GAOKAOSHUXUE
LING JULI TUPO

金牌

2008年广东高考数学（文科）零距离突破

——专项提高与测试（第二轮）

原子能出版社

上海东方激光教育文化有限公司 编

2008年广东

高考数学(文科)零距离突破

——专项提高与测试(第二轮)

主　编　王福章

编　者　冯兴兵　张辉煌　彭　洁　吴　越
　　　　黄传龙　牛应林　周鸿高　王福章

原子能出版社

图书在版编目（CIP）数据

2008年广东高考数学零距离突破. 专项提高与测试. 第二轮. 文科 / 王福章 主编.
—北京：原子能出版社，2007.12
ISBN 978-7-5022-4059-2

Ⅰ. 2… Ⅱ. 王… Ⅲ. 数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第185591号

内 容 提 要

为了考生能够更好地把握各学科基础知识和基本技能，提高综合分析能力及应试能力，我们根据"考试大纲"和"新课程标准"编写了《2008年广东高考零距离突破》系列丛书。其中《2008年广东高考数学（文科）零距离突破——专项提高与测试（第二轮）》由上下两篇组成。上篇分为"思想方法专题"、"知识点专题"、"题型专题"和"附录"几个部分；下篇把每个专题的训练独立成卷，并增加了选修部分以及选择填空题专项训练的内容，另附两套全新的、充分体现2008年高考要求的综合测试卷，给在备考中摸索的师生一份意外的惊喜。

2008年广东高考数学（文科）零距离突破——专项提高与测试（第二轮）

出版发行	原子能出版社
责任编辑	张铣清
特约编辑	苏宁萍　陈　瑜
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	880mm×1230mm　1/16
字　　数	306千字
印　　张	12.5
版　　次	2007年12月第1版　　2007年12月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-4059-2
定　　价	26.00元

如有倒装、印刷质量问题，请打电话：（010）68416013

前　言

2008 年是广东省根据教育部要求推广新课标的第二次高考！为了帮助大家更有效、更系统地复习数学，我们组织一批广东省知名教师和有新教材教学经验的一线骨干教师一起讨论编写了《2008 年广东高考数学零距离突破》。本系列丛书完全有别于其他外来的高考复习资料，完全由本地（广东省）作者，根据本地（广东省）考纲，充分研究本地（广东省）的复习规律和教学需求而编撰。充分体现了“知识与技能、过程与方法、情感态度和价值观”的新课标的全新理念。

本书是为参加 2008 年广东高考的考生而设计的，定位于中等及其偏下的学生，同时兼顾中等偏上的学生。具有以下几方面特色：

一、内容全面　主干首选

本书不但在内容上囊括了 2008 年高考数学学科所要求的所有知识点，而且还在形式上囊括了高考命题中的传统题型和近年的创新题型。使同学们在巩固知识的同时，能得到应有的数学思想训练，并且对解题能力也能有进一步的提高，从而针对高考的重点、热点和趋势，正确把握复习的深度、广度和方向。

作为高考复习，各个学校都有些非常宝贵的经验。其中，许多学校都以一套高质量的高考复习资料作为学生复习时的首选主干资料。《2008 年广东高考零距离突破》即是能够成为各个学校首选的，可担当主干复习资料的佼佼者。

二、体系结构设计新颖

以最新《课程标准》、《教学要求》和《2008 年广东高考方案》为依据，结合现行最新教材《普通高中课程标准试验教科书 数学》，完全按照广东省高考复习的实际节奏和教学的实际状况及需求，突出重点，课内与课外兼顾。书中所有的题型（材料）按新教材、新高考要求精心挑选设计，让老师学生耳目一新。

三、梯度、难易度把握准确精巧

一本好的高考复习资料，在明确的定位下，必须把握好梯度，本书作为第二轮复习用书，根据《课程标准》，以专题的形式全面梳理高中数学知识，围绕考纲指导复习。设计好难易度，每年的高考试卷均都有难易度系数的要求。本丛书的鲜明特点是能按照高考要求对难易度准确把握。

四、实用性强　能集事半功倍之效

本书贯彻“源于课本，活于课本，高于课本”的选题原则，坚持“低起点，多层次；路子正，效率高；题意新，结构巧”的编写指导思想，结合考情、学情、教情三方面因素，力图体现高中数学课程改革的基本理念和 2008 年广东高考的基本精神，帮助广大考生在有限的时间内，全面而又迅速地完成高考复习的艰巨任务。

《2008 年广东高考数学（文科）零距离突破——专项提高与测试（第二轮）》分为

上下篇。

上篇：

分为“思想方法专题”、“知识点专题”、“题型专题”以及“附录：高中数学常用结论点击”，其主要栏目简介如下：

【考情预测】 包括“重要内容”、“命题回顾”和“命题展望”三个小板块。研读考纲，明确考点，点明复习方向，总结近几年来高考的命题规律，对本专题的命题走向作出较为准确的预测，为学生的有效复习导航。

【知识交汇】 以框架的形式把专题相关知识点呈现出来。

【典型例题】 精选2007年的高考试题、高考模拟题，使例题具有新颖性、典型性、实用性并富有代表性。讲解例题时，重视对解题思路分析，重视对数学思想方法的总结和渗透,提高学生独立分析问题和解决问题的能力。

