山东潍坊学校课程行动计划系列丛书

GAOZHONGXINKEBIAO
DAOXUELIAN

高中新课标导学练

数学

5

【必修】

人教B版

潍坊市教育科学研究院 编

中国石油大学出版社

GAOZHONGXINKEBIAODAOXUELIAN

高中新课标导学练

数 学

⑤

必 修

潍坊市教育科学研究院 编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标导学练. 数学. 5:必修/潍坊市教育科学研究院编. —4 版. —东营:中国石油大学出版社,2008. 6

ISBN 978-7-5636-2600-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 潍… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 068720 号

高中新课标导学练. 数学. 5:必修

潍坊市教育科学研究院　编

总 策 划: 路庆良(电话　0546－8393681)
责任编辑: 付晓云(电话　0546－8395745)

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东　东营,邮编　257061)
网　　址: http://www.uppbook.com.cn
电子信箱: suzhijiaoyu1935@163.com
印 刷 者: 东营石大博雅印务有限公司
发 行 者: 中国石油大学出版社(电话　0546－8391809)
开　　本: 210×285　印张:6　字数:250 千字
版　　次: 2008 年 8 月第 4 版第 1 次印刷
定　　价: 7.50 元

★ 若图书出现印装质量问题,请与本社联系调换 ★

编者的话

A Note from the Author

基础教育新课程改革的启动，给高中教育教学带来了新的生机与活力。新课程所蕴涵的教育理念，反映了当今时代变迁的特点，体现了世界教育发展的趋势。为了适应这一改革，我们特聘新课程教学研究与实践专家，认真分析，精心组织，推出了这套理念创新、内容实用的“高中新课标导学练”丛书，保证让您用有所益、学有所成。

★ 与教材同步，思路全新，深入领会 ★

根据高中最新课程标准，创设“导”、“学”、“练”三个环节。导：名师点拨，学海指航，导得准，使您高效学习；学：诱思探究，活学活用，学得巧，让您举一反三；练：拓展视野，兼顾知能，练得精，助您步步为营。

★ 与课堂同步，讲练结合，提升素质 ★

紧密联系课堂教学，根据各学科的思维特点设计讲练体系。讲，有利于您与老师的融洽交流，使您从详尽的讲解中学得方法与技巧；练，有利于您把握方向，让您在层次分明的练习中融会贯通。

★ 与自学同步，注重实践，引导创新 ★

联系社会，贴近生活，为您创设主动学习的环境，帮您提高自主学习、合作交流以及分析和解决问题的能力，让您成为学习的主人，使您在思考中顿悟、在顿悟中迁移，达到学以致用的目的。

★ 与高考同步，覆盖考点，高效训练 ★

把握高考命题动向，融高考大纲细节于点点滴滴之中，保证让您学得有方向，练得有目的，考得有依据，在最短的时间内扩大知识容量，提高应试技巧，增强高考实力。

我们由衷地希望本丛书能成为您迈向成功彼岸的金桥。

高中新课标导学练

本书编写组

主　　编　尹玉柱　徐会吉

副主编　丁尔法　任晓夫　张　波

编　　者　丁尔法　杨清华　杨春梅

王淑玲　王建华　任晓夫

刘瑞萍　吴美英　赵国美

刘锡宝　张　波　尹淑友

杜云洁

目录

Contents

灵机一动

第一章 解三角形

学习导航

1. 主要内容编排

本章共分两个单元，主要内容包括正弦定理、余弦定理及正弦定理、余弦定理的推导，解三角形及正弦定理、余弦定理的应用.

第一单元是正弦定理、余弦定理及正弦定理、余弦定理的推导.本单元第一节在初中学过的三角形有关知识的基础上分两种情况推导出正弦定理，并利用正弦定理解决三角形中已知三个元素求其他三个元素的问题.第二节利用勾股定理及三角形的有关知识推导出了余弦定理，并利用余弦定理解决三角形中的相关问题，如利用正弦定理、余弦定理解决三角形的面积问题.

第二单元是正弦定理、余弦定理的应用举例，利用正弦定理、余弦定理测量建筑物的高度、测量平面上两个不能到达的点之间的距离、作物体的受力分析等等.

本章在最后安排了实习作业，请同学们自主选择一个有关测量的问题进行实际测量，自己动手解决问题.学习时要重视这个作业，认真完成.

