捷进书系

主编：洪鸣远

中华题王

ZHONGHUA TIWANG

精选好题+方法内化+灵活运用=成功

走进课堂，讲练互动

高中数学·必修4

配北师大版

新蕾出版社

捷进书系

中华题王

高中数学·必修4

配北师大版

本册主编：韩可志
吴根福
本册副主编：余群峰
周代祥

新蕾出版社

图书在版编目(CIP)数据

中华题王:北师大版．数学．4:必修/张伟主编.—天津:
新蕾出版社,2007
ISBN 978-7-5307-4068-2

Ⅰ.中…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数学课—高中—习题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098836 号

中华题王·高中数学必修4(配北师大版)

出版发行　新蕾出版社
E-mail:newbuds@public.tpt.tj.cn
http://www.newbuds.com
地　　址　天津市和平区西康路35号(300051)
出 版 人　纪秀荣
电　　话　总编办:(022)23332422
　　　　　　发行部:(022)27221133,27221150
传　　真　(022)23332422
经　　销　全国新华书店
印　　刷　三河市长城印刷有限公司
开　　本　880×1230　1/16
字　　数　282千字
印　　张　11
版　　次　2007年7月第1版第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5307-4068-2
定　　价　19.80元

★★★ 为课堂添效益 ★★★

学生课业负担重，学习压力大，学习效率是决定成绩好坏的关键因素。走出盲动误区，摒弃题海战术，为课堂添效益，向练习要成绩，是您走向成功的最佳选择。

由国家著名教育考试研究专家洪鸣远老师精心策划，由国家级课程改革实验区一线骨干教师倾心打造的《中华题王》高中新课标版脱颖而出。它犹如璀璨的启明星，为在题海中左奔右突的学子指明了前进的方向，拥有了它，就可以傲视天下，引领群雄。

《中华题王》---讲与练双向激活，教与学师生互动

一、丛书特点和功能---同步助学辅导用书

★以例题带动讲解，以思路分析和解后反思串连讲解过程，以对应巩固训练提高思维的效率和正确性。

★左右双栏，讲练对照，左讲右练的互动形式，巩固基础，解决难点问题，提升课堂教学效果。

★走进课堂，师生共用，全程模拟教学过程，有例题有练习，教师选例题，学生做练习。

★互联高中学段知识网络，帮助学生自我构建完整的知识体系.

★配备自我检测方案，定时检测学习效果，帮学生及时查缺补漏.

★依据课改精神，展示考点并选择最近三年的高考样题，使学生在同步学习中零距离体验高考氛围。

二、使用特点提炼---星级指数

★★★☆☆ 难度中上，适合全体学生，

★★★★☆ 题目新颖，题型全面经典

★★★★★ 讲：练=3：7，讲与练的比例适当

★★★★★ 配套新课标各版本必、选修教材、人教大纲版高二教材。

三、热卖理由---随讲随练，及时巩固，适用面广，针对性强

★即讲即练，指导解题，及时巩固和提升课堂教学效果。激活学生的思维潜能，深入反思方法和规律。

★荟萃专家智慧，编写理念与新课标一致，体例新颖，师生使用方便。

★课前预习、课堂讲解、随堂练习、课后复习、单元总结，自测水平，触摸高考，全程模拟教学进程。

★重教材，抓基础，重难点，抓方法，激活高品质思维方式。

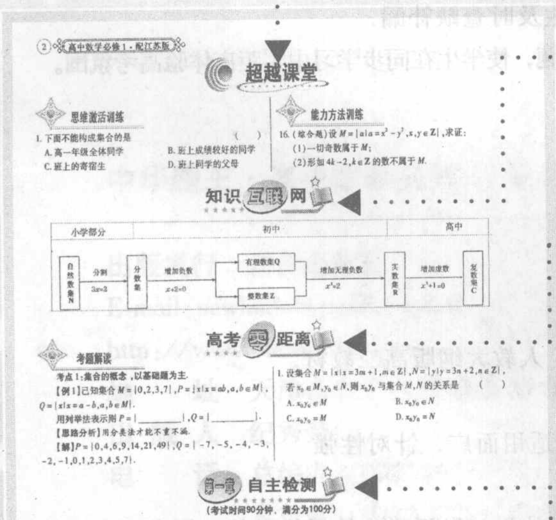
学科导读图示 ★★★

课前感知——明确学习内容和目标，梳理教材知识点、重点和难点，并解答简单问题。

即讲即练——讲练互动，边学边练，及时巩固课堂效果。

典题例释——对应讲解，选择略高于教材难度的例题，以抓基础和深挖掘为手段，以思路分析—解题步骤—解后反思为串连，揭示解题方法和技巧，反思解题思想和规律。达到巩固知识，提升能力的目标。