【能力强化】 针对本专题的内容，结合典型例题，精选典型习题，凸现创新、综合和实践能力的训练，以巩固知识、掌握解题技巧、形成技能，收到事半功倍的复习效果。

【拓展思维】 通过演练，提高对学科知识点、知识体系、规律性的整体掌握水平以及灵活运用知识的能力。

下篇：

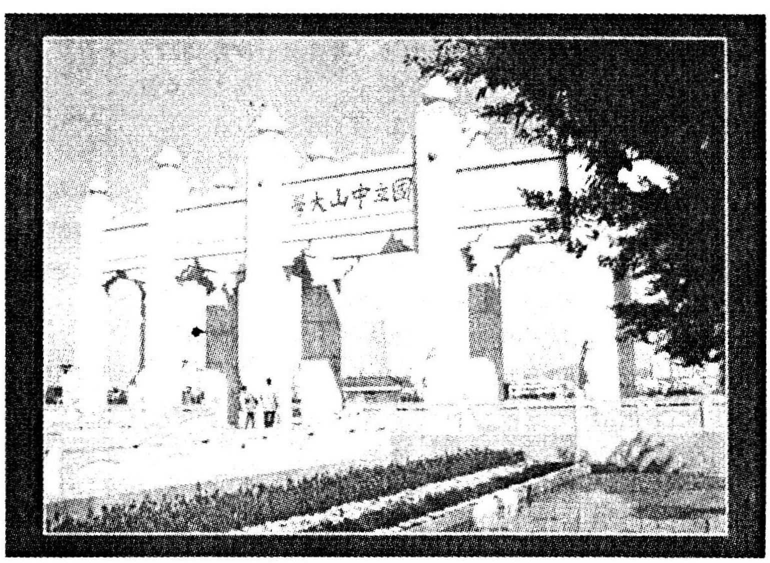
为了给2008年复习备考的师生更多的方便，我们把每个专题的训练独立成卷，并增加了选修部分以及选择填空题专项训练的内容。另附两套全新的、充分体现2008年高考要求的综合测试卷，给在备考中摸索的师生一份意外的惊喜。

《2008年广东高考零距离突破》复习资料在体系结构设计上独树一帜，在反映上述特点上独具匠心。谨此，衷心祝愿大家，通过使用《2008年广东高考数学零距离突破》，在高考中取得优异成绩，与高分零距离！

《高考零距离丛书》编写组

目 录

上篇　专项提高篇



第一部分　思想方法专题

专题一　函数与方程的思想方法

考情预测

1. 重要内容

运用函数的有关性质，解决函数的问题；或以运动和变化的观点，分析和研究具体问题的数量关系，通过函数的形式，把这种关系表示出来并加以研究，从而使问题获得解决；或对于一些从形式上看是以非函数的形式出现的，但经过适当的数学变换或利用构造函数方法，使这一非函数的问题转化为函数的问题，并运用函数的知识来处理这一问题，进而使原问题顺利地解决，这就是函数思想.

函数的基本性质有：函数的定义域、函数的值域或最值、函数的奇偶性、函数的单调性、函数的反函数、函数的周期性、函数的有界性.

在解决数学问题时，对于一些从形式上看是以非方程的问题出现的，但经过一定的数学变换或构造，使这一非方程的问题转化为方程的形式，并运用方程的有关性质来处理这一问题，进而使原问题得以解决，这就是方程思想.

常用的方程知识有：方程根的存在性的判定与求解，根与系数的关系.

函数描述了自然界中量的依存关系，是对问题本身的数学本质属性和约束关系的一种刻画，方程是函数某个静止状态的表现形式，是一种特殊与一般的关系，所以函数思想与方程思想是密切相关的，如函数问题可以转化为方程问题来解决；方程问题也可以转化为函数问题加以解决，如解方程 $f(x)=0$，就是求函数 $y=f(x)$ 的零点，反之亦然.

函数与方程思想在解题中的应用主要表现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解决有关求值、解(证)不等式、解方程及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易，化繁为简的目的.

在近几年高考中，函数思想主要用于求变量的取值范围、解不等式等，方程观点的应用可分为逐渐提高的四个层次：(1) 解方程；(2) 含参数的方程的讨论；(3) 转化为对方程的研究；(4) 构造方程求解.

2. 命题回顾

广东省近四年来高考试题涉及函数与方程思想方法题量与分值对照一览表

年份	题量	分值
2004 年	题 1,2,3,5,8,9,11,16,17,19,21,22	98 分
2005 年	题 1,2,5,6,9,11,12,15,17,19,20	83 分
2006 年	题 1,2,3,7,8,15,18,19,20	73 分
2007 年	题 1,3,4,10,14,16,18,20,21	73 分

3. 命题展望

函数与方程思想是最重要的一种数学思想，高考中所占比重较大，综合知识多，题型多，应用技巧多. 函数思想简单，即将所研究的问题借助建立函数关系式亦或构造中间函数，结合初等函数的图象与性质，加以分析，转化，解决有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题；方程思想即将问题中的数量关系运用数学语言转化为方程模型加以解决.