2. 地位与作用

正弦定理、余弦定理是关于任意三角形边角之间关系的两个重要定理.在初中学过的三角形相关知识的基础上推导了这两个定理，并运用它们解决测量、工业、几何、物理等方面的实际问题，从而使学生进一步了解数学在实际中的应用，进一步激发学生学习数学的兴趣，培养学生由实际问题抽象出数学问题并加以解决的能力.从某种意义上来讲，本章是用代数方法解决几何问题的典型内容之一.

为了继续提高学生运用所学知识解决实际问题的能力，本章特地安排了一个实习作业，进一步培养学生的探究能力和创新精神.

3. 重点和难点

1) 关于正弦定理

(1) 正弦定理的变形

① $a=2R\cdot\sin A, b=2R\cdot\sin B, c=2R\cdot\sin C$;

② $\sin A=\dfrac{a}{2R}, \sin B=\dfrac{b}{2R}, \sin C=\dfrac{c}{2R}$;

③ $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

(2) 利用正弦定理及三角形内角和定理，可以解决以下两类问题：

① 已知三角形的两角及任一边，求其他两边和一角；

② 已知三角形的两边和其中一边的对角，求另一边的对角，从而进一步求出其他的边和角.

利用正弦定理解决问题②是一个难点.由于已知三角形的两边和其中一边的对角，有时不能唯一确定三角形的形状，可能出现一解、两解或无解情况，所以应结合图形并根据“三角形中大边对大角”来判断解的情况，做到正确取舍.

2) 关于余弦定理

(1) 余弦定理的变形

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$;

$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C\Rightarrow\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

(2) 余弦定理的主要作用

一是解三角形，二是判断三角形的形状.其主要功能是实现边角之间的转化.

利用余弦定理可以解决以下两类问题：

① 已知三角形的三边，求其三个角；

有错必纠

②已知三角形的两边及其夹角,求第三边和其他两个角.

3)三角形形状的判别

先将条件中的边角关系由正、余弦定理统一为角角或边边关系,再由三角变形或代数变形分解因式,判定形状.在变形过程中要注意等式两端的公因式不要约掉,应移项提取公因式,否则会有漏掉一种解的可能.

4)三角形中的三角函数问题

解决这类问题应将三角函数的有关公式和三角形的性质及正、余弦定理有机地结合起来.

5)三角形在实际中的应用

解斜三角形的知识主要用于解决测量及航海这两大类型的问题.在实际应用中,首先要弄清楚题意,画出直观示意图,将实际问题转化为解三角形的问题,再确定是哪类斜三角形问题,即应用哪个定理来解决.

4. 学法指导

利用正、余弦定理处理三角形问题,必须结合三角形全等的判定定理理解斜三角形的四种基本可解型,特别要从多角度(几何作图、三角函数的定义、勾股定理等角度)去理解"边边角"型问题可能有两解、一解或无解三种情况,根据已知条件判定解的情形,并正确求解.这是本章的难点之一.

当题目条件能确定一个或两个三角形时,即为定型问题,否则即为不定型问题.其中,解不定型问题是本章的第二个难点.

将某些实际问题转化为解斜三角形的问题是本章的第三个难点.突破这一难点的关键在于如何将实际问题转化为数学问题,其方法是画出示意图,将抽象问题具体化、形象化.通常总是将实际问题中的长度、角度看作三角形相应的边与角,从而构造三角形,创造应用解三角形的情景,进而运用有关的知识去解决问题.解这类实际问题时,还应注意近似计算的要求.

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

学习目标

1. 掌握正弦定理及正弦定理的推导.
2. 了解正弦定理的几种常用的变形公式.
3. 会利用正弦定理解决三角形问题及现实生活和生产中的实际问题.

自学指导

一、填空

1. 正弦定理是______________________.

2. 写出正弦定理的变形公式:______________________.

二、思考

3. 运用正弦定理可以解决哪两类斜三角形的问题?

4. 在$\triangle ABC$中,已知边a,b和角A时,三角形的解有几种情况?

三、网络构建

5. 画出本节知识的网络结构图.

典例剖析

题型1	利用正弦定理解三角形
思维点拨	利用正弦定理及三角形内角和定理求解

例1 根据下列条件,解$\triangle ABC$.

(1) 已知 $b=4,c=8,B=30^\circ$，求 C,A,a；

(2) 已知 $b=3,c=3\sqrt{3},B=30^\circ$，求 A 及 a；

(3) 已知 $b=6,c=9,B=45^\circ$，求 C,a,A.

