地质找矿勘探中的概率统计方法

植东升 编著

中南工业大学出版社

前　言

近二十年来由于电子计算机的广泛应用和地质科学的迅速发展，使人们有可能采用并且必然会采用数学方法处理大量的地质数据和解释复杂的地质问题。于是，一门新的学科——数学地质应运而生。目前，几乎所有的地质院校都开设了这门课程，广大地质工作者应用这一手段进行地质找矿工作和地质理论研究工作。

本书曾在1977年内部铅印发行，原名为《地球化学探矿中的概率统计方法》。现根据近几年来数学地质的发展，并吸取广大专家、读者的意见，对原书作了重大修改和补充，并将书名改为《地质找矿勘探中的概率统计方法》。

本书着重讨论数学地质的基本理论和方法。为了读者阅读方便，仍选入基础知识部分。前六章基础知识，既有其自身的独立性、系统性和实用性，又为后面各章提供理论根据；后十章多元统计分析，则为目前地质科学中常用的多元统计分析方法。本书理论联系实际，充分考虑可接受性，力求适应面宽一些。每章末编有适量练习题，书末附有习题答案。

本书既是编者多年来研究与教学实践的成果，也是集体智慧的结晶．在编写和出版过程中，得到著名统计学家武汉大学张尧庭教授的热情指导和鼓励．中南工业大学关家骥[illegible]教授审阅了一至八章；成都气象学院王柏钧教授审阅了九至十五章；本院（桂林冶金地质学院）徐楚明同志和欧阳成甫、尹全七副教授审阅了第十六章．此外，本院孙孝会、黄乃培、长春冶金地质专科学校刘朝杰和辽宁冶金地质学校侯凤乡等同志对原书提了很多改进意见．本院刘宜河同志改写了第十一章，并提供了大量习题．张先容同志电算了部分习题，何惠乾同志清绘了全部插图．另外，本书得以出版，也与我院各级领导和同志们的支持鼓励是分不开的．对以上同志，在此谨致以深切的谢意！

还要说明的是：在编写1977年原书的过程中，在1973年至1976年间所参考的国内外有关杂志和内部资料，现在无从查询，不能一一列出，在此谨表歉意．

由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正．

编　者

1986年 7 月

目　　录

第一篇　线性代数和概率统计基础

第一章　线性代数 ………………………………………………（1）

§1.1 行列式 ………………………………………………（1）

§1.2 矩　阵 ………………………………………………（10）

§1.3 线性方程组 ………………………………………………（26）

§1.4 矩阵的特征值与特征向量 ………………………………………………（36）

习题一 ………………………………………………（49）

第二章　随机事件及其概率 ………………………………………………（53）

§2.1 集　合 ………………………………………………（54）

§2.2 随机事件 ………………………………………………（57）

§2.3 事件的概率 ………………………………………………（59）

§2.4 概率的运算法则 ………………………………………………（63）

§2.5 概率的公理化定义 ………………………………………………（70）

§2.6 主观概率 ………………………………………………（71）

习题二 ………………………………………………（72）

第三章　随机变量及其分布 ………………………………………………（75）

§3.1 随机变量 ………………………………………………（75）

§3.2 离散型随机变量 ………………………………………………（76）

§3.3 连续型随机变量 ………………………………………………（85）

§3.4 随机变量函数的分布 ………………………………………………（96）

§3.5 对数正态分布 ………………………………………………（98）

§3.6 随机变量的正态转换 ………………………………………………（100）

§3.7 概率格纸 ………………………………………………（100）

习题三 ………………………………………………（100）

第四章 随机变量的数字特征 ……………………(104)
§4.1 数学期望及其性质 ……………………(104)
§4.2 众数，中位数，几何平均值 ……………………(108)
§4.3 方差及其性质 ……………………(110)
§4.4 几种常用分布的数学期望和方差 ……………………(114)
§4.5 矩，偏度与峰度 ……………………(118)
§4.6 熵 ……………………(120)
§4.7 利用概率格纸处理子样数据 ……………………(123)
习题四 ……………………(128)