在高中数学新课标中，还安排了函数与方程这一节内容，根据以上分析，2008 年高考对本专题考查有以下趋势：函数零点问题，二次函数，二次方程，二次不等式间关系的考查，特别注意客观性题目，大题一般难度略大.

典型例题

例 1 对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点，已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-1(a\neq 0)$.

(1) 当 $a=1,b=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的不动点；

(2) 若对任意实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

(3) 在(2)的条件下，若 $y=f(x)$ 的图象上 A,B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点，且 A,B 两点关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称，求 b 的最小值.

【解】 (1) 由不动点的定义可知，函数 $f(x)$ 的不动点 x_0 就是方程 $x^2-x-3=x$ 的根，解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

(2) 由于函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，所以方程 $f(x)-x=0$ 恒有两个相异的实根，即方程 $ax^2+bx+(b-1)=0$ 恒有两个相异的实根. $\Delta_1=b^2-4ab+4a>0(b\in\mathbf{R})$ 恒成立. $\Delta_2=(4a)^2-16a<0,0<a<1$.

(3) 设 $A(x_1,x_1),B(x_2,x_2)$ 因为 A,B 关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称，$k=-1$，又 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+b-1=0$ 的

两根,所以 AB 中点 $M(-\frac{b}{2a},-\frac{b}{2a})$ 在直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$ 上,解得 $b=-\frac{1}{2a+\frac{1}{a}}\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$,当且仅当 $2a=\frac{1}{a}$,即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,等号成立.因为 $0<a<1$,所以 b 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【点评】 本题通过"不动点"的定义,将函数与方程紧密联系起来,以方程的方法来解决函数问题,高度体现了函数与方程的思想方法.

例 2 已知集合 M 是满足下列性质的 $f(x)$ 的全体:存在非零常数 T,对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M?说明理由;

(2) 设函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象与 $y=x$ 的图象有公共点,证明:$f(x)=a^x\in M$;

(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$,求实数 k 的取值范围.

【解】 (1) 对于非零常数 T,$f(x+T)=x+T$,$Tf(x)=Tx$,因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,$x+T=Tx$ 不能恒成立,所以 $f(x)=x\notin M$;

(2) 因为 $f(x)=a^x$ 的图象与函数 $y=x$ 的图象有公共点,所以方程组:$\begin{cases}y=a^x\\y=x\end{cases}$ 有解,消去 y,得 $a^x=x$,显然 $x=0$ 不是方程 $a^x=x$ 的解,所以存在非零常数 T,使 $a^T=T$.于是对于 $f(x)=a^x$,有 $f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$,故 $f(x)=a^x\in M$.

(3) 当 $k=0$ 时,$f(x)=0$,显然 $f(x)=0\in M$;当 $k\neq0$ 时,

$\because f(x)=\sin kx\in M$,

$\therefore$ 存在非零常数 T 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立,即 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$,

因为 $k\neq0$,且 $x\in\mathbf{R}$,所以 $kx\in\mathbf{R}$,$kx+kT\in\mathbf{R}$,

故要使 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 成立,只有 $T=\pm1$.

当 $T=1$ 时,$\sin(kx+k)=\sin kx$ 成立,则 $k=2m\pi$,$m\in\mathbf{Z}$;

当 $T=-1$ 时,$\sin(kx-k)=-\sin kx$ 成立,

则 $k=-(2m-1)\pi$,$m\in\mathbf{Z}$.

综上得,实数 k 的取值范围是 $\{k\mid k=m\pi,m\in\mathbf{Z}\}$.

【点评】 本题的解决,在于研究 $f(x+T)=x+T$,$a^{x+T}=T\cdot a^x$,$\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 是否恒成立,体现了函数与方程的思想方法.

例 3 已知定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$,且当 $x>1$ 时,$f(x)<0$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(3)=-1$,解不等式 $f(|x|)<-2$.

【解】 (1) 令 $x_1=x_2>0$,代入得 $f(1)=f(x_1)-f(x_2)=0$,故 $f(1)=0$.

(2) 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1>x_2$,则 $\frac{x_1}{x_2}>1$,由于当 $x>1$ 时,$f(x)<0$,所以 $f(\frac{x_1}{x_2})<0$,即 $f(x_1)-f(x_2)<0$,因此 $f(x_1)<f(x_2)$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数.

(3) 由 $f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$,得 $f(\frac{9}{3})=f(9)-f(3)$,而 $f(3)=-1$,所以 $f(9)=-2$,由于函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数,所以当 $x>0$ 时,由 $f(|x|)<-2$,得 $f(x)<f(9)$,因此 $x>9$;当 $x<0$ 时,由 $f(|x|)<-2$ 得 $f(-x)<f(9)$,因此 $-x>9$,故 $x<-9$,因此不等式的解集为 $\{x\mid x>9$ 或 $x<-9\}$.

【点评】 抽象函数试题的解决,充分体现了函数与方程的思想方法.如题(1)求出 $f(1)=0$;题(2)验证 $f(x_1)-f(x_2)<0$;题(3)的解不等式 $f(|x|)<-2$,都结合函数性质,用方程思想解决问题.

