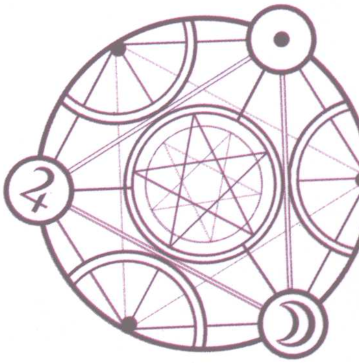
普通高等教育“十·五”国家级规划教材

数理逻辑

邢滔滔 著

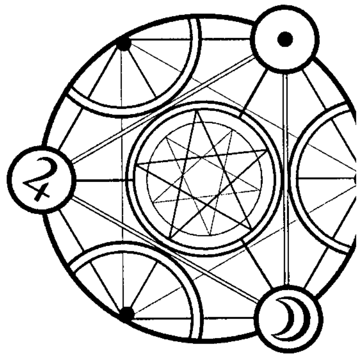
本书脱胎于北京大学哲学系本科『数理逻辑』课程的讲义，针对初学逻辑的学生，介绍一阶逻辑的最基本的知识和技术，包括一阶语言的语形和语义、一阶推演系统、一阶逻辑的完全性定理等。



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数理逻辑

邢滔滔 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑/邢滔滔著.—北京:北京大学出版社,2008.8
(博雅大学堂·哲学)
ISBN 978-7-301-11255-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.邢…　Ⅲ.数理逻辑-高等学校-教材　Ⅳ.O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131880 号

书　　　名:数理逻辑
著作责任者:邢滔滔　著
责 任 编 辑:吴　敏
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-11255-7/B·0385
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn　电子邮箱:pkuwsz@yahoo.com.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752025
出版部 62754962
印　刷　者:三河市新世纪印务有限公司
经　销　者:新华书店
650mm×980mm　16 开本　17.5 印张　282 千字
2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　　价:28.00 元

前 言

本书脱胎于北京大学哲学系本科“数理逻辑”课程的讲义，书名从课名。原讲义在实际使用中，经过了多次删改与修补，最后成书时，我们做了进一步的加工，重写了若干部分，增加了一些内容，以求能够满足更大范围的读者的需要。

下面就本书的内容及编写方式做几点说明。

第一，这是一本入门教材，针对逻辑学的初学者，尤其是初学逻辑的学生，而不要求读者有数学方面的预备知识。在内容方面，本书只介绍一阶逻辑的最基本的知识和技术，包括一阶语言的语形和语义、一阶推演系统、一阶逻辑的完全性定理等。这些知识和技术已经成为逻辑入门的必要装备，也因此构成目前大学教育的一个基础部分，在哲学、语言学等文科专业和数学、计算机科学等理科专业里，普遍列为必修或选修的内容。当然，按照一种比较理想的要求，大学生对逻辑的了解，还应该包括更深层次的内容，如适当部分的模型论、基本的不可判定性结果、哥德尔不完全性定理的证明等。但这些更深层次的内容适合于在更加专门的课程中介绍。按照许多学校的安排，在逻辑的入门课之后，还有相应的进深课程，供有兴趣的同学选修。我们在课程设置上，也采取了这个策略。在这样的安排之下，本书的内容，对应于大学本科的第一门“数理逻辑”或“符号逻辑”课程。

第二，根据我们的经验，本书的主要部分，如果安排得紧凑一些，可以构成一学期的教学内容，以每周 4 学时的进度讲述完毕。如果使用者面临不同的情况和不同的需要，可以有所取舍，而不必按部就班地涵括全部章节。比如，第一章绪论可以做不同程度的减缩；对于已经具备素朴集合论基础知识的读者，第二章可以省略；第三章关于项和公式的读法唯一性的部分，有些教师也许认为不必讲述严格的证明，只要提一下结果即可；另外，如果只注重经典逻辑，则第五章的极小逻辑和直觉主义逻辑部分，就不需独立讨论，而它们与经典逻辑的关系，以及第六章中对于直觉主义逻辑完全性的证明，都可省略。这样省下来的时间，可以加在某些重点章

