高职高专“十一五”规划教材
● 公共基础课系列

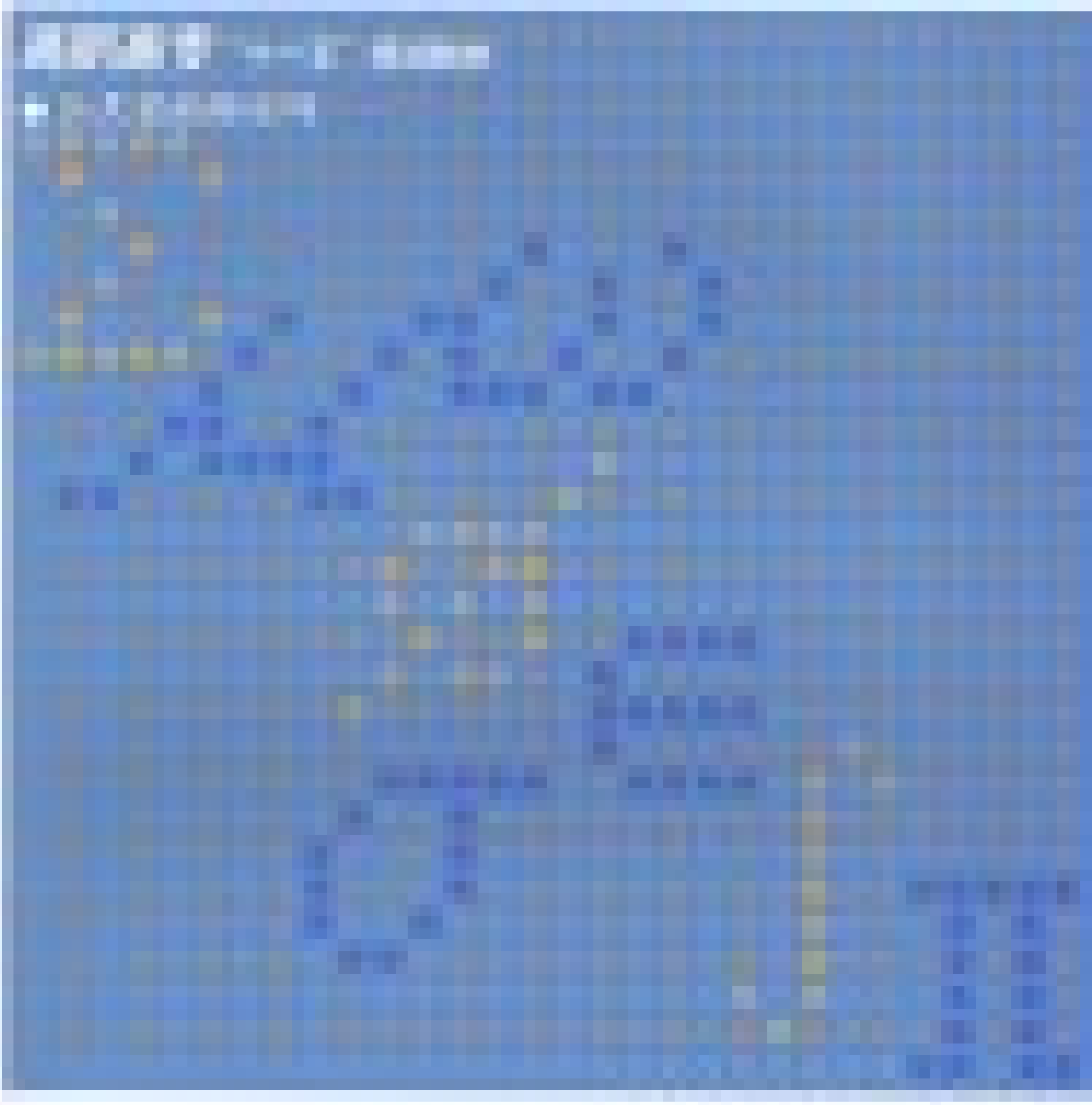
应用数学

（理工类）下册

总主编　李　华
本册主编　陈全红

数学是研究数量关系与空间形式的一门科学。本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必需、够用、好用、实用”为原则，讲解了线性代数、概率与统计初步等内容。