例 4 已知函数 $f(x)=x^2-(m+1)x+m(m\in\mathbf{R})$

(1) 若 $\tan A$,$\tan B$ 是方程 $f(x)+4=0$ 的两个实根,A、B 是锐角三角形 ABC 的两个内角 求证:$m\geqslant5$;

(2) 对任意实数 α,恒有 $f(2+\cos\alpha)\leqslant0$,证明 $m\geqslant3$;

(3) 在(2)的条件下,若函数 $f(\sin\alpha)$ 的最大值是 8,求 m.

【解】 (1) 证明:$f(x)+4=0$ 即 $x^2-(m+1)x+m+4=0$.依题意:

$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4(m+4)\geqslant0\\\tan A+\tan B=m+1>0\\\tan A\cdot\tan B=m+4>0\end{cases}$ 又 A、B 为锐角三角形内两内角 $\therefore\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$

$\therefore\tan(A+B)<0$,即 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{m+1}{-m-3}<0\therefore\begin{cases}m^2-2m-15\geqslant0\\m+1>0\\m+4>0\\\frac{m+1}{m+3}>0\end{cases}$ $\therefore m\geqslant5$

(2) 证明:$\because f(x)=(x-1)(x-m)$ 又 $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$,$\therefore1\leqslant2+\cos\alpha\leqslant3$,恒有 $f(2+\cos\alpha)\leqslant0$

即 $1\leqslant x\leqslant3$ 时,恒有 $f(x)\leqslant0$ 即 $(x-1)(x-m)\leqslant0$

$\therefore m\geqslant x$ 但 $x_{\max}=3$,$\therefore m\geqslant x_{\max}=3$

(3) 解:$\because f(\sin\alpha)=\sin^2\alpha-(m+1)\sin\alpha+m=(\sin\alpha-\frac{m+1}{2})^2+m-\frac{(m+1)^2}{4}$ 且 $\frac{m+1}{2}\geqslant2$,$\therefore$ 当 $\sin\alpha=-1$ 时,$f(\sin\alpha)$ 有最大值 8.即 $1+(m+1)+m=8$,$\therefore m=3$.

【点评】 本题是函数,方程,三角等知识结合,有一些隐含的限制条件容易忽略,如锐角三角形三个角正切都为正,余弦的有界性等。而对于多变量的问题,要选准主元。

例 5 (2007 年深圳模拟)已知函数 $f(x)=x+\frac{t}{x}(t>0)$ 和点 $P(1,0)$,过点 P 作曲线 $y=f(x)$ 的两条切线 PM、PN,切点分别为 M、N.

(1) 设 $|MN|=g(t)$,试求函数 $g(t)$ 的表达式;

(2) 是否存在 t，使得 M、N 与 $A(0,1)$ 三点共线．若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由．

(3) 在(1)的条件下，若对任意的正整数 n，在区间 $[2,n+\frac{64}{n}]$ 内总存在 $m+1$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}$，使得不等式 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_m)<g(a_{m+1})$ 成立，求 m 的最大值．

【解】 (1) 设 M、N 两点的横坐标分别为 x_1、x_2，

$\because f'(x)=1-\frac{t}{x^2}$，$\therefore$ 切线 PM 的方程为：$y-(x_1+\frac{t}{x_1})=(1-\frac{t}{{x_1}^2})(x-x_1)$，又 $\because$ 切线 PM 过点 $P(1,0)$

$\therefore$ 有 $0-(x_1+\frac{t}{x_1})=(1-\frac{t}{{x_1}^2})(1-x_1)$，

即 ${x_1}^2+2tx_1-t=0$　①

同理，由切线 PN 也过点 $P(1,0)$，

得 ${x_2}^2+2tx_2-t=0$　②

由①、②，可得 x_1,x_2 是方程 $x^2+2tx-t=0$ 的两根，

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-2t,\\x_1\cdot x_2=-t.\end{cases}$ (＊)

$$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1+\frac{t}{x_1}-x_2-\frac{t}{x_2})^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2[1+(1-\frac{t}{x_1x_2})^2]}$$

$$=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2][1+(1-\frac{t}{x_1x_2})^2]},$$

把(＊)式代入，得 $|MN|=\sqrt{20t^2+20t}$，

因此，函数 $g(t)$ 的表达式为 $g(t)=\sqrt{20t^2+20t}\,(t>0)$．

(2) 当点 M、N 与 A 共线时，$k_{MA}=k_{NA}$，$\because \dfrac{x_1+\frac{t}{x_1}-1}{x_1-0}=\dfrac{x_2+\frac{t}{x_2}-1}{x_2-0}$，

即 $\frac{{x_1}^2+t-x_1}{{x_1}^2}=\frac{{x_2}^2+t-x_2}{{x_2}^2}$，化简，得 $(x_2-x_1)[t(x_2+x_1)-x_1x_2]=0$，

$\because x_1\neq x_2$，$\therefore t(x_2+x_1)=x_2x_1$，　③

把(＊)式代入③，解得 $t=\frac{1}{2}$．$\therefore$ 存在 t，使得点 M、N 与 A 三点共线，且 $t=\frac{1}{2}$．

(3) 易知 $g(t)$ 在区间 $[2,n+\frac{64}{n}]$ 上为增函数，

$\therefore g(2)\leqslant g(a_i)\leqslant g(n+\frac{64}{n})\,(i=1,2,\cdots,m+1)$，

则 $m\cdot g(2)\leqslant g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_m)\leqslant m\cdot g(n+\frac{64}{n})$．