[解题指导] 可利用正弦定理及三角形内角和定理直接求解.

解:(1) 由正弦定理得

$\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{8\sin 30^\circ}{4}=1$.

又因为 $30^\circ<C<150^\circ$，所以 $C=90^\circ$.

所以 $A=180^\circ-(B+C)=60^\circ$，

$a=\sqrt{c^2-b^2}=4\sqrt{3}$.

(2) 由正弦定理和已知条件得

$\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $c>b$，所以 $C>B$，

故 C 有两解(锐角或钝角).

① 若 $C=60^\circ$，则 $A=90^\circ$，于是 $a=6$；

② 若 $C=120^\circ$，则 $A=30^\circ$，于是 $a=3$.

所以 $A=90^\circ,a=6$ 或 $A=30^\circ,a=3$.

(3) $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{9\sin 45^\circ}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}>1$，

所以此题无解.

反思与升华 利用正弦定理解三角形有一定的技巧，解题时应细心审题、清楚分类，避免因方法不当而导致错误.

误区警示:解三角形时，对于已知两边及其中一边对角的问题，应根据题设分类讨论.

题型 2	利用正弦定理判断三角形形状
思维点拨	找出三角形中的边角关系是关键

例 2 在$\triangle ABC$中，已知$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，试判断三角形的形状.

[解题指导] 对三角形中的边角关系进行转换.

解:由已知得 $a^2[\sin(A+B)-\sin(A-B)]=b^2[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$，

即 $a^2\cdot 2\cos A\sin B=b^2\cdot 2\sin A\cos B$，

根据正弦定理得 $\sin^2 A\cos A\sin B=\sin^2 B\cdot\sin A\cos B$.

因为 $\sin A>0,\sin B>0$，

所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，

即 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

反思与升华 三角形的形状可按边分类，也可按角分类，将三角形中的边用角表示，也可将角用边表示，通过找出边角关系来判断三角形形状.

题型 3	解决与三角形有关的证明、计算问题
思维点拨	利用正弦定理及三角恒等变形对三角形的边角进行转换

例 3 在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，证明：$\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

[解题指导] 应用三角恒等变形及正弦定理证明.

证明:由正弦定理得 $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{2\sin^2 C}=\dfrac{-2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin^2 C}=\dfrac{\sin C\sin(A-B)}{\sin^2 C}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

反思与升华 证明三角形中的边角等式的主要依据是正弦定理及三角式的恒等变形，运用定理时，常将"边"与"角"进行相互转换.

归纳总结

1. 已知三角形两边及其中一边的对角，则解三角形时，有多少个解？

2. 三角公式在解三角形中有哪些应用？

3. 如何判定三角形的形状？

自我检测

A 组

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$中，下列等式总能成立的是 ( )

A. $a\cos C=c\cos A$　　B. $b\sin C=c\sin A$

C. $ab\sin C=bc\sin B$　　D. $a\sin C=c\sin A$

2. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{5},b=\sqrt{15},A=30^\circ$，则 ( )

A. $c=2\sqrt{5}$　　B. $c=\sqrt{5}$

C. $c=2\sqrt{5}$或$\sqrt{5}$　　D. 以上都不对

3. 不解三角形，判断下列命题，其中正确的是 ( )

A. $a=7,b=14,A=30^\circ$，有两解

B. $a=30,b=25,A=150^\circ$，有一解

C. $a=6,b=9,A=45^\circ$，有两解

D. $b=9,c=10,B=60^\circ$，无解

4. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则$\triangle ABC$是 ( )

A. 等腰直角三角形

B. 等边三角形

C. 顶角为120°的等腰三角形

D. 以上均不正确

二、填空题

5. 在$\triangle ABC$中，若 $b=2a\sin B$，则 $A=$______.

6. 在$\triangle ABC$中，若 $C=3B$，则 $\dfrac{c}{b}$ 的取值范围是______.

灵机一动

有错必纠

三、解答题

7. 在$\triangle ABC$中，已知$AB=10\sqrt{2}$，$A=45°$. 在BC边的长分别为20，$\frac{20\sqrt{3}}{3}$，5的情况下，求相应角C.