随堂练习——右栏练习，选择与左栏知识点、解题方法对应的练习题，巩固基础，解决难点问题。以理清解题思路，掌握方法为目标。左右栏讲练互动，教师可选择适当例题和对应的习题，在课堂之上，边讲边练，及时巩固和检测教学效果。学生也可当堂检测自己对知识的掌握程度。



超越课堂——根据学生的认知差异，设计不同层次的课后练习题。“思维激活训练”重在巩固基础。“能力方法训练”侧重突破重难点。

知识互联网——提炼每章的知识网络结构，链接相关知识并形成体系，展示知识间的内在联系，体验所学知识在整个高中学段的地位和价值。

高考零距离——考点左右对应，互动讲练，左栏“考题解读”列举高考的考点和出题档次，配合三年内的高考真题和各地的模拟题，以思路分析和解后反思串连，剖析解题过程。右栏“体验成功”对应左面的考点设置对应性训练题目，深化对解题方法的理解和掌握，同步演练应考技能。

本章自主检测——自我检测本章的学习效果，卷面结构仿照高考题型、题量设置，帮助学生找到差距，查漏补缺。

参考答案及解题指导——呈现标准答案，指导学生如何解题。“理解题目—找到办法—呈现步骤—解后反思”层层深入，帮助学生提高思维品质。

全向激活你的思维潜能　深入反思解题方法和规律

目录

目录

第一章 三角函数

1 周期现象

课前感知

1. 结合日常生活、生产实践和我们课本中学习的知识,列举一些具有周期性的例子:______________________.

2. 某种______________________的现象被称为周期现象.

3. 潮汐现象中,________随着时间的变化而周期变化,即无论从哪个时刻 t 算起,经过________,水的深度又回到原来的位置.

即讲即练

典题例释

【例 1】n 个连续自然数按规律排成下表:

0 3→4 7→8 11→…
↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑
1→2 5→6 9→10

根据规律,试问从 2 006 到 2 008,箭头的方向依次为 ( )

A. ↓→ B. ↑→ C. →↑ D. →↓

【思路分析】根据数表排列规律,知每隔 4 个数箭头方向重复一次.

【解】∵ 2 006 = 4 × 501 + 2,数表中数字及箭头方向每隔 4 个排列顺序重复一次.

∴ 从 2 006 到 2 008 箭头方向应该是→2 006↑2 007→2 008↓. 故本题答案为 B.

【解后反思】从数学角度来探究周期现象中所蕴含的规律,并运用规律解决数学问题.

随堂练习

【题 1】把自然数 1 ~ 2 007 中的奇数按如下表排列:

①	②	③	④	⑤
1	3	5	7	
	9	11	13	15
17	19	21	23	
	25	27	29	31
33	…			

试问数 2 007 排在第________列.

超越课堂

思维激活训练

1. 钟摆从左边的最高位置开始计时,每隔 4 秒回到原来的位置,则经过 2 007 秒后,钟摆的位置应该为 ( )
A. 左边最高点
B. 右边最高点
C. 最低点往左运动
D. 最高点往右运动

2. A、B 两地相距 90 米,甲、乙两人分别从 A、B 两地相向而行,甲的速度为 2 m/s,乙的速度为 3 m/s. 若不计转向时停留时间,则从开始到 2 008 秒末,他们共相遇的次数为 ( )
A. 56 B. 57 C. 58 D. 59

3. "我们爱数学我们爱数学…"中第 997 个字是 ( )
A. 我 B. 们 C. 爱 D. 数 E. 学

4. △○○△△○○△△…排列第 19 个是 ( )
A. △ B. ○ C. 不确定

5. 在第 4 题排列中,前 19 个图形含△的个数为 ( )
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$,$a_1 = a$,$a_2 = b$,$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,则下列结论中正确的是 ( )
A. $a_{100} = -a$,$S_{100} = 2b - a$
B. $a_{100} = -b$,$S_{100} = 2b - a$
C. $a_{100} = -b$,$S_{100} = b - a$
D. $a_{100} = -a$,$S_{100} = b - a$

7. 无限循环小数 3.465 072 507 2…,它的第 100 位小数是____.

8. "2 007 2 007 2 007…"排列中共有数字 2 007 个,则最后一个数字为________,其中共有________个 2,共有________个 0,共有________个 7.

9. 2007 年的元旦为星期一,到这一年的七月七日共有________天,七月七日为星期________.

10. 若弹簧振子对平衡位置的位移 x cm 与时间 t s 之间的函数关系如图 1-1-1.
(1) 弹簧振子的运动周期为________.
(2) 从 $t = 0$ s 算起到________点完成一次往复运动.
(3) 当 $t = 9$ s 时弹簧振子对平衡位置的位移是________.

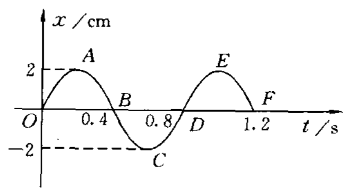


图1-1-1

能力方法训练

11. 钟摆高度 h(mm)与时间 t(s)之间关系如图1-1-2.