依题意，不等式 $m\cdot g(2)<g(n+\frac{64}{n})$ 对一切的正整数 n 恒成立，

$$m\sqrt{20\cdot2^2+20\cdot2}<\sqrt{20(n+\frac{64}{n})^2+20(n+\frac{64}{n})},$$

即 $m<\sqrt{\frac{1}{6}[(n+\frac{64}{n})^2+(n+\frac{64}{n})]}$ 对一切的正整数 n 恒成立．

$\because n+\frac{64}{n}\geqslant16$，$\therefore\sqrt{\frac{1}{6}[(n+\frac{64}{n})^2+(n+\frac{64}{n})]}\geqslant\sqrt{\frac{1}{6}[16^2+16]}=\sqrt{\frac{136}{3}}$，

$\therefore m<\sqrt{\frac{136}{3}}$．由于 m 为正整数，$\therefore m\leqslant6$．

又当 $m=6$ 时，存在 $a_1=a_2=\cdots=a_m=2$，$a_{m+1}=16$，对所有的 n 满足条件．

因此，m 的最大值为 6．

【点评】 作为一种解题思想，变量意识，和根的意识是函数和方程思想应用的关键．本题综合性比较强，题目条件中没有方程的字眼，但是通过构造方程得到(1)的解．(3)表面上看是不等式的问题，但是转化成函数单调性、最值的问题求解，是自觉使用函数解题的典范．

例 6 (2007年广东)已知函数 $f(x)=x^2+x-1$，α，β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根($\alpha>\beta$)，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数，设 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\,(n=1,2,\cdots)$

(1) 求 α、β 的值；

(2) 已知对任意的正数 n 有 $a_n>\alpha$，记 $b_n=\ln\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\,(n=1,2,\cdots)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

【解】 (1) 令 $f(x)=x^2+x-1=0$，解得 $\alpha=\frac{-1+\sqrt5}{2}$，$\beta=\frac{-1-\sqrt5}{2}$．

(2) 由 $f'(x)=2x+1$，得 $a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}=a_n-\frac{{a_n}^2+a_n-1}{2a_n+1}=\frac{{a_n}^2+1}{2a_n+1}$

$$\text{则 } b_{n+1}=\ln\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\ln\frac{\frac{{a_n}^2+1}{2a_n+1}-\beta}{\frac{{a_n}^2+1}{2a_n+1}-\alpha}=\ln\frac{{a_n}^2+1-2a_n\beta-\beta}{{a_n}^2+1-2a_n\alpha-\alpha}$$

$$=\ln\frac{{a_n}^2-2a_n\beta+\beta^2}{{a_n}^2-2a_n+\alpha^2}=\ln\frac{(a_n-\beta)^2}{(a_n-\alpha)^2}=2\ln\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=2b_n,$$

又 $b_1=\ln\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}=\ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}$，

故 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}$ 为首项，2 为公比的等比数列，

$$\text{则 } S_n=\frac{\ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}(1-2^n)}{1-2}=(2^n-1)\ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}.$$

【点评】 题(1)就是解一元二次方程；题(2)通过变形，发现 $\{b_n\}$ 是一等比数列，从而得到通项方程，顺利求出前 n 项和．本题作为高考压轴题，也充分体现了函数与方程的思想方法．

能力强化

1. 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$(其中 a、b 为常数),若 $f[\lg(\log_3 10)]=5$ 则 $f[\lg(\lg 3)]$ 的值是 ( )

A. -5　　B. -3

C. 3　　D. 随 a、b 的值的不同而变化

2. 若函数 $f(x)=x^2+2x+a$ 没有零点,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $a<1$　B. $a>1$　C. $a\leqslant 1$　D. $a\geqslant 1$

3. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间为 ( )

A. $(1,2)$　B. $(2,3)$　C. $(1,\dfrac{1}{e})$　D. $(e,+\infty)$

4. 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-4x+8)$,$x\in[0,2]$ 的最大值为 -2,则 $a=$ ( )

A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{4}$　C. 2　D. 4

5. 对于函数 ①$f(x)=\lg(|x-2|+1)$,②$f(x)=(x-2)^2$,③$f(x)=\cos(x+2)$,判断如下三个命题的真假:命题甲:$f(x+2)$ 是偶函数;命题乙:$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数,在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;命题丙:$f(x+2)-f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 ( )

A. ①③　B. ①②　C. ③　D. ②

6. 已知函数 $f(x)+2f(\dfrac{1}{x})=x$,则 $f(x)=$________.

7. 关于 x 的不等式 $2\cdot 3^{2x}-3^x+a^2-a-3>0$,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时恒成立,则实数 a 的取值范围为________.

8. 已知二次函数 $y=f_1(x)$ 的图象以原点为顶点,且过点 $(1,1)$,反比例函数 $y=f_2(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 的两个交点间距离为 8,$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 证明当 $a>3$ 时,函数 $g(x)=f(x)-f(a)$ 有三个零点.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数,且为偶函数,在区间 $[2,3]$ 上,$f(x)=4-2(x-3)^2$.

(1) 求 $x\in[1,2]$,$f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的两个顶点 $A(0,0)$、$B(2,0)$,C 在函数 $y=f(x)(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的图象上,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值和最小值.