节上，也可以用于弥补一些薄弱环节。比如，一些教师愿意在语义学部分花更多的时间，或认为自然语言与形式语言之间的翻译方面，需要单独提出来，进一步加强练习。

第三，如前所述，本书除经典逻辑外也介绍了一点非经典逻辑，重点是直觉主义逻辑。这是出于以下的考虑：直觉主义思想在数学哲学和语言哲学中占有重要地位，它的方法和技术在逻辑的一些分支及其实际应用中也有广泛的价值，因此，学生和一般读者都有了解直觉主义逻辑的需要。另外，直觉主义逻辑既然可以处理为经典逻辑的一个子系统，那么对于它的介绍，就不需要另做铺陈，而可以在介绍经典逻辑的进程中顺带展开，相比较而进行。这或许也有助于加深对经典逻辑的了解。

第四，许多通行的逻辑教材，把命题逻辑与谓词逻辑分开处理，先讲前者，再过渡到后者。这个顺序有很多好处，既突出了命题逻辑，又符合由简入繁、循序渐进的教学原则。但本书采取了另一种“套路”，即把命题逻辑“嵌入”一阶逻辑里，起头便提出整个一阶语言，而不单独介绍命题逻辑语言，在讨论联结词的语义解释时再借助公式的“布尔形式”引出命题逻辑语言，到推演系统一章才用联结词规则自然地定义相对独立的命题逻辑推演。我们之所以这样做，主要是考虑到对于文科同学而言，一开始就与命题逻辑这样一个代数系统打交道，多少有脱离语言直观的感觉，反而如果是从谓词、量词等入手，则较容易维持一种“实在感”和学习的动机。另外，这种“笼统”的做法也许强调了一阶语言和一阶逻辑的整体性。

第五，在推演系统部分，我们选择了自然推演，而没有介绍公理系统。这也是为了在最大程度上保持读者在日常推理中积累的经验和直观。另一个原因是，自然推演传达了这样一种理解：逻辑是推演规则（而数学的或其他的理论的公理都是非逻辑的）。这个理解符合某种传统的看法，也切合逻辑在数学等领域的实际应用。自然推演可以有多种形式，我们采取的是较为传统的 Gentzen 树形推演。这种形式，与其他形式比较，写起来或许稍麻烦，但每一步的前提和结论的关系一目了然，是各个引入或消去规则的最直观的图示，理论上既优美，使用起来也并不格外困难。

最后，整体而言，本书在介绍基础知识的同时，强调了几种基本的技术和方法，包括语形对象（项、公式、推演等）的归纳定义以及由此而来的归纳证明，一致公式集的极大扩张以及建立项结构的自然的方法（Henkin

方法)等。对于这些抽象的知识与方法,我们试图在不失精确性的前提下,尽量做相对直观的讨论,以求明确其背后的思想,不使读者迷失在技术的细节中。另外,本书的习题编排在各个段落里,而不是各章的末尾。它们是相关内容的延续:有些习题,是对前面内容的直接补充;还有些习题,本身就是新的内容,若是跳过,便影响对后面段落的理解。这种编排,是为了"迫使"读者在阅读中动手做题。逻辑的学习,与数学的学习一样,只有通过练习才能加深对于相关概念的理解。

北大哲学系本科2003、2004和2005级的同学使用这本讲义修习了"数理逻辑"课程,并对讲义的编写慷慨地贡献了自己的问题和意见。刘壮虎、周北海和叶峰等教研室同事审阅了本书的初稿,订正了一些不妥之处。北大出版社的吴敏耐心地检查、修正和加工了全书的文字和符号。编写者对他们致以衷心的谢意。本书的编写,还受到教育部"十五"国家级规划教材项目的资助,在此一并致谢。

邢滔滔

2007年9月

目　　录

第一章
绪论:从直观到形式

逻辑的所有应用加在一起,都无法与宝贵的纯粹逻辑理论本身相比。当你登高望远,一览这门科学的全貌,就会看到,我们眼下享有的逻辑理论,乃是理性视野的极致,天与地都是为这理性而造。