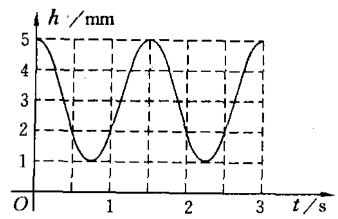


图1-1-2

(1)求周期;

(2)当 $t=10$ s 时,钟摆的高度.

12. P 点的运动轨迹是 $A\to B\to C\to D\to A$ 在半径为2的圆周上运动,且4分钟转一周,记 $PA=y$,时间为 t. PA 关于时间的函数记 $PA=y=f(t)$.

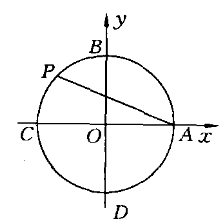


图1-1-3

则 $f(0)=f(\quad)=f(\quad)=\cdots=f(\quad)=$______,

$f(2)=f(\quad)=f(\quad)=\cdots=f(\quad)=$______.

2 角的概念的推广

课前感知

1. 角在坐标系中的放置方法:把角的顶点放在________,角的始边与________重合.
2. 正角:角的终边按________方向旋转所成的角.
3. 负角:角的终边按________方向旋转所成的角.
4. 零角:角的终边________所成的角.
5. 数轴角:当角的终边落在________.
6. 象限角:当角的终边落在第几象限,就说这个角______.
7. 所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,构成角的集合是____.

即讲即练

典题例释

【例1】已知 α 为第二象限角,则 $\frac{\alpha}{3}$ 为第几象限角?

【思路分析】从象限角的概念入手,将文字语言翻译成符号语言.

【解】法一:$\because$ α 是第二象限的角,

$\therefore$ $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

$k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$ 时,

$n\cdot360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°$;

当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时,

随堂练习

【题1】在0°~360°间,找出与下列各角终边相同的角,并判定它们是第几象限的角:① $-120°$;② $660°$;③ $-950°8'$.

【题2】给出下列四个命题:① $-75°$ 是第四象限角;② $225°$ 是第三象限角;③ $475°$ 是第二象限角;④ $-315°$ 是第一象限角.其中正确的命题有 ( )

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

【题3】已知 2θ 为第三象限的角,则 $\theta-90°$ 所在象限是 ( )

$n\cdot360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°$；

当 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时，

$n\cdot360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°$.

$\therefore\ \frac{\alpha}{3}$是第一或第二或第四象限的角.

法二：$\because\ \alpha$为第二象限角，

$\therefore$ 由图可知，$\frac{\alpha}{3}$为第一、二、四象限角.

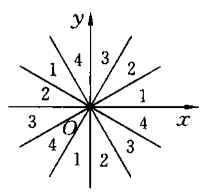


图 1－2－1

【解后反思】解答此类问题常用的方法有两种：(1)先将 α 所在象限用不等式表示出来，再对不等式中的整数进行分类讨论，从而得出$\frac{\alpha}{n}$的位置；(2)将各象限分成 n 等分，从第一象限离 x 轴最近的区域开始逆时方向依次重复标注数字 1、2、3、4 直到将所有区域标注完为止，α 为第几象限，$\frac{\alpha}{n}$就在图中标号为几的区域内.

【例 2】已知角 α 是第四象限，判断 $180°-\alpha$ 是第几象限？

【思路分析】先分析 $-\alpha$ 所在象限，再在 $-\alpha$ 的基础上加上 180°.

【解】$\because$ 角 α 是第四象限角，且 α 与 $-\alpha$ 关于 x 轴对称.

$\therefore\ -\alpha$ 是第一象限角.

所以 $180°-\alpha$ 可以看成 $-\alpha$ 按逆时针方向旋转 π 弧度得到的角，即 $180°-\alpha$ 是第三象限角.

【解后反思】如果已知角 α 所在象限，则 $90°+\alpha$，$180°+\alpha$ 可以看成是由 α 的终边按逆时针方向旋转 90°或 180°得到的角；而 $-\alpha$ 与 α 关于 x 轴对称，因此 $90°-\alpha$，$180°-\alpha$ 可以先对称再旋转.

【例 3】已知 $\theta=1\ 690°$，(1)把 θ 写成 $k\cdot360°+\alpha$ 的形式，其中 $k\in\mathbf{Z}$，$\alpha\in[0°,360°)$

(2)求 β，使 θ 与 β 的终边相同，其中 $\beta\in(-720°,-360°)$.

【思路分析】利用终边相同的角的集合求解.

【解】(1)$1690°=4\times360°+250°$；$\therefore\ k=4$，$\alpha=250°$.

(2)由(1)知与角 θ 终边相同的角可以表示为：$k\cdot360°+250°$，$k\in\mathbf{Z}$.

又由 $-720°<k\cdot360°+250°<-360°$，解得 $k=2$，$\therefore\ \beta=-2\times360°+250°=-470°$.

