Ⅱ

（上册）

GAODENG
SHUXUE

徐蕴珍　谭代富
袁亚平　李书刚
葛晓滨　周木良
主审：黄光谷

高等学校数学系列教材

# 高等数学

湖北科学技术出版社

高等学校数学系列教材

# 高等数学

Ⅱ

（上册）

GAODENG
SHUXUE

徐蕴珍　谭代富
袁亚平　李书刚
葛晓滨　周木良
主审：黄光谷

湖北科学技术出版社

高等学校数学系列教材

高等数学Ⅱ(上册)　　ⓒ 徐蕴珍　谭代富　袁亚平　李书刚　葛晓滨　周木良

策　　划:李慎谦　　封面设计:秦滋宣
责任编辑:李慎谦　　责任校对:邓　冰

出版发行:湖北科学技术出版社　　电话:86782508
地　　址:武汉市武昌东亭路 2 号　　邮编:430077

印　　刷:华中理工大学印刷厂　　邮编:430074

850×1168mm　32 开　12 印张　1 插页　295 千字
1998 年 7 月第 1 版　　1998 年 7 月第 1 次印刷

印数:0 001—6 000　　定价:14.20 元
ISBN7—5352—2135—1/G・560

# 序　言

我们即将进入21世纪，面临信息时代。计算机迅速发展、日益普及；数学的应用向一切领域渗透，科技及各行业日益数学化、数字化。我们必须进行教育改革以适应时代的发展。

高等学校传统的数学教材有许多优点，对培养人才起了很大的作用。但是，由于传统的高校数学教材过于注重形式、抽象，着力定义、定理、证明、计算、推导，忽略与周围世界及各实际问题和其他学科的密切联系，内容老化，培养学生能力不够，不便于自学。通过数学教学开发智力，对绝大多数的非数学专业的学生来说是远远不能适应的。这套《高等学校数学系列教材》顺应了转变教学思想、更新教学内容、改进教学方法、改革创新教材的新形势，立足于多年教学实践、探索、改革，有深厚的群众基础、素材基础、经验基础和写作基础。作者们边教学、边写作，精心设计、大胆创新、团结协作，克服了种种困难，终于完成了这项系统工程。

这套教材的每门课程教材分为三个梯级：教材、教学指导书、习题解答，它们互相配合呼应，形成一个大系统和整体，构成大三级循环。中三级循环为新课、习作课与复习课，小三级为每讲的内容、思考题与习题，有利于提高教学的质与量。

这套教材注意继承传统教材的优点，采用了主动式教学法，本着循序渐进、学而时习之的教学原则，注意调动学生学习的主观能动性，实行教与自学双向教学，力求处理好传授知识与培养能力的关系，注意培养学生归纳、分析、综合、类比、判断、选择、联想、应用、建模、创新等各种数学方法和能力；让学生在分析问题、解决问

题中掌握选择方法、检验结果、寻找原因、转换观点等一系列实在的本领，提高学生的素质和数学修养。

这套教材既注意了传授必要的基础知识，又注意介绍建模、数学软件等新概念、新方法和新知识，以适应当今科技迅猛发展的形势。这套教材构思好、声势大、编排新、使用专业多、适用面广，将会在数学教育界引起很大的反响。

编写这套教材是改革数学教育的一种尝试，由于前无借鉴和时间仓促等原因，和任何新生事物一样，这套教材中也会存在一些不足之处，这将会随着试用、修改而日臻完善。我相信这套几百万字教材的出版，定能受到广大师生和教育工作者的欢迎和好评，它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一朵奇葩。

# 前言

要实现“四个”现代化，参与21世纪的世界性竞争，关键是人才的培养；而人才培养的关键是教育。数学教育是教育事业的重要组成部分，改革数学教育的关键是教材的改革。有什么样的教材，就决定了教师采用什么样的教学方式和方法。传统数学教材有许多优点：逻辑严谨，系统性强，对培养人才起了很大的作用。但由于历史的局限性，是有改进之处的。