C. S. Peirce

逻辑是对于直观的一种形式透视。

S. Lesniewski

1 从"矛盾"说起

两千多年前,韩非讲过这样一个故事:

> 楚人有鬻盾与矛者,誉之曰:"吾盾之坚,莫能陷也。"又誉其矛曰:"吾矛之利,于物无不陷也。"或曰:"以子之矛,陷子之盾,何如?"其人弗能应也。(《韩非子·难一》)

为什么"其人弗能应也"?因为"夫不可陷之盾,与无不陷之矛,不可同世而立"。换句话说,那楚人的话同时导致了"这支矛能刺破这张盾"和"它不能刺破这张盾"(或"这张盾不能被刺破"和"这张盾能被刺破")的结论,而这一对"矛盾"句子不能同时成立。感谢古人给我们留下了"矛盾"这个生动的词语,但是,除了这一对特殊句子,一般而言矛盾是什么?矛盾到底为什么不能成立?矛盾的句子不违反语法,但它显然违反另一种法则。这是什么样的法则呢?对这样的问题,我们的古人总体来

说没有表示出多大的兴趣。[1] 毕竟,这种问题看起来跟实际生活没有太大的关系。我们能够看出那个楚人的话是矛盾,凭着直觉,也能在许多重要的场合避免矛盾,这还不够吗?

然而,从古希腊开始的西方思想家却在兴致勃勃地思考这种问题。他们愿意对很多事情刨根问底,即使这些东西并不实用。假如让古希腊的哲学家接着韩非的问题解释下去,他们大致会说:第一,同时肯定和否定同一个主张就是矛盾("矛盾"一词,按他们的话来说,相当于"不可能"或"荒谬"),而不管这个主张是什么。第二,我们有一条普遍的形而上学原则,即所有的矛盾都不可能为真。如亚里士多德所说:"同一个东西同时且在同一方面既属于又不属于同一个东西,这是不可能的"(《形而上学》,1005b)。第三,这条"(不)矛盾律"同时是我们思想的"最确定的推理原则"或规则,这条规则说:如果你从一个主张推出了矛盾,你就要否定这个主张。后来的西方人把这条思想规则称为 reductio ad absurdum(以下简称 RAA)。

追问这类"无用"的问题有什么意义呢? 现在一些历史学家认为,RAA 提供的间接证明方法,在西方思想史上起了十分关键的作用。他们甚至说,这条规则或方法,导致了整个演绎科学的产生。[2] 比如,上古的希腊数学,使用经验的方法,依赖视觉的形象(如人们用黑白石子代表奇偶数来做算术)。当 RAA 在公元前 5 世纪左右开始应用到数学中时,数学就逐渐脱离了石子和眼睛,发展出单纯诉诸理智的抽象证明方法。经验方法只能显示一些特例,抽象证明才能建立全称命题。[3] 构成一个理论的核心的,是一些全称命题,一旦有了证明全称命题的严格方法,古希腊人从东方学来的实用测量术,就逐渐演变成了欧几里得严格的公理系统,而这是演绎科学的不朽典范。如今许多人认为,中国古代缺乏演绎科学的方法,这是我们没有发展出西方意义上的现代科学的重要原因之一。

① 先秦的名家、辩者与后期墨家等的确深人思考过这类问题,但他们的作品传世既少,在后来的两千年里又未受到重视,虽然百余年来开始得到研究,但如今仍然是聚讼纷纭的疑案。

② 参考 Arpad Szabo (1964)。

③ 想象一下,你当然不能用摆石子来直接证明"任何多个(而不只是某几个具体的)偶数的和是偶数"这个全称命题,因为你没有无穷多石子;即使有,你也摆不完。但是,RAA 可以帮助你间接地证明这个定理:假设这命题为假,然后你推出矛盾,根据 RAA,你就要否定那假设,从而证明了原命题。这个证明不再诉诸视觉等经验因素,因此是抽象的。