【解后反思】解此类问题，应先写出与 θ 角终边相同的角的结构，再利用不等式求出适合不等式的整数 k.

【例 4】若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则 α 与 β 之间的关系是________

【思路分析】若 α 与 θ 的终边相同，则 β 与 $-\theta$ 的终边相同.

【解】$\because\ \alpha$ 与 θ 的终边相同，$\therefore\ \alpha=m\cdot360°+\theta,m\in\mathbf{Z}$. ①

又$\because\ \beta$ 与 $-\theta$ 的终边相同，$\therefore\ \beta=n\cdot360°-\theta,n\in\mathbf{Z}$. ②

A. 第一象限　　B. 第二、三象限

C. 第一、三象限　　D. 第四象限

【题 4】已知角 θ 是第二象限角，则 $k\cdot180°+90°+\theta$ 所在的象限是　　(　　)

A. 第二象限　　B. 第一、四象限

C. 第一、三象限　　D. 第二、四象限

【题 5】在与角 10 030°终边相同的角中，求下列条件的角：

(1)最大的负角；

(2)最小的正角.

【题 6】若角 α 与 β 的终边关于 y 轴对称，则 α 与 β 之间的关系是________.

$\therefore$ ①+②得 $\alpha+\beta=(m+n)360^\circ(m,n\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

【解后分析】在解答中,①式与②式中的整数要有所区别.

【例5】设集合 $A=\{$第一象限角$\}$,$B=\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$,$C=\{$锐角三角形的内角$\}$,$D=\{0^\circ$到$90^\circ$之间的角$\}$,则有 ( )

A. $C\subsetneqq A\subsetneqq B$　　B. $C\subsetneqq B\subsetneqq A$

C. $D\subsetneqq(A\cap B)$　　D. $(A\cap B)\cap D=C$

【思路分析】角的概念推广后,出现了象限角,区间角,区域角等重要的概念,要对概念准确理解.

【解】先明确题设所给出的四个集合中作为元素的角的具体含义,再寻求这些集合间的内在关系,再对照每一个选项,从而明辨真伪;可利用数形结合的方法,在直角坐标平面上,分别画出表示集合A、B、C、D的示意图,再通过图形直观得出答案;还可用特例排除法求解:$\because$ $360^\circ+10^\circ\in A$,但 $370^\circ\notin B$,排除A;同理由 -10°可排除B,由 0°可排除C,故选D.

【解后反思】准确区分锐角为 $0^\circ<\theta<90^\circ$;0°到90°的角是 $0^\circ\leqslant\theta<90^\circ$;小于$90^\circ$的角 $\theta<90^\circ$包括负角,且角的终边遍布坐标系;第一象限角为区域角,$\{\theta|k\cdot360^\circ<\theta<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

【例6】2003年10月15日上午9时,中国首位航天员杨利伟乘坐的"神舟五号"载人飞船,在酒泉卫星发射中心用"长征二号"F型运载火箭发射升空.按预定轨道环绕地球十四圈,在太空飞行21小时18分,16日6时23分,在内蒙古中部地区成功着陆,中国首次载人航天飞行任务获得圆满成功.

视飞船在距地面343公里的太空中绕地球作匀速圆周运动,90分钟绕地球一圈,地球的平均半径为6 378公里,试计算:

(1)飞船绕地球14周共转过的角度是多少?

(2)在太空飞行中,杨利伟与家人进行了一场特别的通话,通话的时间持续4分50秒,在这段时间内,杨利伟所乘坐的飞船转过的角度是多少?飞船走了多少公里?(不考虑其他因素)

【思路分析】计算弧长,应先求出在4分50秒飞船所经过的圆心角.

【解】(1)由于飞船绕地球一周转360°,14圈共转 $14\times360^\circ=5\ 040^\circ$.(2)设飞船转过的角度是$\theta$,飞船绕地球一周用时 $90\times60=5\ 400$ 秒钟,转了360°,而4分50秒为290秒钟,则有$\frac{5\ 400}{360}=\frac{290}{\theta}$,解得 $\theta=19.3^\circ$.

又由于飞船运行的圆周半径为 $343+6\ 378=6\ 721$ 公里,飞行一周走了 $2\pi\times6\ 721=13\ 442\ \pi$ km.则每转1°走了$\frac{13\ 442\ \pi}{360}$ km,故4分50秒走了$\frac{13\ 442\ \pi}{360}\times19.3=2\ 262.8$ km.

【解后反思】解决数学应用性问题,要读懂题意,弄清解决本题所用的数学模型,然后再利用数学知识求解,最后还要回归到应用题本身.

【题7】写出图1-2-2中区域表示的角的集合(包括边界).

