

模糊逻辑及其代数分析

●张小红 著



科学出版社

www.sciencep.com

模糊逻辑及其代数分析

张小红 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书论述模糊逻辑形式化系统及相关代数结构问题,主要是作者近年研究工作的总结,同时也介绍了与之相关的国内外众多学者的最新成果。全书共7章,涉及互相关联的4个部分的内容:基础知识(包括 t -模、伪 t -模与剩余格的基本概念与基本理论);基于 t -模的可换模糊逻辑研究(包括模糊命题逻辑系统BL, \mathcal{L}^* , MTL, UL*, RSL等);基于伪 t -模的非可换模糊逻辑研究(包括非可换模糊命题逻辑系统PL, psBL, psMTL, PL*, PUL*等);BCK/BIK⁺逻辑及源于非经典逻辑的代数结构的系统研究。

本书可作为基础数学、应用数学、计算机科学与技术、逻辑学、智能信息处理技术、管理科学与决策分析等专业或方向的研究生选修课教材,对前述相关领域的科技人员均有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

模糊逻辑及其代数分析/张小红著. —北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-022145-2

I. 模… II. 张… III. ① 模糊逻辑-基本知识 ② 模糊逻辑-数学分析
IV. B815.6 O142

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第076441号

责任编辑:范庆奎 房 阳/责任校对:曾 茹
责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年7月第一版 开本:B5(720×1000)

2008年7月第一次印刷 印张:21 1/2

印数:1—2 500 字数:408 000

定价:58.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换<新蕾>)

前 言

模糊集与模糊推理方法为描述和处理事物的模糊性和系统的不确定性以及模拟人的智能和决策推理能力提供了十分有效的工具. 近年来模糊推理的逻辑基础得到活跃而深入的研究, 在这些国内外研究工作的基础上, 作者进行了一些新的探索, 主要涉及模糊逻辑的形式化及相关代数结构问题. 本书正是作者近年研究工作的总结, 同时也介绍了与之相关的国内外众多学者的最新研究成果.

本书共 7 章, 可分成如下 4 个部分:

(1) 基础知识, 包括第 1、2 章. 其中, 第 1 章为引言及预备知识. 为了阐明代数逻辑方法, 第 1 章还介绍了经典命题逻辑与布尔代数的关系. 第 2 章介绍 t -模、伪 t -模、剩余蕴涵与剩余格的基本概念与基本理论, 包括作者提出的伪 R_0 t -模. 特别强调的是本书“剩余格”概念包括可换和非可换两大类, 且有一些结果是新得到的.

(2) 基于 t -模的可换模糊逻辑研究, 包括第 3~5 章. 其中, 第 3 章介绍著名模糊命题逻辑系统 BL , \mathcal{L}^* 及其各种扩张. 第 4 章介绍 MTL , ΠMTL 系统, 并重点论述作者提出的模糊命题逻辑系统 UL^* , 它是基于一般左连续 t -模的具有对合性、换质位对称性的命题演算形式系统, 其中包括 UL^* 的完备性定理的证明. 第 5 章介绍作者提出的一个 Rough 逻辑系统 RSL , 它本质上是 t -模基模糊逻辑系统 $IMTL$ 的一种 Rough 解释 (这也是将其归入本书的原因).

(3) 基于伪 t -模的非可换模糊逻辑研究, 即本书的第 6 章. 概述了著名的非可换模糊逻辑系统 PL , $psBL$ (包括 $psBL^r$) 及 $psMTL$ (包括 $psMTL^r$), 并重点论述作者建立的基于伪 R_0 t -模的非可换逻辑系统 PL^* 及基于一般左连续伪 t -模的非可换模糊逻辑系统 PUL^* .

(4) BCK/BIK^+ 逻辑及源于非经典逻辑的代数结构的系统研究, 即第 7 章. 首先论述 BCK 逻辑、模糊 BCK 逻辑, 以及作者提出的 BIK^+ 逻辑及模糊 BIK^+ 逻辑, 它们都属于模糊逻辑的一般化研究 (即期望给出各种模糊逻辑的公共基础系统). 其次是揭示各种源于非经典逻辑的代数结构之间的内在联系, 将 BCK -代数、 $BCC(BIK^+)$ -代数作为它们的共同基础, 对滤子 (理想) 理论进行了统一处理. 同时, 对 (伪) BL -代数、(伪) MTL -代数、伪 BCK -代数、(伪)Hoop 等代数结构进行了深入研究, 并研究了模糊逻辑代数与量子 (伪) 效应代数之间的关系. 此外, 本章还介绍了作者新近提出的强 De Morgan 代数以及蕴涵格的一般滤子理论.