本套高等学校数学系列教材，共三类六门18种20余册，是覆盖高等数学、工程数学等主要基础课程的教材，注意了吸收各门传统教材的优点，又力求转变教育思想，体现教改精神，以适应21世纪科技与信息迅猛发展的新形势，着眼于培养具有知识面广的较高数学修养的人才，其意义重大而深远。

本套教材在内容上以国家教委新颁《高等学校工科数学课程教学基本要求》为依据，提倡主动式教学法，力求处理好传授数学知识与培养各种能力的关系，把培养学生获取知识、解决问题的能力与开拓、创新的精神作为教材的重要任务之一，变被动式的灌输知识（注入式），为主动的参与、钻研与力行（即主动式、启发式教学法），实行教与自学双向教学。

这套教材总的构思是：按讲编写，循环配合；培养能力，便于自学；减少课时，便于备课和电化教学。其中三类书之间既互相配合呼应，又各分工不同，各显特色；主教材减少课时、内容少而精、便于教与学；主教材所配习题及习题解答书则巩固教材内容，更多地提供方法、加大信息量；教学指导书则加深理解、开拓视野、扩大知

识面，并介绍有关新概念、新方法和新知识。

使用这套教材时，应以主教材为蓝本。教材的各讲内容，原则上是一个教学单元(两学时)的教学内容，有些讲编入的内容较多，可从中挑选、讲授主要内容，对其余次要内容或简单例题，可留给学生自学读懂弄通。有些讲的内容比较简单，可以合并两讲为一讲，可节约教学时数，加强习作课或另补本专业建模等教学内容。教材中所配习题，可点半数左右作为课后作业，其余由学生选作。

教学指导书中所列习作课，应纳入教学日历、作为教学内容的一个重要组成部分。习作课也是一种数学实验课，应引起重视，以便培养学生解题、思考、应用等各种能力。上习作课应注意引导、启发思维，做到讲练结合。至于教学指导书中所列复习课，各专业可视教学时数是否充裕，或者纳入教学计划，或者由学生自学。教学指导书中的其余内容，均可留给学生自学。

习题解答书与教学指导书是学生自学的两支拐杖，应让学生学习"摸着石头过河"，应教育学生先自做习题，先自思考；遇有困难，再看解答，并读懂弄通。不要怕学生照抄解答，反正这几门数学基础课程的考试一般是闭卷考试，在考场上是抄袭不到的。不要"因噎废食"：不准学生看习题解答书。习题解答书全由学生自学。

新编这套教材是改革现行高校数学教材的一种尝试。由于我们水平有限、资料有限、见识有限，加上时间仓促，书中可能存在一些错误、缺点或不妥当、不成熟、不完善之处，恳请各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编写这套书，得到武汉纺织工学院、空军雷达学院、湖北科学技术出版社和武汉市洪山区教委贺贤座副主任、华中师大二附中方昌浩校长的大力支持和关心，在此我们表示衷心的感谢！

编　者

1997年11月于武汉

# 目　录

# 第一章　函数的极限与连续

常量是初等数学的主要研究对象，而变量是高等数学的主要研究对象. 函数是变量之间的对应关系，是高等数学的基础概念之一. 极限方法是高等数学中研究变量并贯穿始终的一种基本方法. 在高等数学中研究的函数主要是连续函数. 本章将介绍函数、极限、连续等基本概念及其性质.

## 第一讲　函　数　复　习

读者在初等数学里已经学习了函数的一些基础知识，在这里作适当复习和补充，作为学习后续内容的预备知识.