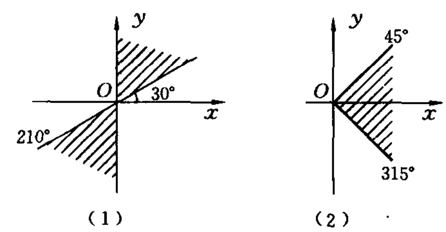


图1-2-2

【题8】自行车大链轮有48齿,小链轮有20齿,当大链轮转过一周时,小链轮转过的角度是多少?

超越课堂

思维激活训练

1. 下列各组角中，终边相同的是　(　　)

A. $-60°,300°,420°$　　B. $-60°,-300°,-420°$

C. $-60°,300°,-420°$　　D. $60°,-300°,-420°$

2. 下列命题正确的是　(　　)

A. 终边相同的角相等

B. 第二象限的角比第一象限的角大

C. 第一象限的角都是锐角

D. 小于90°的角不一定是锐角

3. 若α是第二象限的角，则2α不可能是　(　　)

A. 第一、二象限　　B. 第二、三象限

C. 第三、四象限　　D. 第一、四象限

4. 对于第四象限角的集合，下列4种表示中错误的是 (　　)

A. $\{\theta|k\cdot360°+270°<\theta<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\theta|k\cdot360°-90°<\theta<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\theta|k\cdot360°+270°<\theta<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\theta|k\cdot360°+630°<\theta<k\cdot360°+720°,k\in\mathbf{Z}\}$

5. $k\in\mathbf{Z}$，下列各组角的终边相同的是　(　　)

A. $(2k+1)\cdot180°$与$(4k\pm1)\cdot180°$

B. $\frac{k}{2}\cdot180°$与$90°+k\cdot180°$

C. $30°+k\cdot180°$与$\pm30°+k\cdot360°$

D. $(2k+1)\cdot180°$与$3k\cdot180°$

6. 在平面直角坐标系中，角α与$180°+\alpha$的终边的关系一定是　(　　)

A. 关于x轴对称　　B. 关于y轴对称

C. 关于原点成中心对称　　D. 随α变化有不同的对称性

7. 在下列各组的两个角中，终边不重合的一组是　(　　)

A. $-25°$与$695°$　　B. $180°$与$-540°$

C. $-134°$与$1\ 306°$　　D. $-135°$与$495°$

8. 射线OA绕端点O逆时针旋转120°到达OB位置，再由OB顺时针旋转270°到达OC位置，则$\angle AOC$等于　(　　)

A. $150°$　　B. $-150°$　　C. $390°$　　D. $-390°$

9. 下列各式中不正确的是　(　　)

A. 终边在x轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. 终边在y轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. 终边在坐标轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. 终边经过$(a,a)(a\neq0)$的角的集合是$\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

10. 已知α,β是锐角，且$\alpha-\beta$的终边与670°角的终边相同，$\alpha+\beta$的终边与$-280°$角的终边相同，则α,β的大小为　(　　)

A. $\alpha=45°,\beta=35°$　　B. $\alpha=10°,\beta=70°$

C. $\alpha=15°,\beta=65°$　　D. $\alpha=25°,\beta=75°$

11. 与2 008°终边相同的最小正角是________，绝对值最小的角是________，其终边落在第________象限.

12. 若4α与$-40°$的终边相同，则$\alpha=$________.

13. 若$n\cdot315°$与$315°$的终边相同且$n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$，则n的最小值为________.

14. 在集合$A=\{\alpha|\alpha=120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$中，居于区间$(-360°,360°)$的角的集合是________________.

15. 若角α是第三象限角，则$\frac{\alpha}{3}$角的终边在________，2α角的终边在________.

16. $\theta\in(0°,360°)$，这个角的7倍角的终边与这个角的终边重合，则$\theta=$________________.

17. 如图1-2-3，写出终边落在阴影部分的角的集合(虚线表示不含边界，实线表示含边界).

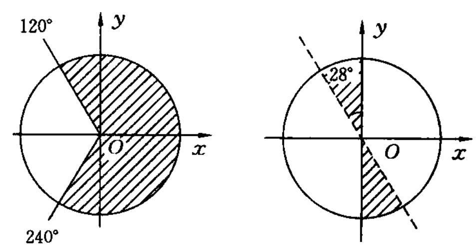


图1-2-3

能力方法训练

18. 将时针拨慢5分钟，则分针转了多少度角？现在是2点整，则15分钟后，时针和分针的较小夹角是多大？

19. (探究题)一天之中，从0:00开始，时针与分针第一次重合到24:00点时针与分针最后一次重合，中间时针与分针共重合了多少次？

3. 弧度制

课前感知

1. 角度制：规定周角的________为1度角，记作________，用度作为单位来度量角的单位制叫做________.

2. 弧度制：________________________叫做1弧度角；________________________叫做弧度制，1弧度记作________.

3. 角度与弧度之间的互化

(1)360° = ________；180° = ________；1° = ________ ≈ ________.

(2) 2π rad = ________；π rad = ________；1rad = ________ ≈ ________ = ________.