大象出版社
全国优秀出版社



应用数学

高职高专“十一五”规划教材
公共基础课系列

应用数学

（理工类）
下册

总 主 编　李　华
本册主编　陈全红

大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学:理工类.下册/李华总主编;陈全红本册主编.
—2版.—郑州:大象出版社,2007.1(2008.9重印)
高职高专"十一五"规划教材.公共基础课系列
ISBN 978-7-5347-2715-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①李…②陈… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第008556号

本书编委会名单

策划组稿 王茂森
责任校对 钟 骄
封面设计 王晶晶
出　　版 大象出版社(郑州市经七路25号 邮政编码450002)
网　　址 www.daxiang.cn
发　　行 全国新华书店经销
制　　版 郑州普瑞印刷制版服务有限公司
印　　刷 河南第一新华印刷厂
版　　次 2008年9月第2版　　2008年9月第1次印刷
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 9.75
字　　数 212千字
定　　价 14.80元
若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。
印厂地址 郑州市经五路12号
邮政编码 450002　　电话 (0371)65957860-351

前 言

本套教材是根据教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织了河南省内十多所高职院校负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师，经过深入探讨，结合省内高职院校所设专业、学生特点以及教育教学的特点而编写的。

教材突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必需、够用、好用、实用”为原则，以培养学生良好的学习习惯、培养学生的创新精神为目的。

教材在编写时注意了以下问题：

1. 考虑到目前高职院校学生的数学基础以及各校基础课程学时数普遍压缩的实际情况，教材编写把握“够用”的原则，不过分强调数学体系的系统性，删去不必要的推导、证明，强调结论、定理的应用；删去在现实生活中、专业学习中涉及不多的内容，突出实际应用。

2. 教材在知识点、基本概念的引入、公式结论的应用中注意从实际问题出发，使同学们认识到数学不仅仅是解题，而且可以解决我们身边的很多实际问题。同时还注意为专业课服务，尽量采用专业课所涉及的实例。

考虑到学生对数学能力的不同需求，为满足基础较好的同学进一步深造的要求，教材在例题与习题的配备上编入了一些专升本考试中常见的题型，供学有余力的同学阅读，培养这些同学的解题能力。

本套教材分上、下两册，为适应大多数学校的教学要求，上册内容以微积分为主，下册内容以线性代数和概率与统计初步为主。考虑到高职院校所开设专业的多样性，不同专业对教学内容、教学能力的要求也不相同，因此，教材在内容上可供选择的弹性较大，各使用学校可在编写教学计划中自主取舍。概率初步、行列式、矩阵、向量与线性方程组。供对数学要求较多的专业选用。

本套教材适合高职高专院校理工科类的专业使用。同时高职高专院校经济类的专业、五年制大专以及“3 +2”大专学生学习高等数学课程时也可选用。

本书由李华任总主编，陈全红任本册主编。其他编写人员有刘涛、郭志强、曹军芳、田颖科、刘洋。

参加下册统稿的有：李华、潘晓伟、陈侃、陈玉发、陈全红。

本教材经过一些高职院校的使用，执教者们给我们提出了合理的建议，我们结合实际情况，作了一定的修改，力图使本书更加好用，更加实用。

由于水平所限，时间仓促，教材中难免还有欠妥之处，敬请广大师生、读者批评指正。

作者

2008.6

大象出版社

大象出版社为全国优秀出版社，其前身是河南教育出版社，1983年12月成立，1996年10月经国家新闻出版署批准更为现名。大象出版社主要出版大中小学各类教材、教学参考书、教学辅助读物、学生课外读物及教育理论著作、工具书与有关学术著作。出版社在出版直接服务于教学的各类教育读物的同时，还致力于弘扬中华优秀传统文化。已基本形成编、印、发、物配套齐全，书、报、刊、电子读物良性互动的多元化发展格局。