B 组

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2}{b^2}$，则$\triangle ABC$一定是　　（　　）

A. 直角三角形

B. 等腰或直角三角形

C. 不能确定

D. 等腰三角形

2. 在$\triangle ABC$中，已知$A>B$，则下列四个不等式中，不一定正确的是　　（　　）

A. $\sin A>\sin B$　　B. $\cos A<\cos B$

C. $\sin 2A>\sin 2B$　　D. $\cos 2A<\cos 2B$

3. 已知在$\triangle ABC$中，$B=30°$，$c=150$，$b=50\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$是　　（　　）

A. 等腰三角形或直角三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰直角三角形

4. 在$\triangle ABC$中，若$C=90°$，则$\frac{a+b}{c}=$　　（　　）

A. $\sqrt{2}\cos\frac{A+B}{2}$　　B. $\sqrt{2}\cos\frac{A-B}{2}$

C. $\sqrt{2}\sin\frac{A+B}{2}$　　D. $\sqrt{2}\sin\frac{A-B}{2}$

二、填空题

5. （2007年北京卷）在$\triangle ABC$中，若$\tan A=\frac{1}{3}$，$C=150°$，$BC=1$，则$AB=$________.

6. 已知$\triangle ABC$的三边分别为a,b,c，且$\cos A:\cos B=b:a$，则$\triangle ABC$是____________三角形.

三、解答题

7. （2007年福建卷）在$\triangle ABC$中，$\tan A=\frac{1}{4}$，$\tan B=\frac{3}{5}$.

（1）求角C的大小.

（2）若AB边的长为$\sqrt{17}$，求BC边的长.

探究拓展

$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$c=10$，又知$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，求$a,b$及$\triangle ABC$内切圆的半径.

视野拓展

正弦定理大家证

1. 正弦定理的证明

方法一　如图1-1-1所示，以$\triangle ABC$的顶点A为原点，边AC所在射线为x轴的正半轴建立直角坐标系. 我们知道，顶点B的坐标是$(c\cos A,c\sin A)$. 容易知道，AC边上的高BE就是B点的纵坐标$c\sin A$，于是$\triangle ABC$的面积

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

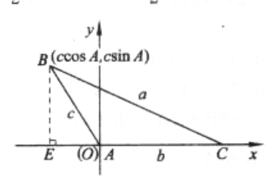


图1-1-1

同样可得$S_\triangle=\frac{1}{2}ca\sin B$，$S_\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$.

由此，我们得到关于任意三角形面积的公式：

$$\boxed{S_\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

也就是说，三角形的面积等于任意两边的长与

它们夹角的正弦的积的一半.

将等式

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

中被等号分开的式子都除以$\frac{1}{2}abc$,可得

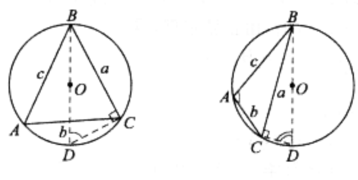
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k.$

由图 1-1-2 可知,$A=D$(当 $A<90°$时),或 $A=180°-D$(当 $A>90°$时),所以

$$k=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin D}=\frac{a}{\frac{a}{BD}}=BD=2R,$$

其中 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆的半径.



(1) (2)

图 1-1-2

由此,我们得到关于任意三角形边与角之间的关系的另一个重要定理:

正弦定理 在一个三角形中,各边的长和它所对角的正弦的比相等,并且都等于外接圆的直径,即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

如果$\triangle ABC$ 中有一个角是直角,例如 $C=90°$,这时 $\sin C=1$,由正弦定理可得 $\sin A=\frac{a}{c}$,$\sin B=\frac{b}{c}$,这和直角三角形中边与角之间的关系是一致的.

方法二 我们在初中就已会解直角三角形,也就是说,已会根据直角三角形中已知的边与角求出未知的边与角. 那么,如何来解斜三角形呢? 也就是如何根据斜三角形中已知的边与角求出未知的边与角呢? 为此,我们先来学习两个重要定理——正弦定理和余弦定理.

如图 1-1-3 所示,在 Rt$\triangle ABC$ 中,已知 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,则有 $\sin A=\frac{a}{c}$, $\sin B=\frac{b}{c}$, $\sin C=1$,即

$$c=\frac{a}{\sin A},\ c=\frac{b}{\sin B},\ c=\frac{c}{\sin C}.$$

故 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$

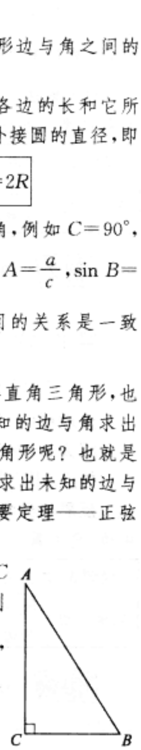
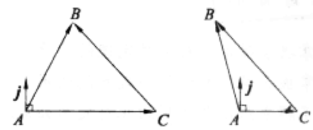


图 1-1-3

那么,在任意三角形中,这一关系式是否成立呢? 下面我们用向量来研究这个问题.