诚然，古代中国人（甚至所有人）实际思考起来，也不言而喻地“默契”于 RAA 或类似的规则，但是，对于什么样的普遍规则制约着我们的思考这个问题，我们的先人虽不是“其人弗能应也”，却没有提供像古希腊人那样系统与清晰的答案。回不回答或如何回答这个问题，也许不影响或不严重影响实际的思考，但严重影响了人们对于自己的思想结构的理论认识。当爱利亚的哲学家开始思考为什么“是”不可能不是，也不可能既是又不是时，当毕达哥拉斯前后的数学家开始使用 RAA 证明全称数学定理时，其中孕育的对于抽象概念的关注以及处理抽象概念的思想方法，的确为演绎科学和思辨哲学开辟了道路，为人类的“认识自己”迈出了一大步。从对于自然的玄想到亚里士多德的形而上学，从实际测量的经验方法到欧几里得的几何学，这种巨大的发展大概不能完全归功于几个思想规则的确立，但如果没有对于思想方法的深刻反思，这发展根本不可想象。什么是矛盾？为什么矛盾不可接受？上面说的“推出”是什么意思？除了 RAA，还有什么规则制约着我们的推理？亚里士多德（和希腊化时期的一些学者）把古希腊人的答案总结成一个理论——逻辑，或关于演绎推理的学说。

两千多年以来，西方逻辑经历了几个发展阶段。从亚里士多德到中世纪甚至到近代一些时候的理论可以称为传统逻辑，主要借助于自然语言，特别是对于自然语言的语法分析来理解命题和推理。17 世纪，哲学家、数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz）鉴于自然语言的模糊和歧义，提出建立一种普遍的人工语言（他称为“通用文字”），使用数学那样精确的方法研究和表达概念之间的关系，使这种语言中的推理成为严格的计算。后来，数学家布尔（George Boole）设计了这样的一个命题逻辑演算，把复合命题间的推理组织为一个代数系统。19 世纪的数学家、哲学家弗雷格（Gottlob Frege）建立了他称为“概念文字”的符号语言，发明出一种全新的谓词和量词分析方法，构造了第一个谓词逻辑的演算系统。其后通过罗素（Bertrand Russell）、希尔伯特（David Hilbert）、甘岑（Gerhard Gentzen）、哥德尔（Kurt Gödel）和塔斯基（Alfred Tarski）等人的工作，逻辑语言的语形和语义诸问题逐渐得到澄清，关于逻辑系统的元逻辑理论也得到深入的研究。这条近代以来的线索标志着在传统逻辑的基础上，数理逻辑或现代逻辑的产生和发展。一言以蔽之，西方逻辑从亚里士多德发展至今，变得愈来愈精致、愈来愈严格、愈来愈完备。如今广义的逻辑学科

不仅研究推理,还研究符号系统本身的性质,它的解释,它在数学、哲学、计算机科学以及语言学中的应用等等。

本书介绍数理逻辑的基本思想和技术,着重介绍它对于推理的研究,考察如何建立一个完全的形式推理系统。这是现代逻辑的第一步。我们会看到,其中的核心思想仍然沿袭了古希腊的传统,但处理技术和结果远远超越了传统逻辑。在系统展开逻辑理论之前,我们在本章中先解释一系列逻辑概念的直观背景,从中引申出本书的主题,说明这个主题的思想动机和其中主要部分的起承转合。本章涉及的某些逻辑概念,只是在直观的层面上提出和讨论,到后面的章节我们才能逐渐得到它们的严格定义。既然只是一个鸟瞰式图景,读者就不必在这里强求细节的清晰。但在探究后面的细节时返回来参照本章,或许是有益的。我们的策略是"先见森林,后见树木",以求在考察一棵棵树木时胸中有全局的森林,在推敲形式技术时眼里有直观的图景,而不致迷失在枝节的问题中。