建社20多年来，大象出版社出版图书6000余种，发行20多亿册。有400余种图书获得包括国家图书奖、"五个一工程"图书奖、中国图书奖在内的省、部级以上优秀图书奖，百余种图书发行海外市场。

2006年全国图书出版业竞争力研究课题组从反映出版社的六种能力（生产力、销售力、盈利力、组织力、资源力和成长力）对全国572家出版社进行综合排名，我社名列第40位。2007年在首届中国出版政府奖中我社连中四元。2007年我社通过ISO 9000认证，被评为AAA级信誉单位。

在新的形势下，大象出版社积极进取，不断强化其在教育图书出版领域的优势，充分展示大象出版社在新课程改革中锐意进取的雄姿和深厚实力。配合国家新课程改革，目前已形成了从小学至高中12个年级、国标教材与地方教材相结合的大象版教材体系。随着综合实力的加强，大象出版社近年来加大了大中专教材的出版力度，大中专教材也渐成体系。

今后我们会加大力度不断开发新品种的系列教材，欢迎有编写意向的老师积极与我们联系（daxianggj@163.com）。

大象出版社将继续秉承"脚踏实地，善于负重，坚忍不拔，勇往直前"的大象精神，实践"服务教育，介绍新知，沟通中外，传承文化"的出版宗旨，为读者奉献更多的精品图书！

目 录

第十一章　概率统计初步

概率与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科．概率论是一个比较古老的数学分支，它初始于所谓的"赌金分配问题"．时至今日，概率论正在各行业中得到广泛的应用，发展成为一门极为重要的数学学科．

本章将介绍概率和统计的初步知识、随机事件与概率等概念和运算，讨论随机变量及其概率分布等概念和性质、随机变量的数学特征，以及随机现象的规律性作用推断．

11.1　随机事件与概率

11.1.1　随机事件

1. 随机现象与随机事件

在实际工作和生活中，有些现象在一定条件下必然会发生或必定不会发生．例如，在 1 个标准大气压下，水加热到 100℃ 必然会沸腾；在室温下，生铁必定不会熔化．这类在一定条件下必然会发生或必定不会发生的现象称为确定性现象．

然而，也存在与确定性现象有本质区别的另一类现象．例如，掷一枚质地均匀的硬币，可能出现正面，也可能出现反面；从一批产品中随意地抽验一件，这件产品的质量可能合格，也可能不合格．这类在一定条件下有多种可能结果，且事先无法预知哪种结果会出现的现象称为**随机现象**．

人们经过长期实践并深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观察结果而言，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性．例如，多次重复投掷一枚硬币，得到正面向上的次数大致占总投掷数的$\frac{1}{2}$．我们把这种大量重复试验或观测下，其结果所呈现的固有规律性，称为统计规律性．概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科．

研究随机现象的统计规律性，需要在相同的条件下重复地进行多次试验（或观察），称为**随机试验**，简称**试验**．它具有如下三个特点：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确知道试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但可以肯定一定是可能结果中的一个.

在随机试验中，可能出现的结果，称为**随机事件**，简称为**事件**，通常用大写字母 A,B,C 等表示. 例如，抛一枚硬币的试验中，A = "正面向上"，就是一随机事件. 在随机事件中，随机试验的每一个可能结果，称为**基本事件**. 例如，掷一颗骰子的试验中，观察其出现的点数："1 点"，"2 点"，…，"6 点" 都是基本事件，"奇数点" 也是随机事件，但它不是基本事件，它是由 "1 点"，"3 点" 和 "5 点" 这三个基本事件组成的，只要这三个基本事件中的一个发生，"奇数点" 这个事件就会发生. 这种由若干个可能结果组成的事件叫**复合事件**. 在每次试验中必然要发生的事件，称为**必然事件**；必然不发生的事件，称为**不可能事件**.

称随机试验中每一种可能的结果为一个样本点，用 ω 表示. 样本点的全体组成的集合称为该随机试验的样本空间，记作 Ω. 引入样本空间后，就可以从集合论的角度来描述随机事件及它们之间的关系和运算. 随机试验中任意一个事件就是样本空间的子集. 基本事件是由一个样本点组成的单元集. Ω 和 $\varnothing$ 分别称为必然事件和不可能事件.