10. 为了确保交通安全,交通部门规定,在交通事故易发地段内的车距 d 正比于车速 v(km/h) 的平方与车身长 s(m) 的积,且最小车距不得少于半个车身长,假定车身长均为 s(m),且当车速为 50(km/h) 时,车距恰为车身长 s,已知车流量 $Q=\dfrac{1000v}{d+s}$,问交通繁忙时,应规定怎样的车速,才能使此地段的车流量 Q 最大?

拓展思维

11. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$,已知 $f(1)=0$,且存在实数 m,使 $f(m)=-a$.

(1) 试推断 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是否为单调函数,并说明你的理由;

(2) 求证:$f(m+3)>0$.

专题二　数形结合的思想方法

考情预测

1. 重要内容

数形结合法就是根据数学问题的条件与结论之间的内在联系，既分析其代数含义，又揭示其几何意义，使数量关系和空间形式巧妙和谐地结合起来，并充分利用这种“结合”寻找解题途径，使问题得到解决．它包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面．

数形结合是一种数学思想方法，所涉及的主要内容有：(1) 图形与符号、图形与文字的互译；(2) 充分利用图象研究函数特性；(3) 向量中相关问题的解决与应用；(4) 函数图象与方程，不等式的解集间的联系；(5) 圆锥曲线图形与方程，定义间的内在联系；(6) 三角函数图象的特征．

数形结合思想解决的问题常有以下几种：(1) 构建函数模型并结合其图象求参数的取值范围；(2) 构建函数模型并结合其图象研究方程根的范围；(3) 构造函数模型并结合其图象研究量与量之间的大小关系；(4) 构建立体几何模型研究代数问题；(5) 构建解析几何模型研究最值问题；(6) 构造方程模型，求解的个数；(7) 研究图形的形状、位置关系、性质等．

在运用数学结合思想分析问题和解决问题时，需做到以下四点：(1) 要彻底明白一些概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征；(2) 要恰当引参合理用参，建立关系，做好转化；(3) 要正确确定参数的取值范围，以防重复和遗漏；(4) 精心联想“数”与“形”，使一些较难解决的代数问题几何化，几何问题代数化，便于求解问题．

2. 命题回顾

广东省近四年来高考试题涉及数形结合思想方法题量与分值对照一览表

年份	题量	分值
2004 年	题 10，12，15，18，20	39 分
2005 年	题 4，9，14，16，17，20	51 分
2006 年	题 4，7，9，17	27 分
2007 年	题 4，6，7，15，17，19	44 分

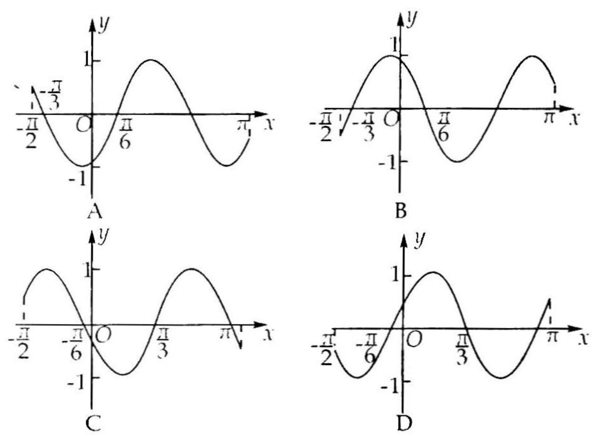
3. 命题展望

数形结合思想是解答高考数学试题的一种常用方法与技巧，特别是在解决选择、填空题时发挥着奇特功效．因而数形结合的能力必然是历年高考的一个重点．

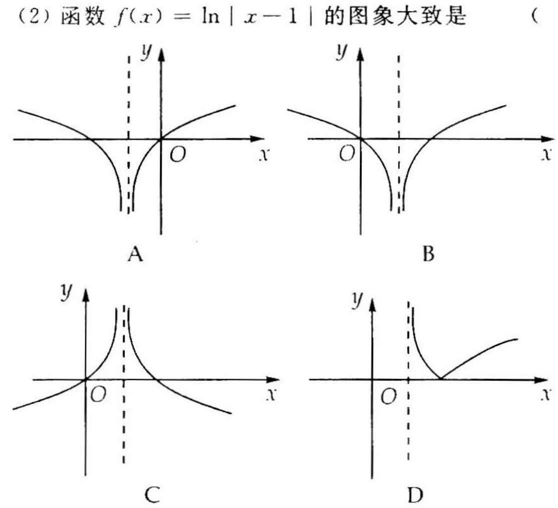
关于数形结合的重要性，可以引用著名数学家华罗庚先生的话再次说明：“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞；数无形时少直觉，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休；切莫忘，几何代数流一体，永远联系切莫分离．”

典型例题

例 1　(1)(2007 年海南宁夏) 函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\pi]$ 的简图是　　(　　)



(2) 函数 $f(x)=\ln|x-1|$ 的图象大致是　　(　　)



【解】 (1) 令 $x=-\frac{\pi}{2}$，则 $y=\sin(2\cdot(-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，排除 B、D；再令 $x=-\frac{\pi}{3}$，则 $y=\sin(2\cdot(-\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3})=-\sin\pi=0$ 故选 A．