### 一、函 数 概 念

**1. 集合**

所谓集合(或简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 事物 $a$ 是集合 $S$ 的元素记作 $a\in S$(读作 $a$ 属于 $S$)；反之记为 $a\notin S$ 或 $a\overline{\in}S$(读作 $a$ 不属于 $S$). 设 $S$ 是具有某种特征的元素 $x$ 的全体所组成的集合，就记作

$$S=\{x\,|\,x\text{ 所具有的特征}\}.$$

例如，由全体正实数组成的集合 $\mathrm{R}^{+}$，可记作

$$\mathrm{R}^{+}=\{x\,|\,x>0\}.$$

我们把全体自然数(即正整数)构成的集合记作 N；全体整数的集合记作 Z；全体有理数的集合记作 Q；全体实数的集合记作

R. $n\in \mathrm{N}$, $x\in \mathrm{R}$ 分别表示 $n$ 为自然数，$x$ 为实数. 显然，

$$\mathrm{N}\subset \mathrm{Z}\subset \mathrm{Q}\subset \mathrm{R},$$

这里，符号"$\subset$"读作"包含于"；反之，符号"$\supset$"读作"包含". 集合 $A\subset B$，表示 $A$ 是 $B$ 的子集，即集合 $A$ 的元素一定都是集合 $B$ 的元素.

如果 $A\subset B$，又有 $B\subset A$，就称集合 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，且规定 $\varnothing\subset S$，即空集是任何集合的子集.

区间是用得较多的一类数集.

$$(a,b)=\{x|a<x<b\},$$

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

分别称为开区间、闭区间、半开（或半闭）区间，$a$ 和 $b$ 称为这些区间的左、右端点. 当无需辨明所论区间是否包含端点时，就统称为区间，并常用 $I$ 表示它.

我们引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）、$-\infty$（负无穷大）与 $\infty$（无穷大，即绝对值无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in \mathrm{R}\}\text{ 或 }\mathrm{R}=(-\infty,+\infty),$$

$$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)=\{x||x|>M\}.$$

这里，符号"$\cup$"读作"并"，集 $A\cup B$ 是指由 $A$ 和 $B$ 的元素所组成的集合. 反之，"$\cap$"读作"交"，集 $A\cap B$ 是指既属于 $A$ 又属于 $B$（即公共）的元素所组成的集合. 例如，$(-\infty,0]\cup[0,+\infty)=\mathrm{R}$，而

$$(-\infty,0]\cap[0,+\infty)=\{0\},\text{但}\{0\}\neq\varnothing.$$

满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$（即 $-\delta<x-a<\delta$ 或 $a-\delta<x<a+\delta$）的所有实数，称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a,\delta)$ 或 $U(a)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的所有实数，称为点 $a$ 的空心 $\delta$ 邻

域(或去心邻域),记作$U^0(a,\delta)$或$U^0(a)$,即

$$U^0(a)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

其中$0<|x-a|$表示$x\neq a$.

**2. 函数定义**

**定义 1** 设$x$和$y$是两个变量,$D$和$M$是两个数集.如果对于每个数$x\in D$,按照某一确定的对应规则$f$,变量$y\in M$总有唯一确定的一个数与它相对应,则称$y$是$x$的函数,或称$f$是确定在数集$D$上的函数,记作

$$y=f(x)\text{ 或 }x\xrightarrow{f}y;f:D\to M.$$

其中$f$是对应规则,$D$叫做函数的定义域,$x$叫做自变量,$y$叫做因变量(或函数),全体函数值的集合

$$W=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}\subset M,$$

叫做函数的值域.

在定义1中,对于每一个$x$,只能有唯一的一个$y$与它对应(即单值对应),这种函数称为单值函数.否则为多值函数.在本书中,我们只讨论单值函数.

函数$y=f(x)$给出了$x$轴上的点集$D$到$y$轴上点集$M$之间的单值对应,也称为映射(或映照),我们称$f(x_0)\in M(x_0\in D)$为映射$f$下$x_0$的象,而$x_0$则称为$f(x_0)$的原象.

表示函数的方法,通常有解析法(即公式法),图象法和列表法(例如四位数学用表)等等.

**例 1** 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0;\\ -x, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数,它的定义域$D=\mathrm{R}$,值域$W=[0,+\infty)$.