例 1 关于"赌金分配问题" 的解决方法. 在一场赌博中，双方约定，如果某一方先胜 6 局便算赢家，但当甲方胜了 4 局，乙方胜了 3 局时，因出现意外，赌局中断，无法继续. 此时，赌金应该如何分配？

解 法国数学家费马认为如果继续赌局，无论甲方或乙方胜，比赛最多只要再赌 4 轮就可决出胜负，甲、乙双方胜负乃是个随机事件. 如果用"甲" 表示甲方胜，用"乙" 表示乙方胜，那么最后 4 轮的结果，不外乎以下 16 种排列：

甲甲甲甲	甲甲乙乙	甲乙乙乙
甲甲甲乙	甲乙甲乙	乙甲乙乙
甲甲乙甲	甲乙乙甲	乙乙甲乙
甲乙甲甲	乙乙甲甲	乙乙乙甲
乙甲甲甲	乙甲乙甲	乙乙乙乙
	乙甲甲乙	
甲方胜		乙方胜

从上面 16 种排列中，当甲出现两次或两次以上时，甲方获胜，因而甲方获胜的情况共有 11 种；当乙方出现 3 次或 3 次以上时，乙方获胜，所以乙方胜的情况共有 5 种. 因此，赌金应当按照 11 : 5 的比例分配.

帕斯卡解决问题的方法是利用"算术三角形"，从 n 个物品中一次取出 r 个的组合数为 C_n^r，计算出甲胜的所有组合数为：$\mathrm{C}_4^4+\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_4^2=11$，甲方输的所有组合数为：$\mathrm{C}_4^1+\mathrm{C}_4^0=5$，所有赌金应按照 11 : 5 的比例分配.

2. 事件的关系和运算

概率论中的事件是赋予了具体含义的集合，因此，事件间的关系与运算可以按照集合论中集合间的关系与运算来处理. 下面引进事件之间的几种主要关系及作用在事件上的运算.

(1) **包含关系**

如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 B 含事件 A,或称事件 A 被事件 B 所包含,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 显然,对任一事件 A,有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

(2) **相等关系**

如果事件 B 包含事件 A,同时事件 A 也包含事件 B,即 $A\subseteq B$ 及 $B\subseteq A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

(3) **事件的并(和)**

两个事件 A 和 B 至少有一个发生,称为事件 A 与事件 B 的并(和). 它是由事件 A 和 B 的所有样本点构成的集合. 记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

事件和概念,可以推广到 n 个事件的情况. 事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之和,表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

(4) **事件的交(积)**

两个事件 A 与 B 同时发生,称为事件 A 与事件 B 的交(积),记作 AB 或 $A\cap B$.

事件积的概念,也可以推广到 n 个事件的情况. 事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之积,表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

(5) **事件的差**

事件 A 发生而事件 B 不发生,称为事件 A 与事件 B 的差. 它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点所组成的集合,记作 $A-B$.

(6) **互不相容(互斥)事件**

事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称为事件 A 与事件 B 互不相容(或称互斥). 互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点,显然,基本事件间是互不相容的.

(7) **对立事件**

两个事件 A 和 B 满足 $A+B=\Omega$ 及 $AB=\varnothing$,则称 A,B 互为对立事件,记作 $B=\bar{A}$. 显然,A 的对立事件 $\bar{A}$,表示 A 不发生.

对立事件有下列性质:

$$A\bar{A}=\varnothing,A+\bar{A}=\Omega,\bar{A}=\Omega-A,\bar{\bar{A}}=A.$$

由此可得,对立事件必为互斥事件,反之不成立.

(8) **完备事件组**

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

例 2　掷一颗骰子的试验,观察出现的点数,事件 A 表示"奇数点",B 表示"点数小于 5",C 表示"小于 5 的偶数点". 用集合的列举法表示下列事件:$\Omega,A,B,C,A+B,A-B,AB,AC,C-A,\bar{A}+B$.

