高职高专规划教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

○主编　孙 霞　柳清兰

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高职高专规划教材

高等数学

主　编　孙　霞　柳清兰
副主编　王建辉　孙建波　张春梅

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 孙霞，柳清兰主编.—北京：电子工业出版社，2008.8
ISBN 978-7-121-07202-4

I. 高… Ⅱ. ①孙…②柳… Ⅲ. 高等数学–高等学校：技术学校–教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 125444 号

责任编辑：刘文杰　王兆堃
印　　刷：青岛双星华信印刷有限公司
装　　订：青岛双星华信印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：19.25　字数：453 千字
印　　次：2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：34.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

报务热线：（010）88258888。

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学中的基本概念，是高等数学研究的主要对象. 极限概念是微积分的重要概念，极限方法是微积分的基本方法，微积分的重要概念都是通过极限定义的. 本章首先复习函数，并着重介绍函数的极限和函数连续性概念、性质及运算法则.

第 1 节　函　数

一、函数的概念

1. 区间与邻域

区间是高等数学中常用的实数集.

设 $a,b\in R$，且 $a<b$，我们称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)；数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，记作 $[a,b]$；数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

以上这几类区间统称为有限区间. 区间在数轴上的表示如图 1.1 所示.

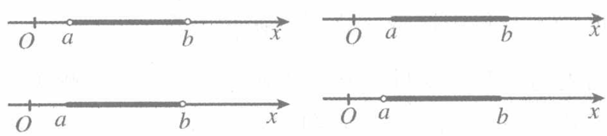

图 1.1

满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$，这里符号"∞"读作无穷大，"$+\infty$"读作正无穷大，类似地，我们记

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\},\ (a,+\infty)=\{x\mid x>a\},\ (-\infty,a)=\{x\mid x<a\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=R$$

其中，"$-\infty$"读作负无穷大.

以上这几类数集都称为无限区间.

有限区间和无限区间统称为区间.

设 $a\in R$，$\delta>0$，满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

$U(a,\delta)$ 表示分别以 $a-\delta, a+\delta$ 为左右端点的开区间（见图 1.2 左），区间长度为 2δ，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

图 1.2

在 $U(a,\delta)$ 中，去掉中心点 a 得到的实数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心（或空心）δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

注意：$\mathring{U}(a,\delta)$ 与 $U(a,\delta)$ 的差别在于 $\mathring{U}(a,\delta)$ 不包含点 a（见图 1.2 右）.

2. 函数的概念

在同一个过程中往往有几个变量同时存在，变量与变量之间的依赖关系正是高等数学研究的主要问题，本章只讨论两个变量的情况，请看下面的例子.

【例 1】 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，下落的距离为 S. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 S 与 t 之间的依赖关系由下式给定：

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度，假定物体着地时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时，由上式就可以确定相应的 S 值.

【例 2】 旅客携带行李乘飞机旅行时，行李的重量不超过 20kg 时不收取费用，若超过 20kg，每超过 1kg 收运费 a 元，建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；而当 $x>20$ 时，只有超过的部分 $x-20$ 按每 kg 收运费 a 元，此时 $y=a(x-20)$. 于是函数 y 可以写成：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & x>20\end{cases}$$

这样便建立了行李重量 x 与行李运费 y 之间的函数关系.

以上两个例子均表达了两个变量之间的依赖关系，每个依赖关系对应一个法则，根据各自的法则，当其中一个变量在某一数集内任取一值时，另一变量就有确定值与之对应，两个变量之间的这种依赖关系称为函数关系.

定义 1 设 x 与 y 是同一变化过程中的两个变量，D 和 M 是两个实数集. 如果有对应法则 f，使对于 D 内每一个 x，都有唯一确定的一个数 $y\in M$ 与之对应，那么称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

称 D 为该函数的定义域，称 x 为自变量，称 y 为因变量（或函数）.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的变量 y 取值的全体组成的数集称作这个函数的值域，用 M 表示.

在函数 $y=f(x)$ 中，符号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应法则，也可用 F，G，f_1，f_2 等表示. 如果两个函数的定义域相同，并且对应法则也相同，那么它们就应该用同一

个符号表示.

确定函数定义域有两种情况：在研究由公式表达的函数时，函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集，也可用区间表示；而在实际问题中，函数的定义域是由实际意义确定的，如例 1 中的定义域为$[0, T]$.

