Demoivre(1667—1754)，法国数学家。

更明确地有

$$w_1 = 8^{1/4}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right),\ w_2 = 8^{1/4}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}\right),$$

$$w_3 = 8^{1/4}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{8}\right),\ w_4 = 8^{1/4}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{15\pi}{8}\right)$$

它们的模相等，辐角相差 $\pi/2$，对应的 4 个点均匀地分布在以原点为圆心，$8^{1/4}$ 为半径的圆上。

3. 复球面

复数除了用复平面内的点或矢量表示之外，还可用球面上的点来表示，这是复数的另一种几何表示。用球面表示复数的一个好处是使复数中的“无穷大”与球面上的一点相对应。下面，我们从几何上对此问题作一个直观的解释。

作一球面与复平面相切于原点 $z=0$，球面上与原点重合的点 S 称为南极，通过 S 作复平面的垂线与球面相交于另一点 N，称为北极，如图 1.2 所示。在复平面上任取一点 A，将 A 与球面的北极 N 相连，则其连线必与球面相交于一点 B，而且不同的点 A 对应不同的交点，反之，球面上异于北极 N 的任意点 B 和 N 连线的延长线必与复平面相交一点。这样，若让 A 与 B 对应，则复平面内的点与球面上异于 N 的点一一对应。这种对应关系称为测地投影。我们已经知道，复平面上的点与复数是一一对应的，因此复数的全体与球面上除了北极 N 之外的点一一对应起来，但却没有复数与 N 对应。

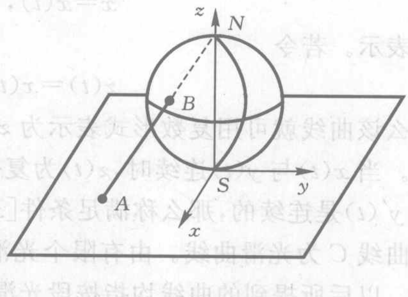

图 1.2　复球面

设想复平面上 A 点沿着一条通过原点的直线无限远离原点，则球面上对应的点 B 就沿着一条子午线向北极 N 无限逼近，如果 A 沿着另一条过原点的复平面上的射线向无限远处移动，则 B 沿着另一条子午线逼近北极 N。因此，我们设想复平面上有一个“无限远点”，且仅有一个，它与球面的北极相对应。这样一来，复平面上的点连同无穷远点一起与球面上的点通过测地投影无一例外的一一对应起来，这样的球面称为复球面。相应地，我们规定复数中与无穷远点相对应的惟一的数为“无穷大”，记为∞，它的模为正无穷大，辐角则没有明确的意义。

无穷大的概念在研究复函数的性质与运算，如极限、奇点以及积分等问题中都有重要的应用。关于它的四则运算，作如下约定。

加法：$z+\infty=\infty+z=\infty,\ z\neq\infty$