本书不仅涉及模糊逻辑的形式化系统及其可靠性、完备性等理论问题, 而且注意阐述形式化系统蕴涵的实际意义, 这对模糊控制、近似推理、知识表示、决策支持、计算语言学等应用领域有一定参考价值. 同时, 本书关于各种源于逻辑的代数结构内在联系的分析与统一处理, 从一个特殊的角度窥视了各种非经典逻辑之间的

联系,对这些逻辑系统的进一步研究提供了新的思路。

为便于研究生学习和研究,本书安排了习题(包括一些研究课题),并列出了丰富详细的参考文献。此外,为了避免混淆,本书对于逻辑形式系统均使用黑正体或黑花体表示,与其配套的代数结构则用斜体并加中短线(如 \mathbf{BL} 与 \mathbf{BL} -代数)。

作者在从事该领域研究工作的过程中,先后得到清华大学应明生教授、北京师范大学李洪兴教授、陕西师范大学王国俊教授、四川省信息产业厅徐扬教授等众多前辈的鼓励和指导;同时,西安电子科技大学刘三阳教授、陕西师范大学李永明教授、西北大学辛小龙教授、四川师范大学王学平教授、西南交通大学秦克云教授、浙江理工大学裴道武教授、樊太和教授以及捷克科学院计算机科学研究所 Petr Cintula 教授、美国 Vanderbilt 大学 C. Tsinakis 教授、加拿大 Regina 大学 Y.Y. Yao 教授、韩国 Gyeongsang National 大学 Y.B. Jun 教授、波兰 Technical University 的 W.A. Dudek 教授、罗马尼亚 Academy of Economic Studies 的 Afrodita Iorgulescu 教授都给予作者极大的支持和帮助,在此向他们表示衷心的感谢!在本书的写作过程中,日本千叶大学 Yuichi Komori 教授、美国 Chapman University 的 Peter Jipsen 教授、德国 Technische Universitat Darmstadt (TU Darmstadt) 的博士后 Laurentiu Leustean、捷克 Palacky University 的 Jan Kuhr、罗马尼亚 University of Bucharest 的 Andrei Popescu 博士以及 Ioana Leustean 博士寄来宝贵的最新研究论文,使本书能紧跟国际学术研究的前沿,谨向他们表示诚挚的谢意!作者特别感谢尊敬的导师何华灿教授、孟杰教授、蒲义书教授多年来给予的热情关怀与悉心指导。感谢杨永保、祝峰、王永全、王三民、刘用麟、薛占熬、马盈仓、罗敏霞等教授(博士)给予的帮助!感谢家人给予的理解和支持!

本书的出版得到下列基金的支持:国家自然科学基金项目(编号:60775038)、浙江省自然科学基金项目(编号:Y605389)、宁波大学学术著作出版基金西北工业大学基础研究基金重点项目(编号:W018101)、宁波大学研究生教育科研计划重大专项项目。特此致谢。

模糊逻辑基础理论及其应用是一个涉及范围广、日新月异的活跃研究领域,本书仅从作者的兴趣出发论述了模糊命题逻辑形式系统及其相关代数结构方面的内容。令人遗憾的是,本书未能涉及模糊谓词逻辑。作者最终没有将这部分内容包含在书中,其原因有二:一是篇幅已足够大而时间却不足;二是作者看重带有一般语言量词(即全称量词和存在量词以外的模糊量词)的模糊逻辑系统,然而这方面的研究成果却不多,因此将语言量词和模糊谓词逻辑方面的内容放在以后的著作中可能更合适一些。同时,因作者水平和能力的限制,加之研究生教育工作的迫切需要而对完成时间的严格要求,本书难免不够完整和全面,甚至存在疏漏,敬请各位专家和广大读者批评指正!

张小红

2008年4月于宁波大学文萃新村

目 录

前言

第 1 章 引言与预备知识	1
1.1 引言	1
1.1.1 关于狭义模糊逻辑、广义模糊逻辑与多值逻辑	1
1.1.2 关于 Elkan 的“西瓜问题”	2
1.1.3 关于代数逻辑 (algebraic logic)	3
1.1.4 近年国内外模糊逻辑基础研究综述	3
1.2 序与格	7
1.2.1 偏序集	7
1.2.2 保序映射、剩余映射与序同构	9
1.2.3 格及其理想 (滤子)	11
1.3 布尔代数及其各种推广	14
1.3.1 布尔代数、Ockham 代数与 De Morgan 代数	14
1.3.2 伪补与 Heyting 格 (代数)	16
1.4 序代数与泛代数基本知识	18
1.4.1 序半群与格序半群	18
1.4.2 泛代数入门	20
1.5 经典命题逻辑的代数分析	23
1.5.1 经典命题逻辑的语义理论	23
1.5.2 经典命题逻辑的语构理论	25
习题 1	28
第 2 章 t -模、伪 t -模与剩余格	30
2.1 t -模	30
2.1.1 t -模的定义及其连续性	30
2.1.2 t -模的代数性质	35
2.1.3 与 t -模相伴的剩余蕴涵	38
2.2 可换剩余格	41
2.2.1 可换格序剩余幺半群	41
2.2.2 可换剩余格及其滤子	43