解　$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,　$A=\{1,3,5\}$,

$B=\{1,2,3,4\}$,　$C=\{2,4\}$.

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$,　$A-B=\{5\}$,

$AB=\{1,3\}$,　$AC=\varnothing$,

$C-A=\{2,4\}$,　$\bar{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$.

例3 从一批产品中每次取出一个产品进行检验，做不放回抽样，用 A_i 表示事件"第 i 次取到合格品"($i = 1,2,3$). 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 三次都取到合格品；

(2) 三次中至少有一次取到合格品；

(3) 三次中恰有两次取到合格品；

(4) 三次中最多有一次取到合格品.

解 (1) 事件"三次都取到合格品"意味着事件 A_1,A_2,A_3 同时发生，所以这一事件可表示为 $A_1A_2A_3$.

(2) 事件"三次中至少有一次取到合格品"就是事件 A_1,A_2,A_3 至少有一个发生，所以这一事件可表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$，也可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1A_2A_3$.

(3) 事件"三次中恰有两次取到合格品"意味着两次取到合格品，而另一次取到不合格品，所以这一事件可表示为 $A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$.

(4) 事件"三次中最多有一次取到合格品"就是事件 A_1,A_2,A_3 中至少有两个未发生，所以这一事件可表示为$\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_2}\,\overline{A_3}$，或$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$.

11.1.2 随机事件的概率

在随机现象中，人们常常希望知道某一个随机现象出现的可能性有多大. 例如，购买某品牌的电视机，人们很想知道它是次品的可能性有多大. 欲在某河流上建筑一座防洪水坝，为了确定水坝的高度，人们很想知道该河流在水坝地段每年最大洪水达到某高度的可能性的大小. 显然，电视机是次品是一个随机事件，最大洪水达到某一高度也是随机事件. 必须对事件发生的可能性大小进行数量的描述，这个刻画随机事件发生可能性大小的数值称为概率，事件 A 的概率记为 $P(A)$.

1. 概率的统计定义

在给出事件概率的定义之前，先了解一下与概率概念密切相关的事件频率的概念.

设事件 A 在 n 次重复进行的试验中发生了 m 次，则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的频率，m 称为事件 A 发生的频数.

显然，任何随机事件的频率都是介于 0 与 1 之间的一个数.

大量随机试验的结果表明，多次重复地进行同一试验时，随机事件的变化会呈现出一定的规律性：当试验次数 n 很大时，某一随机事件发生的频率具有一定的稳定性，其数值将会在某个确定的数值附近摆动，并且试验次数越多，事件 A 发生的频率越接近这个数值. 我们称这个数值为事件 A 发生的概率.

定义 11.1 在一个随机试验中，如果随着试验次数的增多，事件 A 出现的频率 $\frac{m}{n}$ 在某个常数 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记作

$$P(A) = p.$$

概率的这种定义,称为概率的统计定义.

表 11 - 1 给出了“投掷硬币”试验的几个著名的记录,从表中看出,不论是什么人投掷,当试验次数逐渐增多时,“正面向上”的频率越来越明显地稳定并接近于 0.5. 这个数值反映了出现“正面向上”的可能性大小. 因此,用 0.5 作为投掷硬币“出现正面”的概率.

表 11 - 1

试验者	投掷次数 n	出现“正面向上”的频数 m	频率 $\frac{m}{n}$
摩　根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

2. 概率的古典定义

分析“投硬币”和“掷骰子”等例子可知,它们有两个共同特点:

(1) 每次试验只有有限个可能的试验结果,或者说组成试验的基本事件(样本点)总数为有限个;

(2) 每次试验中,各基本事件(样本点)出现的可能性是相同的.

例如,投硬币的两种结果“正面向上”和“反面向上”出现的可能性都是$\frac{1}{2}$;而掷骰子出现“1 点”,“2 点”,…,“6 点”6 种结果的可能性都是$\frac{1}{6}$.

在概率论中,把具有上述两种特点的试验称为古典试验,它的数学模型称为古典概型. 关于古典概型的问题,事件 A 发生的概率如下定义:

定义 11.2　对于古典概型,若样本空间所含的样本点总数为 n,事件 A 所含的样本点个数为 m,则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}.$$

例 4　从 1 ~ 10 这 10 个自然数中任取一数.