2 直观上的推理

逻辑研究推理。让我们先解释推理这个概念。我们都很熟悉作为思想活动的推理,不但用它肯定或否定某个日常的看法,更用它来建立或反驳某个严肃的观点。在某种意义上,推理像是与生俱来的技能,不研究推理的人,对什么是正确的推理也有某种实用意义上的充分直觉。本章的讨论尤其借重这种直觉。先看两个推理的例子:

1) 没有矛能刺破这张盾。所以,这支矛不能刺破这张盾。

2) 如果这支矛能刺破所有的盾,则这支矛能刺破这张盾。这支矛不能刺破这张盾。所以,并非这支矛能刺破所有的盾。

二者的每一个都是独立的推理。从语言的层次看来,一个推理由(有限多的)句子组成,其中一些句子"推出"某个句子。这个推出关系用"所以"这个词表达。

在1)中,"没有矛能刺破这张盾"推出"这支矛不能刺破这张盾"。

在2)中,"如果这支矛能刺破所有的盾,则这支矛能刺破这张盾"和"这支矛不能刺破这张盾"两个句子推出"并非这支矛能刺破所有的盾"。

这些是什么句子呢?是描述某种情形的句子,而不是提出疑问,发布

命令或表达感情的句子。以下凡谈到句子,皆指这种用于声言或陈述的句子,它的特点是有真假:如果确有它所描述的那种情形,则它为真,否则为假。比如,当这支矛真的能刺破所有的盾时,句子"这支矛能刺破所有的盾"为真,否则为假。

但是,简单地说推理由句子组成,会遇到一些问题。比如,考虑:

1′) No spear can penetrate this shield. Therefore, this spear cannot penetrate this shield.

如果把句子理解成物理的东西,则1)和1′)由不同的句子组成,似乎应该是不同的推理。但如果"这支矛"和"this spear","这张盾"和"this shield"在我们的语境里指同一个东西,那么1)和1′)应当是同一个推理,因为相应的各句描述相同的情况,或者说表达相同的意义。再如,即使在同一个语言中,不同的句子"没有矛能刺破这张盾"和"所有的矛都不能刺破这张盾"显然也表达相同的意义。也许你有一种理论,不把笔画或声音作为句子本质的东西,而可以把比如1)和1′)中对应的句子看成相同的。即使如此,也有哲学家论证道,在相应的语言还未存在时,像"2 + 3 = 5"这样的句子(如今)所表达的意义(那时)也是存在的,而推理所关心的,正是这个抽象的意义。

我们把句子的这种意义,或表达在句子之中的思想称为**命题**。命题由相应的句子表达。不同的句子可以表达相同的命题,用其中哪个句子来表达这个命题,无关乎推理。显然,1)和1′)由相同的命题组成,而且命题之间的关系相同,的确是同一个推理,语言层次上的差别完全可以忽略。所以,我们倾向于说推理由命题,而不是由句子组成。推理虽然用句子来表达,但它实际上是命题之间的某种关系。命题有**真假**,它符合于相关的情形时就是真的,否则是假的;或者,表达它的句子为真时,它为真,否则为假。①

于是,推理是一组命题,其中之一(称为**结论**)是从其他的(全部或部

---

① 命题这种抽象对象到底存在与否,是哲学家们仍然在争论的问题。较典型的反对意见认为,我们没有适当的标准决定两个"命题"是否同一,因此,命题在本体论上没有存在的资格。我们在这里谈论命题,当然假设命题是存在的。但是,这并不表明逻辑学的建立,必须依赖某种特定的哲学立场。不管有没有命题,我们都可以采取某些逻辑学家喜欢的做法,只讲句子,不说命题(这样处理起来麻烦一些)。后面要谈到的概念、性质、关系等,也有类似的问题。