4. 弧长公式：l = ________ = ________.

5. 扇形面积公式：S = ________ = ________ = ________.

6. 弧度制与角度制相比有一定的优点表现在(1)________________；(2)________________.

即讲即练

典题例释

【例1】填空

(1)18° = ________；(2)67°30′ = ________；

(3)$\frac{3}{10}\pi$ = ________；(4)2 rad ≈ ________.

【思路分析】直接套用角度与弧度换算公式即可.

【解】(1)$18° = \frac{\pi}{180}\text{rad} \times 18 = \frac{\pi}{10}$；

(2)$67°30' = 67.5° = \frac{\pi}{180}\text{rad} \times 67.5 = \frac{3}{8}\pi$；

(3)$\frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 54°$；

(4)$2\ \text{rad} = 2 \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.3° \times 2 = 114.6°$.

【解后反思】进行角度与弧度换算时，抓住关系式 π rad = 180°是关键. 方法归纳：

(1)度数 $\times \frac{\pi}{180}$ = 弧度数，弧度数 $\times \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ = 度数；

(2)熟记课本 P_{12} 表 1－3.

【例2】把下列角化成 $2k\pi + \alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, k \in \mathbf{Z})$ 形式，写出终边相同的角的集合，并指出它是第几象限角.

(1) $-\frac{46}{3}\pi$； (2) −1 485°； (3) −20.

【思路分析】先把各角化成 $k \cdot 360° + \alpha$，再用弧度制表示.

【解】(1) $-\frac{46}{3}\pi = -8 \times 2\pi + \frac{2}{3}\pi$，它是第二象限角. 终边相同的角的集合为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

(2) $-1\ 485° = -5 \times 360° + 315° = -10\pi + \frac{7}{4}\pi$，它是第四象限角. 终边相同的角的集合为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 2k\pi + \frac{7}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

(3) $-20 = -4 \times 2\pi + (8\pi - 20)$.

而$\frac{3}{2}\pi < 8\pi - 20 \approx 5.12 < 2\pi$，

∴ −20 是第四象限角，与它终边相同的角的集合为

$\{\alpha | \alpha = 2k\pi + (8\pi - 20), k \in \mathbf{Z}\}$.

【解后反思】用弧度制表示终边相同角 $2k\pi + \alpha(k \in \mathbf{Z})$ 时

随堂练习

【题1】已知 $\alpha = 15°, \beta = \frac{\pi}{10}, \gamma = 1, \theta = 105°, \varphi = \frac{7\pi}{12}$，试比较 α、β、γ、θ、φ 的大小.

【题2】已知四边形的四个内角之比是 1∶3∶5∶6，用角度和弧度将这些内角的大小表示为________，________.

【题3】将下列各角化成 $2k\pi + \alpha(0 \leqslant \alpha < 2\pi, k \in \mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限角.

(1) −1 725°； (2)$\frac{19\pi}{6}$； (3)870°.

应注意:①$2k\pi$ 为 π 的偶数倍即 $k\cdot 360°=2k\pi$;②角度制与弧度不能同时出现.

【例3】写出与 $-\frac{\pi}{3}$ 终边相同的角的集合 S,并把 S 中 $-4\pi\sim4\pi$ 之间的角写出来.

【思路分析】先写出终边与 $-\frac{\pi}{3}$ 终边相同的角的集合,然后解不等式.

【解】$S=\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

设 $-4\pi\leqslant2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant4\pi,k\in\mathbf{Z}$　①

$-2+\frac{1}{6}\leqslant k\leqslant2+\frac{1}{6}$,即 $k=-1,0,1,2$,

则 S 中,$-4\pi\sim4\pi$ 之间的角是 $-2\pi-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3},2\pi-\frac{\pi}{3},4\pi-\frac{\pi}{3}$,即 $-\frac{7\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{3}$.

【解后反思】注意用不等式求 k 的值,避免漏解.用不等式要求较高,易解错.本题也可以通过观察①式,且 $-4\pi\sim4\pi$ 的角有且只有4个(4周),显然 $k=-1,0,1,2$,易得解.

【例4】(1)一个半径为 r 的扇形,若它的周长等于弧所在的半圆的长,那么扇形的圆心角是多少弧度?是多少角度?扇形的面积是多少?

(2)已知扇形的周长为20 cm,问扇形的圆心角 α 为何值时,扇形的面积 S 最大,并求出 S 的最大值.

【思路分析】由 $|\alpha|=\frac{l}{r},S=\frac{1}{2}lr$ 可求解.

【解】(1)设扇形的圆心角为 θ 弧度,因为扇形的弧长为 $r\theta$,所以扇形的周长为 $2r+r\theta$,由题意可知

$2r+r\theta=\pi r\Rightarrow\theta=\pi-2(\text{rad})\approx65°24'$.

扇形的面积 $S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2=\frac{1}{2}r^2(\pi-2)$.