2.2.3	可换剩余格的素滤子与格素滤子	47
2.3	伪 t -模	50
2.3.1	伪 t -模的基本概念	51
2.3.2	伪 R_0 t -模	53
2.4	剩余格	56
2.4.1	格序剩余幺半群	56
2.4.2	剩余格及其滤子	58
	习题 2	61
第 3 章	可换模糊逻辑系统 BL 与 \mathcal{L}^*	62
3.1	基本模糊逻辑系统 BL	62
3.1.1	基本定义和结论	62
3.1.2	BL-代数及系统 BL 的完备性	65
3.2	逻辑系统 BL 的各种扩张	66
3.2.1	Lukasiewicz 逻辑系统 Luk 及 Gödel 逻辑系统 G	66
3.2.2	乘积逻辑系统 II 及严格基本逻辑系统 SBL	69
3.3	逻辑系统 BL 的标准完备性	72
3.3.1	BL-链的序数和	73
3.3.2	饱和 BL-链 (saturated BL-chain)	75
3.3.3	饱和和不可约 BL-链 (saturated and irreducible BL-chain)	77
3.3.4	部分嵌入与标准完备性	81
3.4	模糊逻辑系统 \mathcal{L}^*	84
3.4.1	R_0 -代数及其完备性	84
3.4.2	形式演算系统 \mathcal{L}^* 的语义和语构理论	87
	习题 3	89
第 4 章	基于左连续 t-模的模糊逻辑系统 MTL 与 UL*	90
4.1	模糊逻辑系统 MTL	90
4.1.1	形式系统 MTL 与系统 IMTL/WNM/NM	90
4.1.2	MTL-代数及系统 MTL 的完备性	93
4.2	系统 MTL 的标准完备性	95
4.2.1	全序 MTL-代数的嵌入性质	95
4.2.2	标准完备性及其他完备性	98
4.3	系统 MTL 的扩张	99
4.3.1	模糊逻辑系统 NMG	99
4.3.2	模糊逻辑系统 IIMTL	101

4.4 模糊逻辑系统 UL^* 及其完备性	103
4.4.1 系统 UL^* 及其可靠性定理	104
4.4.2 UL^* -代数及其素滤子定理	110
4.4.3 系统 UL^* 的完备性	113
4.4.4 Schweizer-Sklar t -模及系统 UL^* 的若干注记	116
习题 4	121
第 5 章 与模糊逻辑相关的 Rough 逻辑系统	122
5.1 Rough 集理论基础	122
5.1.1 Pawlak 粗糙集的基本概念	122
5.1.2 知识库、知识约简与信息系统	124
5.1.3 Rough 集与模糊集——粗糙模糊集与模糊粗糙集	127
5.2 Rough 逻辑系统 RSL	132
5.2.1 Rough 集与正则双 Stone 代数	132
5.2.2 ND 型 Rough 蕴涵及其性质	135
5.2.3 RSL -代数	138
5.2.4 逻辑系统 RSL 及其完备性	143
5.3 关于广义 Rough 集模型	149
5.3.1 Boole 代数上的广义 Rough 集模型	149
5.3.2 Boole 代数上广义 Rough 集模型中的蕴涵算子	155
5.3.3 De Morgan 代数上的广义 Rough 集模型	164
习题 5	167
第 6 章 基于伪 t-模的非可换模糊逻辑系统	169
6.1 非可换模糊逻辑系统 PL	169
6.1.1 伪 MV -代数 ($psMV$ -代数)	169
6.1.2 非可换 Lukasiewicz 逻辑 PL	171
6.1.3 PL 的完备性	173
6.2 非可换模糊逻辑系统 $psBL/psBL^f$ 与 $psMTL/psMTL^f$	174
6.2.1 $psBL$ -代数与 $psMTL$ -代数	174
6.2.2 逻辑系统 $psBL/psBL^f$ 与 $psMTL/psMTL^f$	179
6.3 基于伪 R_0 t -模的非可换模糊逻辑系统 PL^*	182
6.3.1 逻辑系统 PL^* 及其等价形式	182
6.3.2 可证等价关系及系统 PL^* 的可靠性	189
6.3.3 PL^* -代数的正规素滤子定理	194
6.3.4 系统 PL^* 的完备性及 PL^* 的意义	199