如图 1-1-4(1)所示,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,过点 A 作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于$\overrightarrow{AC}$,则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 $90°-A$,$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为 $90°-C$.



(1) (2)

图 1-1-4

由图 1-1-4(1)看到:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$

为了与图中有关角的三角函数建立联系,我们在上面向量等式的两边同取与向量 $\boldsymbol{j}$ 的数量积运算,得到

$\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}.$

由分配律可得

$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}.$

故$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AC}|\cos 90°+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos(90°-C)$

$=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos(90°-A)$,

故 $a\sin C=c\sin A$,

故$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$

同理,过点 C 作与$\overrightarrow{CB}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$,可得

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}.$

故$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$

当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时,不妨设 $A>90°$(如图 1-1-4(2)所示),过点 A 作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$,则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 $A-90°$,$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为 $90°-C$. 同样可证得

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$

这就是说,对于锐角三角形、直角三角形、钝角三角形来说,上面的关系式均成立. 因此,我们得到下面的定理:

正弦定理 在一个三角形中,各边的长和它所对角的正弦的比相等,即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

2. 正弦定理的应用

利用正弦定理,可以解决以下两类有关三角形的问题:

(1) 已知两角和任一边,求其他两边和一角;

(2) 已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角).

有错必纠

1.1.2 余弦定理和三角形的面积

学习目标

1. 掌握余弦定理及余弦定理的推导.
2. 掌握三角形的面积公式并能运用.
3. 了解余弦定理常用的几种变形公式.
4. 会利用余弦定理解决三角形及现实生活和生产中的实际问题.

自学指导

一、填空

1. 余弦定理：____.

用符号表示：____________________.

2. 三角形的面积公式：______________________________.

二、思考

3. 利用余弦定理，可以解决有关三角形的哪几个方面的问题？

4. 已知三角形的三边长，如何判断三角形形状？

三、网络构建

5. 画出本节知识的网络结构图.

典例剖析

题型1	解三角形
思维点拨	结合图像选用正弦定理和余弦定理解决

例1 $\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，求角A,C和边a.

[解题指导] 已知三角形的两边和一边的对角，要求另一边和其他的角，可首先由正弦定理求出角C，然后再求其他的边和角；亦可由余弦定理列出关于边长a的方程，首先求出边长a，再由正弦定理求角A,C.

解法1：由$b<c$，$B=30°$，$b>c\sin 30°=\frac{3}{2}\sqrt{3}$知，本题有两解.

由正弦定理，有

$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$C=60°$或$C=120°$.

当$C=60°$时，$A=90°$，$\triangle ABC$为直角三角形，由勾股定理得

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$；

当$C=120°$时，$A=30°$，$\triangle ABC$为等腰三角形，所以$a=3$.

解法2：由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

得$3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}a\times\cos 30°$，

即$a^2-9a+18=0$，所以$a=6$或$a=3$.

当$a=6$时，由正弦定理，得

$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{6}{3}\times\frac{1}{2}=1$，

所以$A=90°$，$C=60°$；

当$a=3$时，$A=30°$，$C=120°$.

反思与升华 比较两种解法，体会各自的优点，从而摸索出适合自己思维的解题规律和方法.

(1) 解法1直接运用正弦定理，求出$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，注意$C$有两解，不要漏掉其中一解.

(2) 解法2利用余弦定理，列出关于a的等量关系式建立方程，运用解方程的方法求出a边的长.

题型2	判断三角形的形状
思维点拨	运用正、余弦定理，将所给条件转化为边的关系或角的关系

例2 在$\triangle ABC$中，若$\sin A+\sin B=\sin C\cdot(\cos A+\cos B)$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解：由已知条件，根据正弦定理及余弦定理可得

$a+b=c\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$，

整理得$(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$.

因为$a+b\neq0$，所以$a^2+b^2=c^2$.

故$\triangle ABC$为以角C为直角的直角三角形.

反思与升华 正、余弦定理可以帮助进行三角形中边、角关系的互化.本题也可推出角C为$90°$.