(2)设扇形的半径为 r cm,则依题意,有

$l=20-2r,S=\frac{1}{2}l\cdot r$.

由上面两个式子,得 $S=\frac{1}{2}(20-2r)\cdot r$,

即 $S=-(r-5)^2+25$.

由上式知,当 $r=5$ cm 时,S 有最大值 25 cm^2,此时 $l=10$ cm,再由公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}=\frac{10}{5}=2$,得 $\alpha=\pm2$(负值舍).

综合,当 $\alpha=2$ 时,扇形的面积 S 最大,且最大值为25 cm^2.

【解后反思】(1)弧度制下的弧长公式,面积公式均得到了简化,解决此类问题多用弧度制,几何图形中 α 的范围为 $[0,2\pi)$.(2)求最值常用函数模型求解.

【例5】如图1-3-1,已知一长为 $\sqrt{3}$ dm,宽为1 dm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚,翻滚到第四面时被一小木板挡住,使木块底面与桌面成30°的角.问点 A 走过的路程的长及走过的弧度所在扇形的总面积.

【思路分析】利用 $l=|\alpha|R$ 与 $S=\frac{1}{2}l\cdot R$ 求解.

【题4】若 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求 $\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$ 的范围,并指出它所在的象限.

【题5】已知扇形的面积为16 cm^2,试求当扇形的半径和圆心角各取何值时,扇形的周长最小?

【题6】弧度数为 $\frac{\pi}{2}$ 所对的扇形面积与其内切圆的面积之比________.

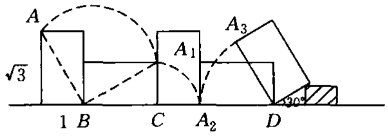


图 1－3－1

【解】$\overset{\frown}{AA_1}$、$\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$所在的圆的圆心分别为 B、C、D，半径分别为 $2,1,\sqrt{3}$. 再利用弧长公式扇形面积公式，求出路程的长和走过的弧所在扇形的总面积.

$\overset{\frown}{AA_1}$所在圆半径是2，圆心角为$\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{A_1A_2}$所在的圆半径是1，圆心角是$\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{A_2A_3}$所在圆的半径为$\sqrt{3}$，圆心角为$\frac{\pi}{3}$，所以点 A 走过的路程是3段圆弧之和，即 $2\times\frac{\pi}{2}+1\times\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}=\frac{9+2\sqrt{3}}{6}\pi(\mathrm{dm})$.

3段弧所在扇形的总面积是

$\frac{1}{2}\times2\times\pi+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}\pi}{3}=\frac{7\pi}{4}(\mathrm{dm}^2)$.

【解后反思】画出点 A 的运动轨迹分析每段弧的特征(所在圆的圆心、半径、圆心角)是解决问题的关键. 要注意作第三次翻滚时，点 A 并没有运动.

4. 时钟问题

【例6】2 小时 40 分钟后，则分针所转的弧度数为________，时针所转的弧度数________.

【思路分析】在解决时钟中的时针与分针有关的角度问题时，要注意它们在单位时间内各转了多少.

【解】首先注意到分针、时针的方向为顺时针，即为负角.

又　2 小时 40 分 $=\frac{8}{3}$小时，

而一小时分针转过的弧度数为 -2π.

故分针转了 $-2\pi\times\frac{8}{3}=-\frac{16}{3}\pi$.

而一小时时针转过的弧度数为 $-\frac{\pi}{6}$.

故时针转过 $-\frac{\pi}{6}\times\frac{8}{3}=-\frac{4}{9}\pi$.

【解后反思】在解决时钟问题中，应注意分针每小时转过 -2π 弧度，每分钟转过 $-\frac{\pi}{30}$；而时针每小时转过 $-\frac{\pi}{6}$，每分钟转过 $-\frac{\pi}{360}$弧度.

【题7】现在8点整，求45分钟后时针与分针的夹角的弧度数.

超越课堂

思维激活训练

1. 下列诸命题中，假命题是　(　　)
   A. "度"与"弧度"是度量角的两种不同的度量单位
   B. 一度的角是周角的$\frac{1}{360}$，一弧度的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$
   C. 根据弧度的定义，180°的角一定等于 π 弧度的角
   D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角，它们与圆的半径长短有关

2. 把 $-1\ 125°$ 化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)k\in\mathbf{Z}$ 的形式是　(　　)
   A. $-6\pi-\frac{\pi}{4}$　　B. $-6\pi+\frac{7}{4}\pi$
   C. $-8\pi-\frac{\pi}{4}$　　D. $-8\pi+\frac{7}{4}\pi$

3. (易错题)在半径不等的两个圆中，1 rad 的圆心角　(　　)
   A. 所对弧长相等
   B. 所对弦长相等
   C. 所对弧长等于各自的半径

D. 所对的弧长为$\frac{570°18'}{180°}R$

4. 半径为 π cm,中心角为 120°的弧长为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$ cm　　B. $\frac{\pi^2}{3}$ cm