6.4 非可换模糊逻辑系统 PUL^*	201
6.4.1 非可换模糊命题演算系统 PUL^*	201
6.4.2 可证等价关系及系统 PUL^* 的可靠性	205
6.4.3 PUL^* -代数的正规素滤子定理及系统 PUL^* 的完备性	211
习题 6	216
第 7 章 BCK/BIK ⁺ 逻辑及相关代数结构研究	217
7.1 BCK 逻辑与 BCK-代数	218
7.1.1 BCK/FBCK 逻辑与可换模糊逻辑	218
7.1.2 BCK-代数的基本知识	220
7.1.3 BCK-代数的滤子理论	223
7.2 BIK ⁺ 逻辑、模糊 BIK ⁺ 逻辑与 $BIK^+(BCC)$ -代数	225
7.2.1 BIK ⁺ 逻辑与 $BIK^+(BCC)$ -代数	225
7.2.2 FBK ⁺ 逻辑与非可换模糊逻辑	227
7.2.3 BZ/BCC(BIK ⁺)-代数的滤子理论	234
7.3 伪 Hoop 与伪 BCK-代数 ($psBCK$ -代数)	238
7.3.1 伪 Hoop 及其正规素滤子定理	239
7.3.2 $psBCK$ -代数与非可换模糊逻辑代数	244
7.4 MTL-代数与 $psMTL$ -代数的若干研究	247
7.4.1 关于 MTL-代数的滤子	247
7.4.2 $psMTL$ -代数的正规滤子与 Boole 滤子	259
7.4.3 $psBL$ -代数的 $psMV$ -滤子与 psG -滤子	265
7.5 BCC-代数的 Boole 滤子与强剩余 BCC-代数的正规滤子	268
7.5.1 BCC-代数的 Boole 滤子	268
7.5.2 剩余 BCC-代数	271
7.5.3 强剩余 BCC-代数及其强正规素滤子定理	274
7.6 强 De Morgan 代数与 DR_0 -代数	278
7.6.1 正则剩余格与 De Morgan 代数的关系	278
7.6.2 由强 De Morgan 代数导出的正则剩余格	281
7.6.3 DR_0 -代数与 R_0 -代数的关系	285
7.7 蕴涵格及其滤子理论	289
7.7.1 蕴涵格及其性质	290
7.7.2 蕴涵格的 MP^* -滤子及其同余关系	292
7.7.3 蕴涵格的素 MP^* -滤子定理	295
7.8 量子效应代数与模糊逻辑代数系统	300

7.8.1	伪弱效应代数	301
7.8.2	对偶伪 BL -代数	303
7.8.3	伪 BL -代数与伪弱 MV -效应代数	306
7.8.4	伪 MV -代数与伪 MV -效应代数	312
	习题 7	315
	参考文献	317

第1章 引言与预备知识

1.1 引言

Zadeh 于 1965 年创立了模糊集合论^[1], 并在 1973 年提出模糊推理的 CRI 方法, 从而为描述和处理事物的模糊性和系统的不确定性以及模拟人的智能和决策推理能力提供了十分有效的工具. 模糊推理被应用于工业控制与家电产品的制造中, 取得了极大成功. 然而, 与应用相比, 模糊推理的理论基础并非无懈可击, 如 1993 年 7 月 Elkan 博士 (现为加利福尼亚大学教授) 在美国第 11 届人工智能年会上作了题为“模糊逻辑的似是而非的成功”的报告^[2], 引起了一场轩然大波. 在洛杉矶出版的《IEEE 专家智能系统及其应用》杂志编委会组织模糊界和人工智能界的 15 位专家、学者对 Elkan 的文章进行评论 (如 Zadeh 的评论^[3]), 并于 1994 年 8 月在该刊物上出了一个专栏, 题为 *A Fuzzy Logic Symposium*, 其中包括 Elkan 的答复文章^[4]“关于模糊逻辑似是而非的争论”. 这说明这场争论并未取得一致的意见. 事实上, 这场争论始终没有平息. 例如, 2001 年西班牙学者 Enric Trillas 与 Claudi Alsina 在 *International Journal of Approximate Reasoning* 上撰文^[5]再次论及 Elkan 提出的问题, 有趣的是, 针对上述 Enric Trillas 与 Claudi Alsina 的论文, Elkan 本人在同一刊物发表了反驳文章^[6], 而 Enric Trillas 与 Claudi Alsina 又在同期杂志上发表了反驳 Elkan 的反驳的“注解”^[7], 他们各持己见, 仍然没能得到一致的结论.

关于这场争论, 吴望名教授在文献^[8]中进行了介绍和讨论, 应明生教授在文献^[9]中说: “虽然 Elkan 的许多观点是错误的, 吴望名已经给予一定的澄清, 但模糊逻辑缺乏系统深入的理论研究却是不争的事实.” 也正因为如此, 近年来模糊推理的逻辑基础得到活跃而深入的研究, 我国学者在这一领域取得了众多重要成果 (参见文献^{[9]~[19]}).

为了后续讨论的方便, 以下首先就几个与上述争论有关的问题、本书内容的研究背景等作一些说明.

1.1.1 关于狭义模糊逻辑、广义模糊逻辑与多值逻辑

在上述的“争论”中, Zadeh 在评述文章^[3]中首次将模糊逻辑明确地划分为广义模糊逻辑与狭义模糊逻辑两种. Zadeh 指出: 从狭义上说, 模糊逻辑是一个逻辑系统, 它是多值逻辑的一个推广且作为近似推理的基础; 从广义上说, 模糊逻辑是一个更广的理论, 它与“模糊集理论”是模糊的同义语, 即没有明确边界的类的

理论.