题型3	三角形边角关系的化简和证明
思维点拨	统一化为三角函数，作三角变形；或统一化为边，作代数变形

例3 在$\triangle ABC$中，已知$a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$.

(1) 若$\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$，求$a,b,c$；

(2) 求$\triangle ABC$的最大角的弧度数.

[解题指导] 第(1)问，利用正弦定理可把小前提条件化为边的关系，再用大前提中的两个等式解

得；第(2)问，则需先判定哪个边是最大边，可以通过消元变换来比较.

解：(1) 由正弦定理，有

$\sin C:\sin A=c:a=4:\sqrt{13}$，

所以可设 $c=4k$，$a=\sqrt{13}k$.

由已知条件得 $a^2-a-2c=2b$，$2c-a-3=2b$，

故 $a^2-a-2c=2c-a-3$，

所以 $13k^2-\sqrt{13}k-8k=8k-\sqrt{13}k-3$，

即 $13k^2-16k+3=0$，

所以 $k=\frac{3}{13}$ 或 $k=1$.

因为当 $k=\frac{3}{13}$ 时，$b<0$，故舍去，

所以 $k=1$，

所以 $a=\sqrt{13}$，$b=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$，$c=4$.

(2) 由已知二式消去 $2b$，得

$c=\frac{a^2+3}{4}$，

代入 $a^2-a-2b-2c=0$ 中，得

$b=\frac{1}{4}(a^2-2a-3)=\frac{1}{4}(a-3)(a+1)$，

因为 $a,b,c>0$，所以 $a>3$.

又 $b-c=\frac{1}{2}(-a-3)<0$，

$c-a=\frac{a^2+3}{4}-a=\frac{1}{4}(a-3)(a-1)>0$，

所以 $b<c$，$a<c$，故 c 为最大边，

所以角 C 最大.

因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$=\frac{a^2+\frac{(-a-3)(a^2-a)}{4}}{2a\cdot\frac{1}{4}(a-3)(a+1)}$$

$$=\frac{4a^2-(a+3)a(a-1)}{2a(a-3)(a+1)}$$

$$=\frac{4a-(a^2+2a-3)}{2(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2}$$，

而 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

反思与升华 在 $\triangle ABC$ 中，总有大角对大边的关系存在，欲知 $\triangle ABC$ 中哪个角(边)是最大角(边)或最小角(边)，只需找到相应的最大边(角)或最小边(角). 具体方法应根据已知条件去选定.

例 4 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1，$\tan B=\frac{1}{2}$，$\tan C=-2$，求 $\triangle ABC$ 的三边及 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径.

[解题指导] $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，由已知 $\tan B=\frac{1}{2}$，$\tan C=-2$ 可求出 $\sin B$，$\sin C$，而 b 可由正弦定理用 a 与 $\sin B$ 表示. 这样可列出一个关于 a 的方程，从而求得 a 值，其他的量即可解出.

解：由 $\tan C=-2$，知 C 为钝角，于是得

$\cos C=-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 C}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由 $\tan B=\frac{1}{2}$，知 B 为锐角，于是得

$\cos B=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 B}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故 $\sin A=\sin[180^\circ-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{3}{5}$.

又因为 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\ \frac{\sin B\sin C}{\sin A}$，

所以 $\frac{1}{2}a^2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\div\frac{3}{5}\right)=1$，

得 $a^2=3$，

所以 $a=\sqrt{3}$.

所以 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

再由 $\frac{a}{\sin A}=2R$，得 $\triangle ABC$ 外接圆直径

$2R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

反思与升华 本题是一道解三角形的综合题，需要综合考虑已知条件与所求量的关系，结合三角函数的有关公式探求已知量与未知量之间的"桥梁"，寻求解决问题的思路.

归纳总结

1. 在判断三角形的形状特征时，需联合应用正弦定理和余弦定理，此时应注意哪些策略的应用？
2. 三角形中边角关系的转化通过什么来完成？
3. 解三角形问题时，常用的固定关系有哪些？

自我检测

A 组

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=\sqrt{3}$，$c=2$，$A=30^\circ$，则 ( )

A. $a=1$　　B. $a=2$

C. $a=3$　　D. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (2006 年辽宁卷)已知等腰 $\triangle ABC$ 的腰为底的 2 倍，则顶角 A 的正切值是 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{7}$

灵机一动

有错必纠

3. 已知$\triangle ABC$的三边分别是2,3,4,则此三角形是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

4. 在$\triangle ABC$中,已知$A=60^\circ$,$b=1$,其面积为$\sqrt{3}$,则$\frac{a}{\sin A}$的值为（　　）

A. $\frac{8\sqrt{3}}{81}$　　B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{7}$

二、填空题

5. 在$\triangle ABC$中,若$a^2+ab=c^2-b^2$,则$C=$______.