**例 2** 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{当 } x < 0; \\ 0, \quad \text{当 } x = 0; \\ 1, \quad \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=\mathrm{R}$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-1 所示. 显然，对于任何 $x\in\mathrm{R}$，有

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

注：例 1 和例 2 中的函数要用两个以上的式子来表示，这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

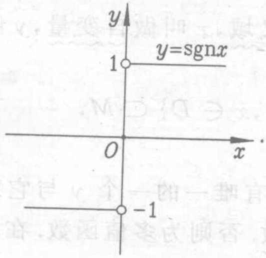


图 1-1

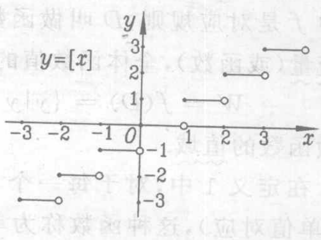


图 1-2

**例 3** 设 $x\in\mathrm{R}$，我们把不超过 $x$ 的最大整数简称为 $x$ 的最大整数，记作 $[x]$. 例如，$[2.99]=2$，$[\pi]=3$，$[-3.14]=-4$，等等. 而把函数

$$y = [x]$$

称作取整函数，它的定义域 $D=\mathrm{R}$，值域 $W=\mathrm{Z}$，其图形如图 1-2 所示，称为阶梯曲线，跃度为 1. 显然，当 $n\in\mathrm{N}$，且 $n>[x]$ 时，有

$$n > x.$$

例如，由 $n>[\pi]=3 \Rightarrow n>\pi$.

**例 4** 定义在 $[0,1]$ 上的函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 为有理数}; \\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

称为狄利克莱(Dirichlet)函数，它不能用解析法、图象法或列表法来表示，只能用上述描述法来表示.

**例 5** 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1;\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

**解**

$$f(f(x))=\begin{cases}f(1), |x|\leqslant 1;\\ f(0), |x|>1\end{cases}$$
$$=1.$$

**例 6** 如图 1-3，试将等腰梯形 $ABCD$ 中加斜线部分的面积 $S$ 表成 $x$ 的函数.

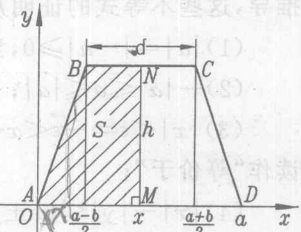

图 1-3

**解** 如图 1-3 建立坐标系，根据问题的实际意义，知函数 $S(x)$ 的自然定义域为 $0\leqslant x\leqslant a$，由题意，得

$$S=\begin{cases}\dfrac{hx^2}{a-b}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{a-b}{2};\\ h\left(x-\dfrac{a-b}{4}\right), & \dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2};\\ h\left[\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{(a-x)^2}{a-b}\right], & \dfrac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

**例 7** 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\log_{4x-2}(3x-2)}+\dfrac{1}{x-4}$ 的定义域.

**解** $x$ 应满足下列不等式组：

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 4x-2>0,\\ 4x-2\neq 1,\\ 3x-2>0,\\ \log_{4x-2}(3x-2)\neq 0,\\ x-4\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x>1/2,\\ x\neq 3/4,\\ x>2/3,\\ x\neq 1,\\ x\neq 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x\neq 4.\end{cases}$$

题设函数的定义域为$[2,4)\cup(4,+\infty)$. 其中，符号“$\Rightarrow$”读作“推出”.

**3. 常用不等式**

在高等数学中，常用不等式和以下绝对值不等式进行变形和推导，这些不等式的证明从略，留给读者练习.

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$，当且仅当 $a=0$ 时取等号；

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

(3) $|x|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<x<\varepsilon$，$|x|\leqslant h\Leftrightarrow-h\leqslant x\leqslant h$，式中符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”；

(4) $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$（三角形不等式）；

(5) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$，$|x^n|=|x|^n$；

(6) $|x/y|=|x|/|y|\ (y\neq 0)$；

(7) $a<x<b\Rightarrow|x|<|a|+|b|$；

(8) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

**例 8** 证明两个重要的不等式：

$$|\sin x|\leqslant|x|\leqslant|\mathrm{tg}x|,$$

上式中第一个不等式对于任何 $x\in\mathbf{R}$ 都成立；第二个不等式对于 $|x|<\pi/2$ 时成立；在这两个不等式中，等号只有在 $x=0$ 时成立.