【例 3】求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg(x-2)$.

解　(1) 要使函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 有意义，须 $1-x^2>0$，即 $-1<x<1$，所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $D=(-1,1)$.

(2) 要使函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg(x-2)$ 有意义，须 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$ 成立，即 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ x>2\end{cases}$，所以函数定义域为$(2,4]$.

【例 4】设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求 $f(-1)$，$f(-a)$.

解　$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$，　$f(-a)=\sqrt{4+(-a)^2}=\sqrt{4+a^2}$.

【例 5】设函数 $f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，问它们是否为同一个函数?

解　$f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 在 $x=-1$ 点无定义，其定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，所以它们不是同一个函数.

3. 函数的表示法

解析法　用解析表达式表示一个函数的方法称为**函数的解析法**. 高等数学中讨论的函数，大多由解析法表示. 用解析法表示函数，不一定总是用一个式子表示，也可以分段用几个式子来表示一个函数. 例如 $y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，这是用两个解析式子给定的一个函数，其定义域是$(-\infty,+\infty)$，当自变量在区间$(-\infty,0]$内取值时，对应的函数值按 $y=x^2$ 计算(例如 $f(-3)=(-3)^2=9$)，当自变量在区间$(0,+\infty)$内取值时，函数值按 $y=x+1$ 计算(例如 $f(4)=4+1=5$)，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数**.

【例 6】设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f(-2)$.

解　因为 $2\in(0,+\infty)$，$0\in\{0\}$，$-2\in(-\infty,0)$，所以 $f(2)=1$，$f(0)=0$，$f(-2)=-1$.

例 6 给出的函数称为**符号函数**，记为 $\operatorname{sgn} x$. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为

$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.3 所示.

我们有时可以运用它将某些分段函数写得简单一些.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$，可以记为 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot \operatorname{sgn} x$.

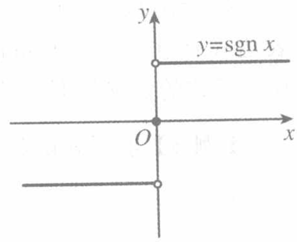

图 1.3

【例 7】语句"变量 y 是不超过 x 的最大整数部分"表示了一个分段函数，称为**取整函数**，记为 $y=[x]$. 即若 $n\leqslant x<n+1$，则$[x]=n$，其中 n 为正整数. 其数学表达式为

$$[x]=\begin{cases}\cdots, & \cdots\\ -2, & -2\leqslant x<-1\\ -1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\\ 2, & 2\leqslant x<3\\ \cdots, & \cdots\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，它的图形如图 1.4 所示.

表格法 把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，称为**函数的表格法**. 如对数表、三角函数表、立方表等.

图示法 用坐标系下的一条或多条曲线表示函数，称为**函数的图示法**.

例如，函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，可用图 1.5 表示.

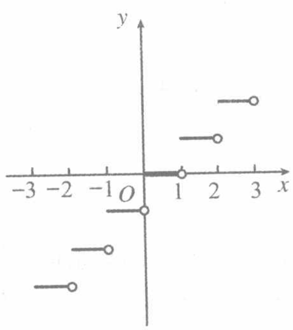

图 1.4

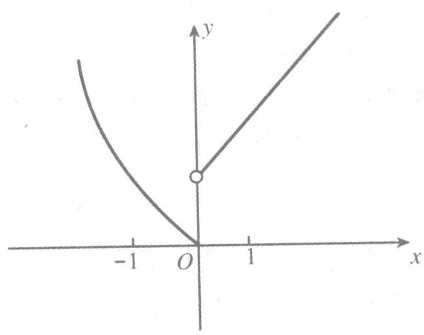

图 1.5

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在正数 M，使得任一 $x\in D$ 所对应的函数值都满足绝对值不等式 $|f(x)|\leqslant M$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 D 内有界. 若这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在区间 D 内无界. 如果函数 $f(x)$ 在区间 D 内有界，那么称

$f(x)$ 在区间 D 内为有界函数. 如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x| \leqslant 1$ 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立.