第五章 随机向量 ……………………(129)
§5.1 二维随机向量的联合分布 ……………………(129)
§5.2 边缘分布 ……………………(132)
§5.3 条件分布与贝叶斯公式 ……………………(133)
§5.4 随机变量的独立性 ……………………(136)
§5.5 二维随机向量的数字特征 ……………………(137)
§5.6 多维随机向量的正态分布 ……………………(139)
§5.7 两个独立的正态变量之和的分布 ……………………(141)
§5.8 大数定律和中心极限定理 ……………………(141)
习题五 ……………………(143)

第六章 统计推断 ……………………(146)
§6.1 统计量的概念 ……………………(146)
§6.2 几个常用统计量的分布 ……………………(147)
§6.3 参数估计 ……………………(153)
§6.4 假设检验的概念——差异显著性及其检验 ……(158)
§6.5 参数检验 ……………………(161)
§6.6 分布的检验 ……………………(165)
§6.7 两个母体分布是否相等的符号检验法 ……………(172)
习题六 ……………………(173)

第二篇　多元分析

第七章　方差分析 ……………………………………（ 174 ）
§7.1 一个因素的方差分析 ……………………………（ 174 ）
§7.2 两个因素的方差分析 ……………………………（ 183 ）
习题七 ……………………………………………（ 191 ）

第八章　回归分析 ……………………………………（ 193 ）
§8.1 一元线性回归 ……………………………………（ 194 ）
§8.2 相关系数及其显著性检验 ………………………（ 198 ）
§8.3 一元线性回归的方差分析 ………………………（ 200 ）
§8.4 举　例 …………………………………………（ 202 ）
§8.5 等级相关 ………………………………………（ 207 ）
§8.6 预测与控制 ……………………………………（ 208 ）
§8.7 一元非线性回归 …………………………………（ 210 ）
§8.8 多元线性回归 ……………………………………（ 212 ）
§8.9 对各自变量的显著性检验 ………………………（ 224 ）
§8.10逐步回归 ………………………………………（ 227 ）
§8.11成矿远景区的矿床统计预测 ……………………（ 238 ）
习题八 ……………………………………………（ 241 ）

第九章　趋势分析 ……………………………………（ 243 ）
§9.1 滑动平均趋势面分析 ……………………………（ 243 ）
§9.2 趋势面方程 ………………………………………（ 245 ）
§9.3 趋势面分析的步骤 ………………………………（ 248 ）
§9.4 趋势面分析在地质上用途概述 …………………（ 253 ）
§9.5 几点说明 …………………………………………（ 254 ）
习题九 ……………………………………………（ 255 ）

第十章　判别分析 …………………………………………（257）
§10.1　费歇准则下的两类线性判别 ………………（258）
§10.2　判别函数的显著性检验 ……………………（263）
§10.3　变量的选择 …………………………………（264）
§10.4　实　例 ………………………………………（266）
§10.5　多类判别的贝叶斯准则 ……………………（270）
§10.6　具有多元正态母体的多类判别 ……………（275）
§10.7　多类判别效果的检验 ………………………（280）
§10.8　多类判别的计算步骤 ………………………（282）
§10.9　逐步判别 ……………………………………（286）
习题十 ………………………………………（290）

第十一章　聚类分析 ……………………………………（292）
§11.1　数据变换 ……………………………………（293）
§11.2　相似性度量 …………………………………（294）
§11.3　谱系图的构成 ………………………………（298）
§11.4　聚类分析的计算方法与步骤 ………………（300）
§11.5　地质应用实例 ………………………………（317）
习题十一 ……………………………………（320）

第十二章　因子分析 ……………………………………（322）
§12.1　因子分析的数学模型 ………………………（323）
§12.2　主成分分析与初始因子矩阵求法 …………（328）
§12.3　正交旋转因子解 ……………………………（335）
§12.4　斜交旋转因子解 ……………………………（340）
§12.5　因子得分 ……………………………………（341）
§12.6　因子分析计算步骤和例题 …………………（342）
§12.7　关于Q型因子分析 …………………………（354）
习题十二 ……………………………………（355）