6. (2005年上海卷)在$\triangle ABC$中,若$A=120^\circ$,$AB=5$,$BC=7$,则$\triangle ABC$的面积$S=$________.

三、解答题

7. 在$\triangle ABC$中,已知$b=5$,$c=5\sqrt{3}$,$A=30^\circ$,求a,B,C及$\triangle ABC$的面积.

B组

一、选择题

1. 已知a,b,c是$\triangle ABC$三边之长,若满足等式$(a+b-c)(a+b+c)=ab$,则角C的大小为（　　）

A. 60°　　B. 90°

C. 120°　　D. 150°

2. (2006年山东卷)在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$则$c=$（　　）

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}$

3. 已知$\triangle ABC$中,$AB=\sqrt{3}$,$AC=1$,且$B=30^\circ$,则$\triangle ABC$的面积等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 下列关于$\triangle ABC$的结论中,正确的个数是（　　）

① 若$a^2>b^2+c^2$,则$\triangle ABC$为钝角三角形;

② 若$a^2=b^2+c^2+bc$,则$A=60^\circ$;

③ 若$a^2+b^2>c^2$,则$\triangle ABC$为锐角三角形;

④ 若$A:B:C=1:2:3$,则$a:b:c=1:2:3$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

二、填空题

5. 在$\triangle ABC$中,$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,则$\sin A=$________.

6. 在$\triangle ABC$中,已知$a=3\sqrt{2}$,$\cos C=\frac{1}{3}$,$S_{\triangle ABC}=4\sqrt{3}$,则$b=$________.

三、解答题

7. 已知圆O的半径为R,它的内接三角形ABC中$2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$成立,求$\triangle ABC$的面积$S$的最大值.

探究拓展

设a,b,c分别是$\triangle ABC$中角A,B,C的对边,$\triangle ABC$的外接圆半径为1,且$(\sin B+\sin C+\sin A)\cdot(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$,$b,c$是方程$x^2-3x+4\cos A=0$的两根$(b>c)$.

(1) 求角A的度数及边a,b,c的值;

(2) 判定$\triangle ABC$的形状,并求其内切圆的半径.

视野拓展

灵机一动

余弦定理大家证

1. 余弦定理的证明

方法一 以$\triangle ABC$的顶点A为原点，射线AC为x轴的正半轴，建立直角坐标系(如图1-1-5所示).这时，顶点B可看做角A终边上的一个点，它到原点的距离$r=c$.设点B的坐标为(x,y)，由三角函数的定义可知，不论角A是锐角、钝角还是直角，都有$\frac{x}{c}=\cos A$，$\frac{y}{c}=\sin A$，所以$x=c\cos A$，$y=c\sin A$，即点B的坐标是$(c\cos A, c\sin A)$.又点C的坐标是$(b,0)$，根据两点间的距离公式，可得

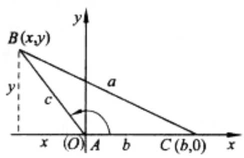


图1-1-5

$a=BC=\sqrt{(b-c\cos A)^2+(-c\sin A)^2}$，

两边平方，得

$a^2=(b-c\cos A)^2+(-c\sin A)^2$.

化简等式右边：

$(b-c\cos A)^2+(-c\sin A)^2$

$=b^2-2bc\cos A+c^2\cos^2 A+c^2\sin^2 A$

$=b^2+c^2(\sin^2 A+\cos^2 A)-2bc\cos A$

$=b^2+c^2-2bc\cos A$，

于是

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. ①

如果以$\triangle ABC$的顶点B或顶点C为原点建立直角坐标系，如图1-1-6所示，同样可证明

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ②

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. ③

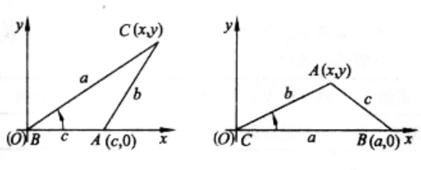


图1-1-6

由此，我们得到关于任意三角形的三条边与一个角之间关系的重要定理：

余弦定理 三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.即

$$\boxed{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}}$$

如果$\triangle ABC$中有一个角是直角，例如$C=90°$，则$\cos C=0$，由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2$，这就是勾股定理.由此可见，余弦定理是勾股定理的推广，而勾股定理是余弦定理的特例.