Zadeh 还进一步指出 (参见著名的 *Handbook of Philosophical Logic* [20] 的 332 页): “狭义地说, 模糊逻辑 (FLn) 是这样的逻辑系统, 它的目标是近似推理的形式化. 从这个意义上说, 模糊逻辑 (FLn) 是多值逻辑的扩展. 但模糊逻辑 (FLn) 的议题与传统多值逻辑有较大的差别. 特别是模糊逻辑 (FLn) 的许多关键概念在传统多值逻辑中是没有位置的, 如语言变量 (linguistic variable)、规范型、模糊 if-then 规则、模糊化与去模糊、谓词修正、真值量化、扩张原理、推理的运算规则和插值推理等. 广义地说, 模糊逻辑 (FLw) 是模糊集论 (fuzzy set theory, FST) 的同义语, 模糊集是具有不清晰边界的那些类. 模糊集论 (FST) 是如此的广阔, 它包括模糊逻辑为其分支.”

捷克著名逻辑学专家 Hájek 在其专著 [22] 中指出: “即使我同意 Zadeh 关于多值逻辑与狭义模糊逻辑之区别的说法, 我还是认为多值逻辑的形式推演 (自然包括非传统) 是狭义模糊逻辑的内核或基础, 而搞清楚 Zadeh 提及的那些演算方法, 是一项很有前途的工作 (至今没有完成).”

引用上述经典论述的目的是想说明, 本书所涉及的“模糊逻辑”主要指 Zadeh 及 Hájek 所解释的“狭义模糊逻辑”, 并且着重于形式化演算方面.

1.1.2 关于 Elkan 的“西瓜问题”

在上面提到的关于模糊逻辑的争论中, Elkan^[2] 通过一个简单例子来说明模糊逻辑的困难, 姑且称其为“西瓜问题”:

考察一个系统在推理中以浅显的方式使用“证据强度”这一概念. 为具体化, 假设上下文是一堆西瓜, 在这一上下文中, 定义: 西瓜 $(x) \leftrightarrow$ 里红 $(x) \wedge$ 外绿 (x) . 一个水果 m , 假如 $t(\text{里红}(m))=0.5$, $t(\text{外绿}(m))=0.8$, 意指 m 内部是红色的证据强度是 0.5, m 外表绿色的证据强度是 0.8, 于是 m 是西瓜的证据强度为 $t(\text{西瓜}(m))=\min\{0.5, 0.8\}=0.5$. 然而, 这一上下文中隐含的背景知识说明里红和外绿对于成为一个西瓜来说是互相加强的证据单元, 因此, m 是一个西瓜的证据强度应该超过 0.5.

关于上述“西瓜问题”, 吴望名教授在文献 [8] 中作了如下论述: 因为客观现象错综复杂, “与”算子的选取也应具体问题具体分析. Elkan 所举西瓜“证据强度”的例子说明 \min 算子用此例不合适, 但不能说采用别的算子就一定不合适. 目前“与”算子除采用 \min 外, 还可以用有界积、乘积、各种 t -模算子、一致 t -模算子、广义模算子等. \min 算子作为“与”算子可用于许多论域, 但不是所有论域. 其他的“与”算子在一定条件下适用于一定的实际问题, 数学的高度抽象性和客观世界的复杂多样性从来就是相辅相成的. 因此, 对模糊逻辑算子的否定是站不住脚的.

事实上,对于模糊集理论中经常使用的“取大取小”算子,许多学者都从不同角度阐述过它的不足,如文献 [17] 中指出:“应用实践一再表明,模糊命题联结词的运算模型不应该是一个固定不变的算子”,这与吴望名教授的上述观点是一致的.此外,文献 [23] 中也举例说明了模糊数学中“取大取小”运算引发的问题.

综上所述,对于“西瓜问题”所揭示的“取大取小”的不足,大家是有“共识”的,用 Elkan 的话说即是不确定性的合取度一般不是由进入合取的判断的不确定性程度所唯一决定的.不存在一个函数 f , 使规则 $t(A \wedge B) = f(t(A), t(B))$ 是普遍有效的,不管采用什么类型的不确定性来表示 $t(\cdot)$.

1.1.3 关于代数逻辑 (algebraic logic)

事实上,上述那场争论中有一些问题是由于同一名词的不同范围或不同内涵所引起的,比如对逻辑公式“赋值”概念的不同理解可能导致不同的断言,使用不同的 t -模算子解释“逻辑与”会得到不同的逻辑结论.因此,要为模糊推理建立严格的逻辑基础,必须建立起模糊逻辑演算的严密的形式化体系,将模糊推理纳入严格的逻辑框架,这就需要代数逻辑方法.对于代数逻辑,著名的哲学逻辑手册第二卷 [20] 作了如下描述:

代数逻辑可分成两个主要部分,一部分研究与逻辑有关的代数系统,即从逻辑引出的代数系统.由于它研究的是代数,因此主要采用代数方法.另一部分是研究和建立逻辑与代数之间的桥梁,它解决逻辑问题的方法是:① 将其转化成代数问题(即代数化处理);② 解决代数问题(这实际上属于第一部分);③ 将结果转换为逻辑形式.这里的重点是③.同时,建立起的这个桥梁还可倒过来运用,即用逻辑方法解决代数问题.