注意：函数有界性不仅与函数表达式有关，还与自变量 x 的变化范围有关. 例如，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的. 事实上，若取 $M = 1$，则对于任何 $x \in (1,2)$，都有 $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 成立，而 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

2. 函数的单调性

设函数在区间 D 上有定义，如果对于区间 D 上任意两点 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调增加(或单调减少).

单调增加函数的图形沿 x 轴正向上升(见图 1.6)，单调减少函数的图形沿 x 轴正向下降(见图 1.7).

注意：单调性是关于函数在所讨论区间上的一个概念，绝不能离开区间谈函数的单调性.

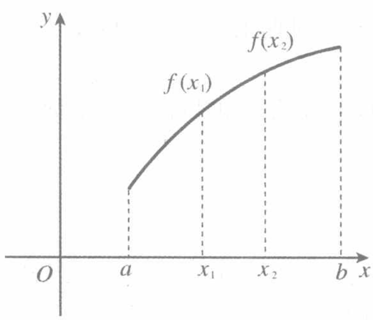

图 1.6

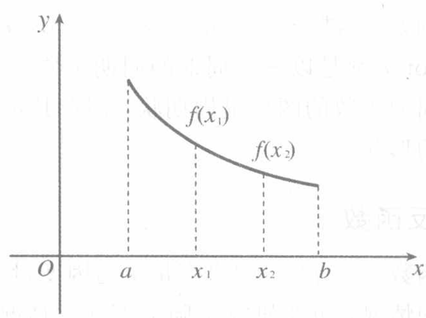

图 1.7

3. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即当 $x \in D$ 时，有 $-x \in D$. 如果对于任意的 $x \in D$，均有

$$f(-x) = f(x)$$

那么称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对任意的 $x \in D$，均有

$$f(-x) = -f(x)$$

那么称 $f(x)$ 为**奇函数**.

既不是奇函数也不是偶函数的函数称为**非奇非偶函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称(见图 1.8 和图 1.9).

例如，$y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数，$y = x^3$ 与 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数，而 $y = x + 1 + \cos x$ 则是非奇非偶函数.

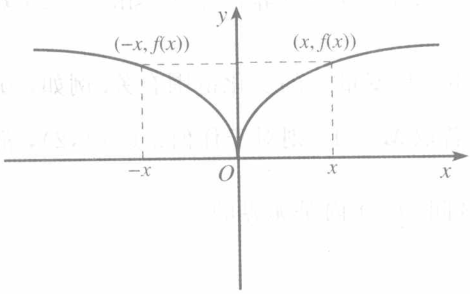

图 1.8

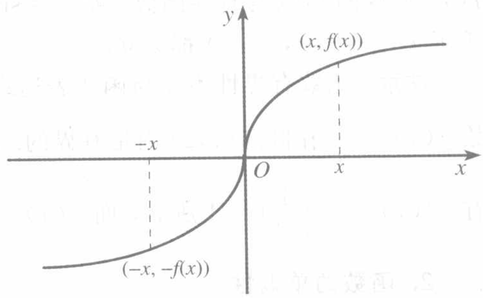

图 1.9

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对于定义域内的任何 x 均有 $x+T$ 也在定义域内，且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，那么函数 $y=f(x)$ 叫做**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 及 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形呈周期状，即在其定义域内各段长度为 T 的区间上，函数图形具有相同的形状.

三、反函数

函数 $y=f(x)$ 中自变量 x 与因变量 y 的关系是相对的. 有时我们不仅要研究 y 随 x 变化的情况，也要研究 x 随 y 变化的情况. 对此，我们引入反函数概念.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 y 在 M 中的每个值，由关系式 $y=f(x)$ 恰可惟一确定出 x 在 D 中的一个值. 那么按照函数的定义，x 就是 y 的一个函数，记作

$$x=\varphi(y) \text{ 或 } x=f^{-1}(y) \tag{1}$$

这时，y 是自变量，x 是因变量. 定义域为 M，值域为 D. 函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 而 $y=f(x)$ 叫做直接函数. 习惯上我们总是把自变量记作 x，因变量记作 y，所以常把(1) 式中的 x，y 对调. 这样 $y=f(x)$ 的反函数(1) 就可以改写为

$$y=\varphi(x) \text{ 或 } y=f^{-1}(x) \quad (x\in M)$$

反函数有以下几个性质：

(1) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域与值域对调.