由式①、②、③可得

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}}$$

方法二 我们知道，对于一个直角三角形来说，它的斜边的平方等于两条直角边的平方和.那么对于任意一个三角形来说，是否也可以根据一个角和此角的两边，求出此角的对边呢？

下面我们用向量来研究这个问题.

如图1-1-7所示，在$\triangle ABC$中，AB，BC，CA的长分别为c，a，b.

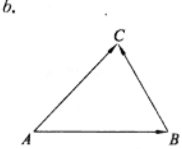


图1-1-7

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos(180°-B)+\overrightarrow{BC}^2$

$=c^2-2ac\cos B+a^2$.

即$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. ④

同理可证

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， ⑤

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. ⑥

由此又得到如下定理：

余弦定理 三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.即

$$\boxed{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}}$$

在余弦定理中，令$C=90°$，则$\cos C=0$，所以$c^2=a^2+b^2$.由此可见，余弦定理是勾股定理的推广.

由式④、⑤、⑥可得

有错必纠

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

2. 余弦定理的应用

由斜三角形六个元素(三条边和三个角)中的三个元素(至少有一个是边),求其余三个未知元素(可能有两解、一解或无解)的过程,叫做解斜三角形.

利用余弦定理可以解决以下两类斜三角形的问题：

(1) 已知三边,求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角,求第三边和其他两个角.

1.2 应用举例

学习目标

1. 能熟练运用正、余弦定理及相关公式解决三角形的有关问题.

2. 能正确理解如仰角、俯角、方位角、视角及坡度、经纬度等有关名词和术语的确切含义.

自学指导

一、填空

1. 正弦定理及其变式结论:____.

2. 仰角、俯角、方位角、视角的含义分别是____.

二、思考

3. 解斜三角形的知识主要用于解决哪两大类型问题?

4. 判断三角形形状时经常用到边角的互化,主要采取哪些方法?

三、网络构建

5. 画出本节知识的网络结构图.

典例剖析

题型 1	无法从底部直接测得高度的物体高度的测量
思维点拨	依据题意正确作出图形,是解题的关键

例 1 如图 1-2-1 所示,在山顶铁塔上 B 处测得地面上一点 A 的俯角 $\alpha=54°30'$,在塔底 C 处测得 A 处的俯角 $\beta=50°1'$,已知铁塔 BC 部分的高为 27.3 m,求山高 CD.(精确到 1 m)

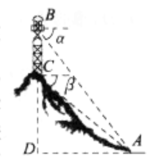


图 1-2-1

[解题指导] 本题是生活中经常遇到实际问题模型,是本书的重点.

解:在$\triangle ABC$中,$\angle BCA=90°+\beta$,$\angle ABC=90°-\alpha$,$\angle BAC=\alpha-\beta$,$\angle BAD=\alpha$,由正弦定理,得

$$\frac{BC}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{AB}{\sin(90°+\beta)},$$

所以 $AB=\dfrac{BC\sin(90°+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{BC\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中,$BD=AB\sin\angle BAD=\dfrac{BC\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$.

将数据代入上式,得 $BD=\dfrac{27.3\cos 50°1'\sin 54°30'}{\sin(54°30'-50°1')}\approx 182(\text{m})$.

所以 $CD=BD-BC\approx 182-27.3\approx 155(\text{m})$.

反思与升华 正确构造图形,合理选用三角形,运用正弦定理解决问题.

误区警示:将所求量 CD 放在$\triangle ABD$中研究,注意不能选$\triangle ADC$.

题型 2	测量地面上两个都不能到达的点间的距离
思维点拨	合理选择观测点,构造图形

例 2 如图 1-2-2 所示,隔河看两目标 A 和 B,但不能到达.在岸边选取相距 a 的 C,D 两点,测得$\angle ACB=\alpha$,$\angle BCD=\beta$,$\angle ADC=\gamma$,$\angle ADB=\delta$(点 A,B,C,D 在同一平面内).求两目标 A,B 之间的距离.

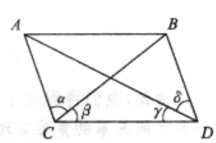


图 1-2-2