本书主要研究模糊逻辑的形式化问题(当然,也论及其实际应用背景),基本属于代数逻辑,因而自然与代数系统密切相关.这里还要说明本书的题目,其实是借用美国著名学者 Chang 的经典论文 [24],其标题是“多值逻辑的代数分析”,本书使用“模糊逻辑及其代数分析”,这也表明本书的研究方法与 Chang 的经典论文相近.

1.1.4 近年国内外模糊逻辑基础研究综述

1. 关于 t -模基模糊逻辑

在模糊逻辑理论中,长期占主导地位的是基于 t -模 (triangular norm, 也称为 t 范数或三角范数) 的逻辑系统(也称为 t -模基逻辑).在这类逻辑中,使用 t -模作为合取联结词的解释,并由此解释其他命题联结词,如蕴涵、析取联结词分别解释为由 t -模诱导的剩余型蕴涵、与 t -模关于否定算子对偶的 t 余模,而否定联结词通常经由蕴涵解释为 $A \rightarrow 0$.这样定义的逻辑理论具有许多优良的逻辑性质,反映了人类日常思维与推理中的许多逻辑特征,这类逻辑理论在模糊推理和人工智能研

究中已经获得广泛的应用.

1996 年以来, 捷克逻辑学专家 Hájek 发表了一系列富有意义的研究成果, 其中基本逻辑系统 **BL** (basic logic) 的提出对模糊逻辑的基础研究影响较大, 几个重要的模糊逻辑系统都是 **BL** 系统的语义扩张 (即公理模式扩张, 关于语义扩张的严格定义请见定义 1.5.11), 如 Lukasiewicz 连续值系统、Gödel 系统、积逻辑系统等. 关于逻辑系统 **BL** 的相关理论, 集中反映在文献 [22] 中. Hájek 还基于剩余格理论提出了与基本逻辑 **BL** 对应的 BL -代数理论, 它包括 MV -代数^[24,25]、Gödel 代数和积代数作为特例. 每个连续 t -模唯一地确定单位区间 $[0, 1]$ 上一个 BL -代数, 文献 [22] 提出了这样的公开问题: 如果公式 A 是 $[0, 1]$ 上每个 BL -代数中的重言式, 那么 A 在系统 **BL** 中是否必定可证? 换言之, 形式系统 **BL** 是否是所有连续 t -模逻辑的公共的完备公理化? 2000 年, 文献 [26] 对于这个问题给出了肯定的回答.

同样是 1996 年, 为了寻求模糊推理的可靠逻辑基础, 王国俊教授基于对模糊逻辑与模糊推理方面存在问题的分析, 在全国第七届多值逻辑与模糊逻辑年会上, 提出了一个新的形式演绎系统 \mathcal{L}^* . 此后, 该系统经多次修改完善, 并发展成一套理论, 集中反映在著作 [10], [11] 及文献 [27]~[31] 中. 系统 \mathcal{L}^* 是基于 R_0 t -模及其剩余蕴涵 R_0 蕴涵算子 (也称为修正的 Kleene 蕴涵算子) 的, 具有许多优良的逻辑性质. 与系统 \mathcal{L}^* 相配套的代数结构是 R_0 -代数, 它的一种推广形式被称为弱 R_0 -代数, 它们与 BL -代数互不包含^[31]. 同时, 王国俊教授倡导模糊逻辑与模糊推理的结合研究, 并于 1999 年提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法 (简称为三 I 算法, 参见文献 [32]), 有效地改进了 Zadeh 在 1973 年提出的求解 FMP 问题的合成推理规则 (compositional rule of inference, CRI). 关于三 I 算法, 还有一系列文献对其进行更深入的研究, 可参见文献 [33]~[39].

2001 年, 西班牙学者 Esteva 和 Godo^[40] 建立了基于左连续 t -模的模糊逻辑系统 **MTL** (monoidal t -norm-based logic), 并得到几个语义扩张系统, 即弱幂零极小逻辑 **WNM** (weak nilpotent minimum), 对合 Monoidal t -模基逻辑 **IMTL** 及幂零极小逻辑 **NM** (nilpotent minimum). 同时, 提出了与这些逻辑系统相关的代数结构 MTL -代数, WNM -代数, $IMTL$ -代数和 NM -代数, 构建了这些形式系统的语义. **MTL** 逻辑系统的标准完备性的证明由 Jenei 与 Montagna 在文献 [41] 中完成. 有趣的是, 2003 年裴道武在文献 [42], [43] 中证明了系统 \mathcal{L}^* 与 **NM** 是等价的, R_0 -代数和 NM -代数实际上是相同的代数系统, 弱 R_0 -代数和 $IMTL$ -代数也是相同的代数系统.