(1) 求随机试验的样本空间;

(2) 设事件 A 为“任取一数是偶数”,求 $P(A)$;

(3) 设事件 B 为“任取一数是 5 的倍数”,求 $P(B)$.

解　(1) 取出的数可以是 1 ~ 10 这 10 个自然数中的任意一个,每一个数被取到的可能性相同. 如果将样本点{任取一数为 i}简记为 $i(i=1,2,\cdots,10)$,则样本空间 Ω 含有 10 个样本点,即

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

(2) 事件 $A=\{2,4,6,8,10\}$,含有 5 个样本点,所以

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

(3) 事件 $B=\{5,10\}$,含有 2 个样本点,所以

$$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

例 5 袋内装有 5 个白球和 3 个黑球,从中任取两球.

(1) 设事件 A 为"取到的都是白球",求 $P(A)$;

(2) 设事件 B 为"恰取到 1 个黑球",求 $P(B)$.

解 从 8 个球中随机地取出 2 个,共有 C_8^2 种取法,于是,样本空间所含的样本点总数是 $C_8^2=28$.

(1) 事件 A 发生,相当于在 5 个白球中随机地取 2 个,因而事件 A 所含的样本点个数是 $C_5^2=10$,所以

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}.$$

(2) 事件 B 发生,相当于取到 1 个白球和 1 个黑球,事件 B 所含的样本点个数是 $C_3^1C_5^1=15$,所以

$$P(B)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}.$$

例 6 为了估计一个大型渔场中鱼的尾数,常使用以下方法:先从渔场中捕出一定数量的鱼并做上记号后放回水中,经过适当时间,让其充分混合,再从渔场中捕出一定数量的鱼,查看有记号的鱼所占的比例,从而估计渔场中鱼的尾数. 如果第一次捕出 1000 尾并做上记号放回水中,第二次捕出 600 尾,其中有记号的鱼有 10 尾,试估计该渔场中鱼的尾数.

解 设 A 表示"有记号的鱼",n 表示渔场中鱼的尾数. 假定每尾被捕到的可能性是相等的,则由古典概率计算公式,得

$$P(A)=\frac{1000}{n}.$$

第二次捕出 600 尾鱼中,有记号的鱼有 10 尾. 由概率的统计定义,得

$$P(A)=\frac{10}{600},$$

所以

$$\frac{1000}{n}=\frac{10}{600},$$

解方程,得

$$n=60000(\text{尾}).$$

即该渔场中大约有 60000 尾鱼.

习题 11-1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 将一枚硬币连掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情形;

(2) 将一枚硬币连掷三次,观察出现正面的次数;

(3) 袋中装有编号为 1,2 和 3 的三个球,随机地取两个,考察这两个球的编号;

(4) 袋中装有编号为 1,2 和 3 的三个球,随机地取两次,每次取一个,不放回,考察这两

个球的编号;

(5) 掷甲、乙两颗骰子,观察出现的点数之和.

2. 设 A,B,C 为任意三个事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) 只有 B 发生;(2) 只有 B 不发生;(3) 至少有一个发生;(4) 恰有一个发生;

(5) 没有一个发生;(6) 至少有两个不发生;(7) 至多有两个发生;(8) 至多三个发生.

3. 设 $\Omega=\{a,b,c,d,e,f,g\}$,$A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$,$B=\{d,f,g\}$,$C=\{a,b,c,d,e\}$,试表述下列事件:

(1)$A\cup B$;　(2)$A\overline{C}$;　(3) $\overline{(A\cup B)C}$.

4. 随机抽检三件产品,设 A 表示"三件中至少有一件是次品",B 表示"三件中至少有两件是次品",C 表示"三件都是正品",问 $\overline{A}$,$A\cup B$,AC 各表示什么事件.

5. 有一批产品 100 件,其中合格 95 件,不合格 5 件,从中任取两件,求:

(1) 恰取到一件次品的概率;(2) 至少取到一件次品的概率.