分）命题（称为**前提**）推出的，而这个“推出”关系，表现为某种结构。

比如，上面那些推理，都只有一步，它们是基本的推理，其结构用图式表达为：

$$\frac{A_1\ A_2 \cdots\ A_n}{B} \quad (n \geqslant 0)$$

其中 $A_1, \cdots, A_n$ 是前提，B 是结论，横线——表示从前提到结论的推出关系。例如，推理 1）可表达为：

$$\frac{\text{没有矛能刺破这张盾。}(A_1)}{\text{这支矛不能刺破这张盾。}(B)}$$

推理 2）可表达为：

$$\frac{\begin{matrix}\text{如果这支矛能刺破所有的盾，} & \text{这支矛不能刺破这张盾。} \\ \text{则这支矛能刺破这张盾。}(A_1) & (A_2)\end{matrix}}{\text{并非这支矛能刺破所有的盾。}(B)}$$

一般而言，为了得到一个结论，我们往往需要多次运用基本的推理。这时候前面基本推理的结论，要充当后面基本推理的前提。这样连串起来，最后组合成一个较复杂的推理。例如，上述 1）、2）两个基本推理就组成如下的树形图表达的推理：

$$\frac{\begin{matrix}\text{如果这支矛能刺破所有的盾，} \\ \text{则这支矛能刺破这张盾。}(A_2)\end{matrix} \quad \dfrac{\text{没有矛能刺破这张盾。}(A_1)}{\text{这支矛不能刺破这张盾。}(B_1)}}{\text{并非这支矛能刺破所有的盾。}(B_2)}$$

它的前提是 A_1 和 A_2，结论是 B_2。其中的 B_1 既是 A_1 的结论，又是 B_2 的前提（之一），但不是整个推理的前提或结论。在这种树形图中，上面没有横线的（叶）是整个推理的前提；下面没有横线的（根），是整个推理的结论；上下都有横线的，是中间步骤。人们有时称这种复合的推理为论证或证明。但我们这里不做名词上的区分。不管是基本的还是复合的，我们都称推理。所有推理的结构都可以像上面一样表达为由一些基本“树”组成的“树”。

当然，在实际的谈话和著述中表达出来的推理，不必沿循这个格式。有时我们把结论表述在前提的前面，有时我们省略某个明显的前提甚至结论，有时我们不用“所以”这个词（甚至不用任何词）来表达推出关系。但任何方式表述的推理，都可以像上面这样“标准化”：找到它的所有前提和唯一的结论，明确所有的中间步骤，把它们的关系表述为上面那样的树形图。我们考察一个推理时，为清楚明白起见，经常要把它标准化。

3 正确推理

逻辑研究的一个目的，是区别正确的推理与不正确的“推理”。首先需要说明，这里所谓正确的推理，不是说推理的前提为真，也不是说它的结论为真。前提和结论本身是真是假，或者你对它们有什么信念、感觉或体察，都不是逻辑所关心的问题。一个推理是正确的，从直观上讲，意味着一旦你（或其他任何人）接受了它的前提，就必须接受它的结论。因此，一个正确的推理，说的是它的前提和结论之间有某种确定的关系。虽然正确的推理不一定都能说服你（你可能不接受它的前提），但你显然应该只让正确的推理说服。

那么，是什么东西保证了一个推理是正确的呢？凭着我们的某种“逻辑直觉”，我们就可看出上面的1）、2）都是正确的推理，而且，下面这个“推理”：

3） 如果这支矛能刺破所有的盾，则这支矛能刺破这张盾。　　并非这支矛能刺破所有的盾。

——————————————————

这支矛不能刺破这张盾。

是错误的。可是，我们的确有时候在推理上犯错；比如，我们可能一厢情愿地使用了某个错误的“规则”，或者像那个卖矛和盾的楚人一样，自己的某个说法推出矛盾了，还是茫然无知。所以，即使为实用的目的，我们也不应仅仅依赖直觉。更重要的是，我们需要对所有推理的正确与否有一整套清晰明白的把握。直觉当然不是这里的可靠标准，我们因而有必要探讨判断推理对错的严格的理论标准。

逻辑学家大体上用两种标准来确定一个推理是否正确。第一种是从语形上来考虑，就是说，考虑组成推理的命题的逻辑形态，确定从前提到

结论的哪些“变形”是可以接受的,哪些是不能接受的。这就需要某种类似语法的规则,来规定正确的变形,排除错误的。一旦确立了这些规则,一个推理是否正确,就取决于它是否合乎有关的规则。第二种是从语义上考虑,即从前提和结论的真假方面考虑。一个推理在这个意义上正确,意味着不可能它的前提(都)真而结论假。按逻辑的术语,这称为推理的有效性。让我们稍微细致一些讨论一下这两种标准。