2. 关于模糊蕴涵算子与含参 t -模

在模糊逻辑中, 选择怎样的蕴涵算子对模糊推理的效果有直接影响. 如上所述, 在现已建立的各种模糊逻辑系统中, 所选择的蕴涵算子基本上都与某种 t -模相伴,

即均为剩余蕴涵. 文献 [44], [45] 中涉及一些其他类型的模糊蕴涵算子. 一个值得注意的研究思路是带参数的模糊蕴涵算子, 如 Klement 与 Navara 在 1999 年研究了基于带参数的 Frank t -模的模糊逻辑系统 [46]; 吴望名教授、王国俊教授等分别在 2000 年、2003 年研究了带参数的 Kleene 系统 [47] 和 H_α 系统 [48]; 而美国学者 Whalen 也于 2003 年在 *Fuzzy Sets & Systems* 上发表了长达 50 页的论文 [49], 专门论述带参数的 Schweizer-Sklar R -蕴涵, 并将其中的参数 p 与模糊规则之间交互作用的强度联系起来; 为了刻画逻辑柔性, 何华灿教授在建立新逻辑体系时选择了带参数的 t -模 [17], 并用广义相关性和广义自相关性来描述代表柔性的参数的意义; 文献 [50]~[56] 则从不同侧面深入论述了含参联结词在模糊逻辑、模糊控制、决策支持、神经网络等中的重要意义等. 因此, 在模糊逻辑体系中加入适当参数, 已成为一个重要而有意义的研究方向, 这可能是模糊逻辑与模糊推理相结合的新途径.

3. 关于伪 t -模与非可换模糊逻辑

非可换逻辑由 Abrusci 与 Ruet 提出 (参见文献 [57]~[59]), 它统一了可换线性逻辑、cyclic 线性逻辑 (我国学者在非可换线性逻辑方面也进行了一些探索研究, 参见文献 [60], [61]), 是 Lambek 演算 [62] 的标准保守扩张. 非可换逻辑在不确定推理与决策、逻辑程序设计、模糊专家系统、模糊数据库及计算语言学等领域都有重要应用价值, 分别参见文献 [63]~[70] 等. 受非可换逻辑的影响, 模糊逻辑学界近年开始了非可换模糊逻辑的探索研究, 如 Flondor, Geogescu, Lorgulescu 在文献 [71] 中首次系统研究了伪 t -模, Hájek 在多个国际会议上报告了非可换 BL 系统 (正式发表的论文见文献 [72], [73]), Jenei, Montagna 及 Leustean 分别在文献 [74], [75] 中研究了非可换 MTL 逻辑和非可换 Łukasiewicz 逻辑系统. 与之相关的非可换逻辑代数也有深入研究 [76~78] (事实上, 如同文献 [72] 所指出的那样, pseudo- BL -代数、pseudo- MV -代数, 即非可换 BL -代数、非可换 MV -代数的研究, 先于相应的非可换模糊逻辑). 也许有人会质疑非可换模糊逻辑研究的意义, 实际上, 非可换的模糊联结词很早就有学者进行研究, 近年在模糊控制、近似推理等应用的驱动下, 越来越多的学者注意到它的重要性, 如文献 [67]~[70]. 另一些相关研究可参阅文献 [79]~[82].

4. 模糊逻辑基础研究的其他方向

除上述提到的模糊命题逻辑及与之对应的模糊谓词逻辑研究外, 还有若干重要研究方向值得关注, 比如关于模糊模态逻辑、模糊量词的研究 [83,84], 模糊逻辑与计量逻辑的结合研究 [11], 模糊逻辑与概率逻辑的关系及其结合研究 [14,85~88], 非单调模糊逻辑研究 [89], 模糊逻辑与 Rough 逻辑的结合研究 [90] 等.

这里对模糊 (语言) 量词研究稍作详细介绍. 经典一阶谓词逻辑的表达能力很

有限,因为它仅有两个量词(即全称量词 \forall 和存在量词 \exists),而自然语言中却大量存在诸如“几个”、“大多数”、“不很多”、“大约十个”等语义含糊的量词.这就促使逻辑学家和语言学家对量词进行更深入的研究,早在 1957 年 Mostowski^[91]就提出了广义量词的一般概念,20 世纪 80 年代初 Barwise 和 Cooper^[92]开始了自然语言中广义量词的研究,2002 年 Keenan 在文献 [93] 中论及了近年该领域的一些相关成果.在人工智能学界,人们已经清楚地认识到语言量词对高水平的知识表示和推理具有重要意义^[94],这正是带词计算理论兴起的主要动机之一^[95~97].20 世纪七八十年代,Zadeh 首先用模糊集理论方法描述了语言量词^[98,99],他把语言量词看成是模糊数,一个语言上的量化命题的真值可以通过计算模糊集合的势(基数)来完成.从此,大量的文献开始热衷于在模糊集理论的框架下研究语言量词.例如,Yager^{[101],[102]}提出了关于量化命题求值的替代方法,它是基于 OWA(有序加权平均)算子的,文献 [103],[104] 对此方向的研究进行了系统总结.同时,模糊量化模型被用来解决许多不同领域的各种问题,如数据库查询、数据挖掘和知识发现、信息融合、群体决策和多目标决策支持、归纳学习、优化和控制等^[105~108].近年来关于语言量词的一批重要成果相继问世,特别是 2006 年发表的如下成果值得重点关注:其一是德国学者 Glöckner 的专著^[109],其中提出了一套自然语言量词的系统理论,其特征是与广义量词理论相容且具有严格的公理化基础;其二是我国著名学者应明生教授发表在国际权威期刊 *Artificial Intelligence* 上的长篇论文^[84],应明生教授在其已有系列论文的基础上,创造性地提出一个用于建立自然语言量词模型的新框架.在这个框架下,语言量词用 Sugeno 模糊测度来表示,一个量化命题的真值可通过使用 Sugeno 积分求得.从而能使语言量词具有一些好的逻辑性质(如得到语言量词的前束范式定理),且具有广泛的应用价值(如数据归并、数据库查询、决策支持、归纳学习等).在文献 [84] 的基础上,已有一些新的研究进展,可参阅文献 [110],[111].