C. $\frac{2\pi}{3}$ cm　　D. $\frac{2\pi^2}{3}$ cm

5. 分针拨慢 20 min,则分针转过的弧度数是　　(　　)

A. $-\frac{2}{3}\pi$　　B. $\frac{2}{3}\pi$

C. $-\frac{2}{5}\pi$　　D. $\frac{2}{5}\pi$

6. 已知 $\alpha=-2$,则 α 是　　(　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

7. 若角 α 与 β 的终边互为反向延长线,则 α 与 β 之间的关系一定是　　(　　)

A. $\alpha=-\beta$　　B. $\alpha=\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha=\pi+\beta$　　D. $\alpha=\beta+\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

8. 已知集合 $A=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$,则 $A\cap B$ 等于　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$

C. $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$　　D. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

9. 下列命题正确的是　　(　　)

A. 若两扇形面积的比为 1:9,则两扇形弧长的比是 1:3

B. 若扇形的弧长一定,则面积存在最大值

C. 若扇形的面积一定,则弧长存在最小值

D. 角的集合与实数集之间可以建立起一一对应关系

10. 圆的半径变为原来的 2 倍,而弧长也增加到原来的 2 倍,则　　(　　)

A. 扇形的面积不变

B. 扇形的圆心角不变

C. 扇形的面积增大到原来的 2 倍

D. 扇形的圆心角增大到原来的 2 倍

11. (易错题)(用弧度制表示)第一象限角的集合为 $A=$________,第一或三象限角的集合为 $B=$________,y 轴上角的集合为 $C=$________,x 轴上方的角的集合为 $D=$________.

12. 角的终边落在函数 $y=-\sqrt{3}|x|$ 图像上的角的集合______.

13. 直角三角形中的两个角的比为 2:3,试求三角形两个锐角的弧度数________________.

14. 已知扇形的圆心角为$\frac{\pi}{3}$,半径 R,那么扇形的内切圆与扇形的面积之比为________.

15. 将长度为 1 的铁丝分成两段,分别围成一个正方形和一个圆心角为 1 的扇形,要使正方形和扇形的面积之和最小,扇形的周长应为________.

16. 地球赤道的半径为 6 730 km,那么赤道 1′的弧长等于________km.

能力方法训练

17. (综合题)(1)一个扇形的周长为 l,求扇形的半径、圆心角各取何值时,此扇形的面积最大.

(2)已知扇形面积 S,当扇形的圆心角为多少弧度时,扇形的周长最小,求此最小值.

18. (拓展题)集合 $A=\{x|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{x|6+x-x^2\geqslant0\}$,求 $A\cap B$.

4 正弦函数

4.1 锐角的正弦函数

课前感知

1. 在 Rt△ABC 中，a、b、c 为角 A、B、C 所对的边，$\angle C=90°$，则 $\sin A=$________，$\sin B=$________.

2. 在平面直角坐标系中，角 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，其终边与半径为1°的圆交于 $P(a,b)$，则 $\sin\alpha=$________，特别地，当 $r=1$（即为单位圆），则 $\sin\alpha=$________.

3. 锐角的正弦函数是以________为自变量，____________为函数值的函数；定义域为________，值域为________.

4. 当 α 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上不断增大时，函数 $y=\sin\alpha$ 的变化情况是________________________.

即讲即练

典题例释

【例1】在△ABC 中，$AB=5$，$BC=12$，$\angle B=90°$，则 $\sin A$ 的值等于________.

【思路分析】利用锐角的正弦函数定义.

【解】∵ $AB=5$，$BC=12$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

∴ $\sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{12}{13}$.

【解后反思】在直角三角形中，锐角的正弦值等于对边比斜边.

【例2】若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，证明：(1) $\sin\alpha<\alpha$；(2) $\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)>1$.

【思路分析】角的终边与单位圆交于 P 点，利用数形结合求解.

【证明】(1)如图1－4.1－1所示，连接 AP.

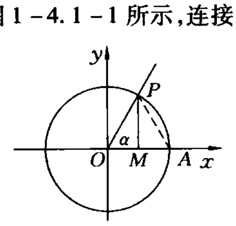


图1－4.1－1

∵ $S_{\triangle OAP}<S_{扇形OAP}$，∴ $\frac{1}{2}OA\cdot MP<\frac{1}{2}l_{\overset{\frown}{AP}}\cdot OA$.

又∵ $OA=1$，∴ $MP<l_{\overset{\frown}{AP}}$，即 $\sin\alpha<\alpha$.

(2)如图1－4.1－1，∵ $\sin\alpha=MP$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\angle OPM=OM$，

∴ 在△OPM 中，有$|MP|+|OM|>|OP|=1$，

随堂练习

【题1】在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB:BC=7:24$，则 $\sin C=$______.

【题2】若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\beta-\sin\beta>\alpha-\sin\alpha$.