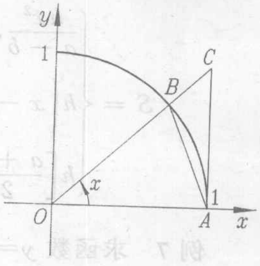


图 1-4

**证明** 如图 1-4 作单位圆弧，设 $\angle AOC=x$ 为锐角，其弧度数为 $x$，由于面积

$$S_{\triangle AOB}<S_{\text{扇形}AOB}<S_{\triangle AOC},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\mathrm{tg}x,$$

故当 $0<x<\pi/2$ 时，有

$$\sin x<x<\mathrm{tg}x. \tag{1}$$

又当$-\pi/2<x<0$时，$0<-x<\pi/2$，代入(1)式，得

$$\sin(-x)<-x<\operatorname{tg}(-x)\text{ 或 }-\sin x<-x<-\operatorname{tg}x. \quad (2)$$

由(1)和(2)知，当$|x|<\pi/2$及$x\neq 0$时，有

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg}x|.$$

当$|x|\geqslant\pi/2$时，有

$$|\sin x|\leqslant 1<\pi/2\leqslant|x|\text{，即有 }|\sin x|<|x|.$$

最后，显然只有$x=0$时，有

$$|\sin x|=|x|=|\operatorname{tg}x|.$$

综合上述各情况，本题得证.

## 二、函数性质

### 1. 有界性

设函数$f(x)$的定义域为$D$，数集$X\subset D$. 如果存在某常数$M$(或$m$)，对于一切$x\in X$，函数$f(x)$总有

$$f(x)\leqslant M(\text{或 } f(x)\geqslant m),$$

则说$f(x)$在集$X$上有上(下)界，并称$M$(或$m$)为它的一个上(下)界. 显见，上(下)界不是唯一的. 若函数$f(x)$在$X$上既有上界，又有下界，则称$f(x)$为$X$上的有界函数. 因此，若$f(x)$为$X$上的有界函数，则必存在某正数$M$，对于一切$x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

如果这样的数$M$不存在，就称函数$f(x)$在$X$上无界.

有界函数图象的特点，是它完全位于平行于$x$轴的两条直线$y=\pm M$之间.

### 2. 单调性

设函数$f(x)$的定义域为$D$，区间$I\subset D$. 如果对于$I$上任意两个数$x_1,x_2$，当$x_1<x_2$时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在$I$上是单调递增(减)的. 特别地，当$x_1<x_2$时，总有

严格不等式

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是严格递增(减)的. 满足这些条件的函数，统称为单调函数.

递增(减)函数的图形是递升(降)的.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是递减函数，在 $[0,+\infty)$ 上是递增函数，$(-\infty,0]$ 是递减区间，$[0,+\infty)$ 是递增区间，但 $y=x^2$ 在整个定义域 R 上不是单调函数. 递增、递减区间统称为单调区间.

**3. 奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时必有 $-x\in D$. 如果对于任意 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)(\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为奇(偶)函数.

例如，$\sin x$，$\cos x$ 在定义域 R 上分别为奇函数与偶函数，但 $\sin x+\cos x$ 既非奇函数，又非偶函数. 又如 $x$，$x^3$ 是奇函数；$x^2$，$x^4$ 是偶函数.

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

**4. 周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$. 如果存在一个正数 $l$，使得对于任意 $x\in D$，当 $x\pm l\in D$，有

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 $D$ 上的周期函数，$l$ 为它的一个周期. 显然，若 $l$ 为 $f(x)$ 的周期，则 $kl(k=2,3,\cdots)$ 也都是它的周期，可见周期函数有无穷多个周期. 通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

设 $f(x)$ 的周期为 $l$，则在此函数定义域内每个长度为 $l$ 的区间上，函数图形周而复始地重复出现，即具有相同的形状.

利用函数的上述各性质，便于研究函数的性态，并便于描绘函