3.1 合规则性

为什么1)是正确的推理?你大概会说,这再明显不过了:既然没有矛能刺破这张盾,就是说,所有的矛都不能刺破这张盾,那么这支矛自然不能例外。按同样的道理,所有的人都会推理,(而韩非是人),所以韩非也会推理;一切东西都会变化,(我眼前的桌子是一样东西),所以我眼前的桌子也会变化;……这些都是正确的推理。如此看来,1)之所以正确,跟其中的命题描述什么情形,跟矛和盾有什么性质等等实质性的东西无关,而只跟上面这些推理共同具有的某种形式结构有关。你于是总结出一个“套路”,它说的是,所有具有如下形式的推理都是正确的基本推理:

4) 所有这样的都是那样的。某某是这样的。

某某是那样的。

这就是一个推理规则。一般而言,一个**推理规则**首先明确一个基本推理的形式,然后规定:具有这种形式的推理都是合乎此规则的。我们的推理当然不止需要一个规则。若干推理规则组成一个逻辑系统。一个推理的每一步(其中的每个基本推理)如果都合乎这个系统中的某个规则,则称这个推理在这个系统中是**合规则的**,否则称它在其中不合规则。一个逻辑系统采取的推理规则,只能直接或间接地肯定某些推理形式,未被它肯定的,便是这个理论不接受的形式。因此,对于一个逻辑系统而言,一个推理是正确的,当且仅当它在这个系统中是合规则的。我们为了方便,有时把推理规则直接表述为它所肯定的推理形式。

但是,究竟什么是一个**推理形式**呢?我们从上例看到,正如推理由命题组成,推理形式也是由**命题形式**组成的,而命题形式是由相应的命题表达式通过删除其中一些“有实义的”部分(即容许这些部分用其他的同类语言单位替换)构成的。比如,我们可以把命题

所有的人都会思考

中的“人”（语法上的主语部分）和“会思考”（语法上的谓语部分）删除，留下空位，或代之以“这样的”、“那样的”等没有明确指称的代词，而得到这个命题的某种形式：

所有这样的都是那样的。

再把“韩非”换成不定代词“某某”，由同样过程分别得到命题“韩非是人”和“韩非是会推理的”的形式：

某某是这样的；
某某是那样的。

这三个命题形式就组成上面的推理形式4）。

注意，命题中不同类型的部分，如代表性质的（“会思考”）和代表个体的（“韩非”），要由相应的不同类型的代词（如“那样的”、“某某”）来替换，而同一个命题或不同命题中相同的部分，要由相同的不定代词替换（如两个命题中的“韩非”都由相同代词“某某“替换）。

由于数学语言中的**变项**和自然语言中的不定代词有类似的功能，我们可以在自然语言中增加一些变项符号，进一步把命题形式中的代词换成一些变项符号，如把“某某”换成 x，把“这样的”换成 A，把“那样的”换成 B 等等。选择什么样的变项符号，完全是一种约定。但不同的代词需要用不同的符号替换。命题形式中未经变项符号替换的部分（如“所有的”），我们称为**逻辑常项**。

比如，推理形式4），借助变项表示，就是：

$$4'）\quad \frac{\text{所有的 A 都是 B。x 是 A。}}{\text{x 是 B。}}$$

因此，一个推理，如果把其中作前提和结论的命题分别代换成相应的命题形式，就得到这个推理的形式。要明确一个推理的形式，关键要看如何分析命题的形式，即确定命题表达式的哪些部分是可以替换为变项的，哪些部分是不可以这样替换的。换言之，我们要确定命题的哪些部分是逻辑常项。这个问题，需要对命题结构做出适当分析后才能解决。但这里我们不妨先看一下几个逻辑史上的例子。