第十三章　对应分析 ……………………………………（356）
§13.1　对应分析的标度 ……………………………（356）
§13.2　数据矩阵的两种空间及其距离的选择 ………（357）
§13.3　R型和Q型因子分析 …………………………（359）
§13.4　空间R^m与R^n的对偶性 ……………………（361）
§13.5　用同一因子轴平面表示变量与样品 …………（363）
§13.6　对应分析的计算步骤和实例 …………………（364）
习题十三 ……………………………………………（372）

第十四章　典型相关分析 ……………………………（373）
§14.1　典型变量与典型相关系数 ……………………（373）
§14.2　典型变量的性质 ………………………………（378）
§14.3　典型相关系数的显著性检验 …………………（379）
§14.4　用相关矩阵R代替协方差矩阵Σ计算的情形 …（381）
§14.5　实　例 …………………………………………（382）
习题十四 ……………………………………………（388）
附　录　矩阵求导的两个定理 ………………………（388）

第十五章　马尔柯夫链 ………………………………（392）
§15.1　随机过程 ………………………………………（392）
§15.2　马尔柯夫链及其转移概率 ……………………（393）
§15.3　多步转移概率 …………………………………（396）
§15.4　遍历性 …………………………………………（398）
§15.5　关于马尔柯夫链的检验 ………………………（401）
习题十五 ……………………………………………（403）

第十六章　逻辑信息法 ………………………………（404）
§16.1　逻辑信息法的基本原理 ………………………（404）
§16.2　实施步骤 ………………………………………（407）
§16.3　实　例 …………………………………………（431）

习题十六 ……………………………………（ 433 ）
主要参考文献 ……………………………………（ 435 ）
附表一 标准正态分布表 ……………………………（ 436 ）
附表二 t 分布临界值表 ……………………………（ 437 ）
附表三 χ^2分布临界值表 ……………………………（ 438 ）
附表四 F 分布临界值表 ……………………………（ 440 ）
附表五 符号检验表 ……………………………（ 446 ）
附表六 相关系数最低值表 ……………………………（ 447 ）
习题答案 ……………………………………（ 448 ）

第一篇　线性代数和概率统计基础

第一章　线性代数

本章主要讨论两类问题：（1）解线性方程组；（2）计算矩阵的特征值和特征向量。同时，还讨论与这两类问题有关的计算行列式和求逆矩阵等问题。

§1.1　行列式

1．二阶和三阶行列式

利用加减消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当　$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，其解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

我们发现，这两个解中不论分子或分母在写法上都有一定规律．为了书写和计算上的方便，引入二阶行列式定义．

定义　设有四个数a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，作运算：$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，叫做二阶行列式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

横排叫做行，竖排叫做列，四个数叫做二阶行列式的元素，每个元素有两个足标号码，第一个表示元素所在的行数，第二个表示元素所在的列数，如a_{21}表示第二行第一列的元素．

显然，二元线性方程组的解可以写为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

二阶行列式的计算有一个简单的对角线记忆法：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

式中实线上两数之积取正号，虚线上两数之积取负号。

为了较简便地讨论三元线性方程组的解，引入三阶行列式定义：

定义 设有九个数a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}，作运算：$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$，叫做三阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

三阶行列式也有一个简单的对角线规则，图1—1中，实线上三数之积取正号，虚线上三数之积取负号，然后计算这些积的代数和。

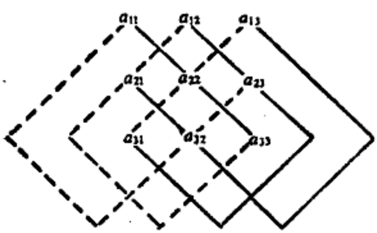

图1—1

给定一个三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, & ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3。 & ③ \end{cases}$$