5. 与模糊逻辑研究相关的其他方面

影响模糊逻辑向纵深发展的因素是多方面的,这里主要介绍一个最新研究动向,即泛逻辑(universal logic).2005 年 3 月 31 日~4 月 3 日,首届世界泛逻辑学术会议(1st World Congress and School on Universal Logic, www.uni-log.org)在瑞士 Montreux 召开,会议由国际符号逻辑联合会、瑞士国家科学基金会、瑞士数学学会、(巴西)国家科学与技术发展委员会、瑞士 Neuchatel 大学等组织和单位联合举办,旨在把各种各样的关于逻辑学的学术活动联合起来,以促进不同领域的专家相互交流.大会发起人之一瑞士 Béziau 教授这样描述泛逻辑:“与泛代数是代数结构的一般理论类似,泛逻辑是逻辑结构的一般理论.泛逻辑不是一个新的逻辑,它是一个通过发展能用于所有逻辑的一般工具和概念以统一逻辑多样性的方法.泛

逻辑的一个目标是确立这样一个合适的领域及元理论 (如完备性理论), 并给出元理论的一般形式化描述. 这不仅对应用来说是非常有益的, 而且有助于揭示各种特殊逻辑的本质区别, 从而能更好地理解这些特殊逻辑. 泛逻辑也可以看成根据给定的条件生成特殊逻辑的工具箱, 如次协调的义务时态逻辑.” 有关国际泛逻辑学的研究可参阅文献 [112]~[115]. 我国学者何华灿教授独立于国际学术界初步建立了泛逻辑学理论^[17,116~118], 应邀参加了首届世界泛逻辑学大会, 并于 2007 年 8 月在西安组织承办了第二届世界泛逻辑学大会 (参见 www.uni-log.org, www.uni-log.cn).

可以预言, 国际泛逻辑研究 (已有泛逻辑学研究的国际专门期刊 *Logica Universalis*) 必将对模糊逻辑研究产生积极影响. 不过, 本书将主要涉及前 4 个方面的内容 (并非全部), 而本章的其他内容是一些预备知识.

1.2 序与格

本节主要内容选自文献 [119]~[121].

1.2.1 偏序集

非空集合 E 上的二元关系 R 是笛卡儿积 $E \times E = \{(x, y) | x, y \in E\}$ 的一个子集, 当 $(x, y) \in R$ 时, 称 x, y 具有 R 关系, 写成 xRy . 一般地, 集合 E 上的二元关系满足一些特殊性质, 如等价关系具有以下性质:

自反性. $\forall x \in E, (x, x) \in R$.

对称性. $\forall x, y \in E$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R$.

传递性. $\forall x, y, z \in E$, 若 $(x, y) \in R, (y, z) \in R$, 则 $(x, z) \in R$.

对于 E 上的关系 R , 如下定义 R 的对偶关系 $R^d: (x, y) \in R^d \Leftrightarrow (y, x) \in R$. 这样, 等价关系中的对称性可表示为 $R = R^d$. 另外, 与上述对称性相对, 有下述反对称性 (anti-symmetric):

$\forall x, y \in E$, 若 $(x, y) \in R, (y, x) \in R$, 则 $x = y$, 即 $R \cap R^d = \text{id}_E$, 其中, id_E 表示恒等关系.

定义 1.2.1 非空集合 E 上的二元关系 R 若具有自反性、反对称性和传递性, 则称 R 为 E 上的序关系或偏序关系.

通常用符号 \leq 表示 (偏) 序关系, 而 $(x, y) \in \leq$ 被等价地表示为 $x \leq y$, 读作“ x 小于等于 y ”. 集合 E 上若有偏序关系 \leq , 则称 $(E; \leq)$ 为一个偏序集 (partial ordered set, poset). 若 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 则记为 $x < y$. 若 $x \not\leq y$ 且 $y \not\leq x$, 则称 x, y 不可比, 记为 $x \parallel y$. 称偏序集 $(E; \leq)$ 是一个链 (chain), 如是对任意 $x, y \in E, x \leq y$ 或 $y \leq x$; 此时 \leq 称为是全序关系. 相对地, 如是对任意两个不同元 $x, y \in E, x, y$ 均不可比, 则称 $(E; \leq)$ 是一个反链 (anti-chain), 此时 \leq 实际上就是相等关系.