6. 掷一颗均匀骰子,求:

(1) 出现偶数点事件 A 的概率;

(2) 出现奇数点事件 B 的概率;

(3) 出现点数不超过 4 的事件 C 的概率.

7. 同时掷两枚质地均匀的硬币,求:

(1) 两枚都是正面朝上的概率;

(2) 一枚正面朝上,另一枚反面朝上的概率.

8. 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,3,5\}$,$B=\{2,4,6\}$,$C=\{1,2,3,5\}$,则下列事件分别表示什么?

(1)$\overline{A}B$;　(2)AC;　(3)$A\cup C$.

9. 一口袋中有 5 个红球和 2 个白球,从口袋中任取一球,看过它的颜色后就放回袋中,再从袋中任取一球. 设每次取球时口袋中各个球取到的可能性相同,求:

(1) 第一次、第二次都取得红球的概率;

(2) 第一次取得红球、第二次取得白球的概率;

(3) 两次取得的球为红、白各一个的概率;

(4) 第二次取得红球的概率.

10. 一部五卷本的书,按任意的顺序(即随机地)排放到书架上,求各册自左至右或自右至左的顺序恰好是 1,2,3,4,5 的概率.

11. 钥匙中有 3 把能打开门,今任取 2 把,求能打开门的概率.

12. 求从一副扑克牌中(不包括大小王)任意取出 13 张,问有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张梅花的概率.

13. 假设电话号码由 0,1,2,3,…,9 中的 10 个数字组成,任取一个七位的电话号码,求:

(1) 它由不同的 7 个数字组成的概率;

(2) 它由末两位数是 18,而前 5 位数可以取重复数字组成的概率.

14. 邮政大厅有五个邮筒,现将两封信逐一随机投入邮筒,求:

(1) 第一个邮筒内恰好有一封信的概率;

（2）前两个邮筒内没有信的概率.

11.2 概率的性质及运算法则

11.2.1 随机事件概率的性质

随机事件的概率有如下性质：

性质 11.1 （**非负性**）对任何事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

性质 11.2 （**规范性**）$P(\Omega) = 1$.

性质 11.3 （**有限可加性**）若事件 A 与事件 B 互不相容，即 $AB = \varnothing$，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{11-1}$$

例 1 袋中装有 4 个白球和 3 个黑球，从中一次抽取 3 个，计算至少有两个是白球的概率.

解 设事件 A_i 为"抽取 3 个球中有 $i(i = 1,2,3)$ 个白球"，显然，$A_2A_3 = \varnothing$.

因为 $P(A_2) = \dfrac{C_4^2C_3^1}{C_7^3} = \dfrac{18}{35}$，$P(A_3) = \dfrac{C_4^3}{C_7^3} = \dfrac{4}{35}$，且 A_2 与 A_3 互不相容. 由式(11－1)，得所求的概率为

$$P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}.$$

根据上述三条性质，可以得到下面性质：

性质 11.4 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing) = 0$.

性质 11.5 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j = \varnothing(i \neq j)$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 11.6 对任何事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 11.7 如果 $A \subseteq B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

性质 11.8 （**任意事件的加法公式**）对于任意两件事 A, B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

例 2 某集体有 6 个人是 1980 年 9 月出生的，求其中至少有 2 个人是同一天出生的概率.

解 设 A 表示事件{6 个人中至少有 2 个人同一天出生}. 显然，A 包含下列几种情况：A_1：恰有 2 人同一天出生；A_2：恰有 3 人同一天出生；A_3：恰有 4 人同一天出生；A_4：恰有 5 人同一天出生；A_5：6 人同一天出生. 于是 $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$. 显然，$A_i(i = 1,2,\cdots,5)$ 之间是两两互斥的，由性质 11.5，得

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

用这个方法可以求出 $P(A)$，但是比较烦琐，因此，考虑用逆事件 $\overline{A}$ 计算. 用 A_0 表示事件{6 个人中没有同一天出生}，则有以下解答：

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = A_0 + A = \Omega.$$