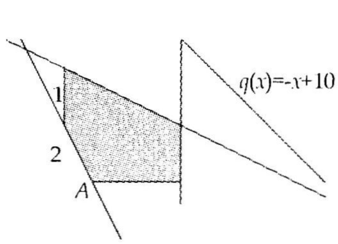
(2) 函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，排除 A、D；又 $x>1$ 时，$f(x)=\ln|x-1|=\ln(x-1)$，函数单调递增，故选 B．

【答案】 (1)A　(2)B

【点评】 已知函数解析式寻找函数图象的试题，关键是结合图象研究关键点的函数值，采用排除法，一步步得到正确答案．体现了数形结合思想方法的应用．

例 2 (1)(2007年山东)设D是不等式组$\begin{cases}x+2y\leqslant 10\\2x+y\geqslant 3\\0\leqslant x\leqslant 4\\y\geqslant 1\end{cases}$表示的平面区域,则$D$中的点$P(x,y)$到直线$x+y=10$距离的最大值是__________.

(2)某纺纱厂生产甲、乙两种棉纱,已知生产甲种棉纱1吨需耗一级子棉2吨,二级子棉1吨;生产乙种棉纱需耗一级子棉1吨,二级子棉2吨,每1吨甲种棉纱的利润是600元,每1吨乙种棉纱的利润是900元,工厂在生产这两种棉纱的计划中要求消耗一级子棉不超过300吨,二级子棉不超过250吨.甲、乙两种棉纱应各生产多少吨,能使利润总额最大,并求最大利润.

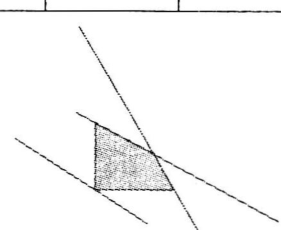


【解】 (1)先画出平面区域D与直线$x+y=10$,如图所示:

由图易知,D中的点$P(x,y)$到直线$x+y=10$距离的最大值就是点A到直线$x+y=10$的距离,而A点的坐标为方程组$\begin{cases}2x+y=3\\y=1\end{cases}$的解,即$A(1,1)$,则所求距离最大值为:$d=\dfrac{|1+1-10|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

(2)将已知数据列成下表:

资源 \ 消耗量 \ 产品	甲种棉纱(1吨)	乙种棉纱(1吨)	资源限额(吨)
一级子棉(吨)	2	1	300
二级子棉(吨)	1	2	250
利润(元)	600	900	

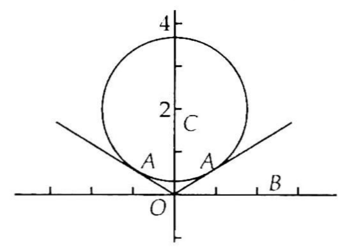


设生产甲、乙两种棉纱分别为x吨、y吨,利润总额为z元,则目标函数$z=600x+900y$,线性约束条件为$\begin{cases}2x+y\leqslant 300\\x+2y\leqslant 250\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$,作出可行域,如图阴影部分:把$z=600x+900y$变形为平行直线系$l$:$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{900}$,由图可知,当$l$经过可行域上的点$M$时,截距$\dfrac{z}{900}$最大,解方程组$\begin{cases}2x+y=300\\x+2y=250\end{cases}$,得$M$的坐标为$\left(\dfrac{350}{3},\dfrac{200}{3}\right)$,当$l$过点$M\left(\dfrac{350}{3},\dfrac{200}{3}\right)$时,$z_{\max}=600\times\dfrac{350}{3}+900\times\dfrac{200}{3}=130000$.

所以,应生产甲种棉纱$\dfrac{350}{3}$吨,乙种棉纱$\dfrac{200}{3}$吨,能使利润总额达最大值130000元.

【点评】 线性规划试题,就是一类体现数形结合思想方法的题型.解题的关键在于画出正确的可行域,然后结合可行域特点寻找符合题设的元素.

例 3 已知向量$\overrightarrow{OB}=(2,0)$,$\overrightarrow{OC}=(0,2)$ $\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3}\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$,则$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角的取值范围是 ( )



A. $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ B. $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

C. $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ D. $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

【分析】 本题用常规化简的方法处理相当麻烦,可采用数形结合方法.事实上,点B在x轴上,点A在以$C(0,2)$为圆心,半径为$\sqrt{3}$的圆上,过原点作此圆的切线,倾斜角分别为$\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{5\pi}{6}$(易求,$\because OC=2$,$AC=\sqrt{3}$,故$\angle AOC=\dfrac{\pi}{3}$.),则范围为$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$,故选D.

【答案】 D

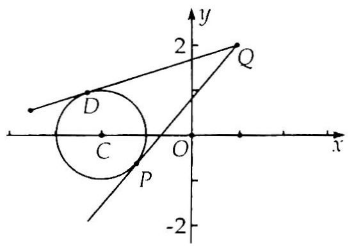
【点评】 理解向量的几何表示,借助数形结合的思想方法,可避开复杂的分析与计算,从而直观地得到结果,提高解题效率.

例 4 已知实数x,y满足$x^2+y^2+4x+3=0$,求$\dfrac{y-2}{x-1}$的取值范围.