(3) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

四、常用经济函数

1. 需求函数

一种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 p 密切相关，通常降低商品的价格会使需求量增加，提高商品的价格会使需求量减少. 如果不考虑其它因素的影响，需求量 Q 可以看成价格 p 的一元函数，称为**需求函数**，记作

$$Q = Q(p)$$

一般来说，需求函数为价格 p 的单调减少函数.

根据市场统计资料，常见的需求函数有以下几种类型：

(1) 线性需求函数 $Q = a - bp \qquad (a > 0, b > 0)$

(2) 二次需求函数 $Q = a - bp - cp^2 \qquad (a > 0, b > 0, c > 0)$

(3) 指数需求函数 $Q = ae^{-bp} \qquad (a > 0, b > 0)$

2. 供给函数

某种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少. 供给量 S 也可看成价格 p 的一元函数，称为**供给函数**，记为

$$S = S(p)$$

供给函数为价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等. 其中，线性供给函数为

$$S = -c + dp \qquad (c > 0, d > 0)$$

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0，称为**均衡价格**. 当市场价格 p 高于均衡价格 p_0 时，供给量将增加而需求量相应地减少，这时产生的“供大于求”的现象必然使价格 p 下降；当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量将减少而需求量增加，这时会产生“供不应求”现象，从而又使得价格 p 上升. 市场价格的调节就是这样来实现的.

【例 8】 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q = 14.5 - 1.5p,\ S = -7.5 + 4p$$

求该商品的均衡价格 p_0.

解　由供需均衡条件 $Q = S$，可得

$$14.5 - 1.5p = -7.5 + 4p$$

因此，均衡价格为 $p_0 = 4$.

3. 总成本函数、收入函数和利润函数

在生产和产品的经营活动中，人们总希望尽可能降低成本，提高收入和利润，而成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量或销售量 q 密切相关，它们都可以看作 q 的函数，分别称为**总成本函数**，记为 $C(q)$；**收入函数**，记为 $R(q)$；**利润函数**，记为 $L(q)$.

总成本由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成，固定成本与产量 q 无关，如设备维修费、企业管理费等；可变成本随产量 q 的增加而增加，如原材料费、动力费等. 即

$$C(q)=C_1+C_2(q)$$

总成本函数 $C(q)$ 是 q 的单调增加函数.最典型的成本函数是三次函数

$$C=a_0+a_1q-a_2q^2+a_3q^3 \qquad (a_i>0,\ i=1,2,3)$$

有时为了使问题简化，也常常采用线性成本函数 $C=a+bq(a>0,\ b>0)$ 及二次成本函数.

只给出总成本不能说明企业生产的好坏，为了评价企业的生产状况，需要计算产品的平均成本，即生产 q 件产品时，单位产品成本平均值，记作 $\overline{C}$，则

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q}$$

其中 $\frac{C_2(q)}{q}$ 称为**平均可变成本**.

如果产品的单位售价为 p，销售量为 q，则总收入函数为

$$R(q)=pq$$

总利润等于总收入与总成本的差，即

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

习题 1.1

1. 用区间记号表示下列不等式：

(1) $x\leqslant 0$； (2) $-1\leqslant x<2$；

(3) $|x-2|<a$； (4) $U(a,\delta)$.

2. 下列函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\frac{|x|}{x}$； (2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

(3) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$.

3. 求函数值：

(1) $f(x)=\sqrt{3+x^2}$，求 $f(4)$，$f(1)$，$f(x_0)$，$f(-a)$；

(2) $f(x)=3x+2$，求 $f(1)$，$f(1+h)$，$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$；

(3) $f(t)=t^2$，求 $f(2)$，$f^3(3)$，$f(-1)$；

(4) $g(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x<3\end{cases}$，求 $g(2)$，$g(0)$，$g(-0.5)$，$g(0.5)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，求 $f(a)-f(0)$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{2x}{x^2+3x-4}$； (2) $y=\sqrt{x^2-9}$；

(3) $y = \ln(1+x) + \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$；　(4) $y = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(5) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\dfrac{3-2x}{5}$；　(6) $y = \begin{cases} -x, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sqrt{3-x}, & 0 < x < 2 \end{cases}$.