利用加减消元法，先从①和②消去x_3，再从①和③消去x_3，然后从所得的二元线性方程组消去x_2，就可求得x_1。同理，可求得x_2和x_3。利用三阶行列式的定义，若设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad （设 D \neq 0）。$$

例　试解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

解．

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

所以

$$x_1 = -\frac{11}{8}, \quad x_2 = -\frac{9}{8}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}.$$

2. 行列式的性质

下面列出的行列式性质，不仅三阶行列式成立，对于 n 阶行列式也都是成立的。它们对简化行列式的计算很有用。

性质 1 把行列式的行改为列，列改为行，而不改变它们原来的次序（称为行列式的转置），行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 2 把行列式任意两行(列)对调，行列式的绝对值不变而符号相反。

推论 如果行列式中有两行(列)元素相同，则行列式的值为零。

性质 3 把行列式的某一行（列）的所有元素乘以某数 k，所得行列式的值等于原行列式的 k 倍。例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 如果行列式的两行(列)的对应元素成比例，则此行列式等于零。例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

性质 4 如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则行

列式的值为零．

性质5 如果行列式中某一行（列）的元素都是二项的和，则此行列式可以分解为两个行列式之和。而这两个行列式除了这某一行(列)外，其他元素均与原行列式相同。
例如，

$$\begin{vmatrix} a_1+d & b_1+e & c_1+f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质6 把行列式的某一行(列)所有的元素乘以同一个数，加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变。
例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+kc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

定义 把行列式中某一元素 a_{ij} 所在的行和列划去，余下的元素按原有次序构成的行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}．

定义 一个元素 a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子，叫做这个元素的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$．
例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

性质 7 行列式等于其任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式之积的和。例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

利用以上行列式性质可以把行列式计算简化:

利用性质 3,可以提出某一行(列)的公因子。

利用性质 2 和性质 3 的推论,可以直接得出行列式的值为零。

利用性质 6,可以进行消元,即把某行(列)的元素,除了一个元素外,其余化为零。多次应用性质 6,可以把行列式变为每行每列中至多只含一个不等于零的元素。

利用性质 7,可以使行列式降阶。

把提出公因子、消元和降阶展开法结合起来,就可以使行列式的计算简化。

例 1 用降阶展开法计算行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\times(-22) - 2\times 2 - 14 = -106.$$

例 2 利用消元和降阶展开相结合计算

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -10 & 14 & 0 \\ 9 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{（第一行乘(-3)加到第二行上）} \\ \text{（第一行乘2加到第三行上）} \end{matrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -10 & 14 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = -106.$$

3. 高阶行列式

n 阶行列式可以用n个$n-1$阶行列式来定义。

定义 将n^2个数a_{ij}（i，j＝1，2，…，n）排成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (1—1)$$

叫做n阶行列式，其值定义为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \qquad (1—2)$$

其中A_{1j}为元素a_{1j}（j＝1，2，…，n）的代数余子式。

应用数学归纳法可以证明n阶行列式的完全展开式共有$n!$项，每一项都是由不同行不同列的n个元素的乘积。$n \geq 4$时，没有像二阶和三阶行列式那样的对角线记忆法。但是上面讨论的三阶行列式性质对n阶行列式都成立。

例 1
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}2&1&3&-6\\2&3&-1&-1\\1&0&0&0\\3&1&5&-5\end{vmatrix}$$ （第1列加到第2列上；第1列乘（－1）加到第4列上）

$$=2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&3&-6\\3&-1&-1\\1&5&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&3&-6\\0&-10&17\\0&2&1\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}-10&17\\2&1\end{vmatrix}=-88。$$

一个行列式从左上角到右下角的元素 a_{11}， a_{22}， …，a_{nn}叫做主对角线上的元素。

例 2　上（或下）三角形行列式等于其主对角线上元素之积（因此常把行列式化为三角形行列式计算），即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

例 3

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

4．　克莱姆法则

含有n个未知数和n个方程式的线性方程组