【解】 把$x^2+y^2+4x+3=0$变形为$(x+2)^2+y^2=1$,其几何意义为:以$C(-2,0)$为圆心,1为半径的圆.设$\dfrac{y-2}{x-1}=k$,其几何意义为:圆C上的点$P(x,y)$与点$Q(1,2)$连线的斜率.将$\dfrac{y-2}{x-1}=k$变形为PQ:$kx-y-k+2=0$,则圆心到直线PQ的距离$d=\dfrac{|-2k-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1$,

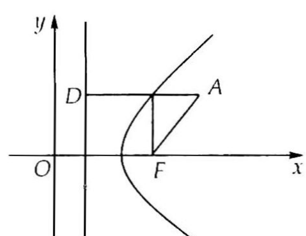
解得$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\leqslant k\leqslant\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore \frac{y-2}{x-1}$ 的取值范围为 $[\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{3+\sqrt{3}}{4}]$.



【点评】 所给的限制条件与所求式子如果能够找到它的几何意义，你会发现，用数形结合的解题思想来解这类问题，既准确又过程简单.

例 5 (1) 已知点 $A(3,2)$，$F(2,0)$，在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上求一点 P，其坐标为_______ 时，使 $|PA|+\frac{1}{2}|PF|$ 最小.



(2) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 $60°$ 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线离心率的取值范围是__________.

【解】 (1) 如图，易知 A 点在双曲线的右支内，则由双曲线的第二定义知：若使 $|PA|+\frac{1}{2}|PF|$ 最小，只需 $|PA|+d$（d 是 P 到相应准线的距离）最小，过点 A 作右准线的垂线 AD，则 AD 与双曲线右支的交点 $(\frac{\sqrt{21}}{3},2)$ 即为所求点.

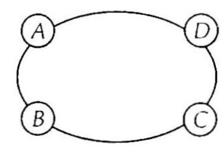
(2) 根据直线与渐近线斜率的大小关系，$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{e^2-1}\geqslant\sqrt{3}$，从而 $e\geqslant 2$.

【点评】 解析几何问题的解决，常用数形结合的思想方法.

【变式训练】 1. 已知点 $A(1,1)$，$F(2,0)$，点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 上运动，求 $|PA|+2|PF|$ 的最小值.

2. 已知抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，点 $A(a,b)$ 位于抛物线内，点 P 在抛物线上运动，求 $|PA|+|PF|$ 的最小值.

例 6 (2007 年广东) 如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图，公司在年初分配给 A、B、C、D 四个维修点的某种配件各 50 件，在 A 使用前发现需将 A、B、C、D 四个维修点的这批配件分别调整为 40、45、54、61 件，但调整只能在相邻维修点之间进行，那么要完成上述调整，最少的调动件次（n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n）为 (　　)



A. 15　　B. 16　　C. 17　　D. 18

【分析】 A 到 D 调动 10 件，需要 10 次；B 到 C 调动 5 件，需要 5 次；C 到 D 调动 1 件，需要 1 次，此时完成调动，共需 16 次，选 B.

【答案】 B

【点评】 此题结合图形，可以轻易选到正确答案.

能力强化

1. 设平面向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 的和 $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=0$，如果平面向量 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 满足 $|\mathbf{b}_i|=2|\mathbf{a}_i|$，且 $\mathbf{a}_i$ 顺时针旋转 $30°$ 后与 $\mathbf{b}_i$ 同向，其中 $i=1,2,3$，则 (　　)

A. $-\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3=0$　B. $\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3=0$

C. $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_3=0$　D. $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3=0$

2. 若 x,y 满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 3\\ y\leqslant 2x\end{cases}$，则 $3x+4y$ 的最大值是 (　　)

A. 11　　B. 10　　C. 9　　D. 8

3. 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则 (　　)

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$　　D. $b>a>1$

4. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $C_I(M\cup N)$ 等于 (　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

5. 在 **R** 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=f(2-x)$. 若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，则 $f(x)$ (　　)

A. 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是增函数；

B. 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数；

C. 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，在区间 $[3,4]$ 上是增函数；

D. 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数；

6. 方程 $\lg x=\sin x$ 的实根的个数是________个.

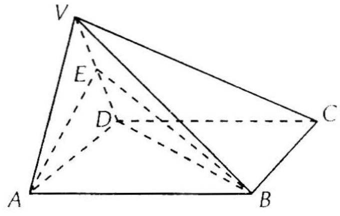
7. 在圆心为 90° 的扇形 OAB 中，以圆心 O 为起点作射线 OC、OD 则使得 $\angle AOC+\angle BOD<30^\circ$ 的概率为________.

8. 设二次方程 $2x^2+(a-2)x+a+5=0$ 有二相异实根，若(1) 一根大于 2，另一根小于 2；(2) 一根大于 2，另一根小于 0；(3) 二根都大于 0. 试分别求实数 a 的取值范围.

9. 如图，在四棱锥 $V-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 VAD 是正三角形，平面 $VAD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明 $AB\perp$ 平面 VAD；

(2) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小.



第 8 题图

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}(x\geqslant 1)$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

7 拓展思维

11. 设 $f(x)=x+2-\sqrt{1-x^2}$.

(1) 指出 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求出 $f(x)$ 的最值.