6. 指出下列函数中，哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $y = x\cos x$；　(2) $y = x + \sin x$；

(3) $y = 2x^4(x^2-1)$；　(4) $y = x^3 - 1$；

(5) $y = a^x - a^{-x}$，$(a > 0)$；　(6) $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.

7. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数请指出其周期.

(1) $y = \cos 2x$；　(2) $y = \sin^2 x$；　(3) $y = x\cos x$.

8. 有一块边长为 L 的正方形铁皮，在它的四角各剪去相等的小正方形，折叠后做成一个无盖的盒子.求这个盒子的容积 V 与被剪去的小正方形边长 x 之间的函数关系.

9. 把圆心角为 α(rad) 的扇形卷成一个圆锥，试求圆锥顶角 ω 与 α 的函数关系.

10. 从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0(元)，按铁路部门的规定，1.1m 以下的儿童免票，身高超过 1.1m 但不足 1.4m 的儿童购买半价票，身高超过 1.4m 者购买全票. 试写出从甲地到乙地的票价 q 作为身高 s 的函数的表达式.

11. 拟建一个容积为 V 的长方体水池，要求它的底为正方形，如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍，设长方体的四周单位面积造价为 a，试将总造价表示为正方形底边的边长的函数，并确定此函数的定义域.

12. 一商家销售某种商品的价格满足关系 $P = 7 - 0.2x$(万元 / 吨)，x 为销售量，商品的成本函数为 $C = 3x + 1$(万元). 若每销售一吨商品，政府要征税 t(万元)，试将该商家税后利润 L 表示为 x 的函数.

13. 某工厂生产某种产品的年产量为 x 台，每台销售价为 250 元，当年产量在 600 台内时，可全部售出，当年产量超过 600 台时，经广告宣传后又可再多售出 200 台，每台平均广告费为 20 元，生产再多，本年就售不出去了. 试建立本年的销售收入 R 与年产量 x 的函数关系.

14. 某种产品每台售价 90 元，成本为 60 元，厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台的，多出的产品实行降价，降价比例为每多出 100 台降价 1 元，但最低价为 75 元 / 台.

(1) 试将每台的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数；

(2) 把利润 L 表示为订购量 x 的函数；

(3) 当一商场订购 1000 台时，厂家可获多少利润？

第2节　初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数是最常见、最基本的一类函数. 基本初等函数包括：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 这些函数在中学里已经学过了. 下面给出这些函数的简单性质.

1. 常量函数　$y = C$（C 是常数）

常量函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，这是最简单的一类函数，无论 x 取何值，y 都取常数值 C.

2. 幂函数　$y = x^{\alpha}$（α 是常数）

幂函数的定义域随 α 的不同而不同，但无论 α 取何值，它在$(0, +\infty)$内都有定义，而且图形都经过$(1,1)$点.

当 α 为正整数时，x^{α} 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，且 α 为偶（奇）数时，x^{α} 为偶（奇）函数.

当 α 为负整数时，x^{α} 的定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. 指数函数　$y = a^x$（$a > 0$，$a \neq 1$，a 是常数）

指数函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时，它单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，它单调减少. 函数的图形都经过$(0,1)$点.

4. 对数函数　$y = \log_a x$（$a > 0$，$a \neq 1$，a 是常数）

对数函数 $\log_a x$ 是指数函数的反函数，定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时，它单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，它单调减少. 函数的图形都经过$(1,0)$点.

在高等数学中，常用以 e 为底的指数函数 e^x 和以 e 为底的对数函数 $\log_e x$（记作 $\ln x$）. $\ln x$ 称为自然对数. 这里 $e = 2.718\,281\,8\cdots$，是一个无理数.

5. 三角函数

常用的三角函数有：正弦函数 $y = \sin x$，余弦函数 $y = \cos x$，正切函数 $y = \tan x$，余切函数 $y = \cot x$.

正弦函数和余弦函数的定义域都是$(-\infty, +\infty)$，值域都是$[-1, 1]$，它们都是以 2π 为周期的周期函数，都是有界函数. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为除去 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$（$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）以外的全体实数，余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为除去 $x = n\pi$（$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）以外的全体实数，它们都是以 π 为周期的周期函数，都是奇函数，并且在其定义域内都是无界函数.

三角函数还包括正割函数 $y = \sec x$，余割函数 $y = \csc x$，其中 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$，