主编 李贤瑜 沈继忠

高等数学

（理工类）

GAODENG SHUXUE

江 西 高 校 出 版 社

高等数学

(理工类)

主　编　李贤瑜　沈继忠
副主编　周云卿　王克美

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类/李贤瑜,沈继忠主编.—南昌:江西高校出版社,2008.8

ISBN 978-7-81132-319-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①李… ②沈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第119703号

出版发行	江西高校出版社
社址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)8504319
销售电话	(0791)8511423
网址	www.juacp.com
印刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照排	江西太元科技有限公司照排部
经销	各地新华书店
开本	787mm×1092mm 1/16
印张	16.25
字数	395千字
版次	2008年8月第1版第1次印刷
印数	1~2300册
书号	ISBN 978-7-81132-319-1
定价	45.00元(共二册)

前　言

为了适应高等专科教育事业迅猛发展，造就更多的实用性人才，根据原国家教委关于“抓好专科教材建设”的指示精神以及“高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求”，我们组织编写了以高等专科理工类学生为主要读者对象的《高等数学》(理工类)这套教材。

本教材的主要特点是：

首先，由于全国各高校扩招以后，高等专科理工类学生的知识水平普遍下降。为了适应大众教育的需要，本教材内容在基本要求不变的情况下，减少了知识点的广度，难度也有所降低。

其次，本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念、减少理论证明、适当图形说明，注意加强学生的基本计算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

第三，本教材力求通俗易懂，在概念的引入上尽量做到简单、形象、直观，多讲实例，少讲理论，使教材既便于教师教，又便于学生学，努力体现高等专科教材的特色。

第四，教材每节后都配有习题，每章后配备了自测题。另有与教材配套的《习题详解》，便于学生自学。

本教材总学时数为136学时左右。

本教材除作为高等专科院校理工类各专业的《高等数学》教材外，也可作为专科层次理工类成人教育和干部培训班的《高等数学》教材。

参加本书编写的教师是：王克美(第一章)、周云卿(第二章)、胡振琴(第三章)、马宝芳(第四章)、赖邦成(第五章)、万平和(第六章)、乐志峰(第七、十章)、何琼(第八、九章)。

本教材初稿完成后，由副主编周云卿副教授、王克美副教授修改补充，由主编沈继忠教授再修改、统稿、定稿，最后由主审李贤瑜教授审定。

本教材的编写，得到了南昌理工学院公共教学部、教务处以及江西高校出版社副总编辑陈东林编审的大力支持和帮助，在此表示深深的谢意！

由于编者水平有限，难免存在缺点和错误，敬请批评指正。

编　者

2008年1月

目 录

第一章　函数　极限　连续

初等数学的研究对象基本上是常量，而高等数学研究的主要对象是定义在数集上的函数，并且以极限方法作为基本的研究方法. 在这一章中，首先在中学数学已有函数知识的基础上进一步理解函数概念，然后介绍极限的概念和极限的运算法则，最后通过极限研究函数的一种重要性质——连续性.

第一节　集　合

一、集合的概念

集合是现代数学的一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号，学习高等数学也必须熟悉集合的概念.

集合是指具有某种特定性质的事物的总体. 例如，某教室里的学生，某学校图书馆内全部的书籍，自然数的全体，方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有根等，都分别组成一个集合，组成集合的事物称为该集合的元素，通常用大写拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\bar{\in} A$. 含有有限个元素的集合称为有限集，否则称为无限集.

表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，就是把集合中的全体元素一一列举出来. 例如，小于 10 的正奇数所组成的集合可表示成

$$A=\{1,3,5,7,9\}$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，则可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，上述集合 A 也可表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 是小于 10 的正奇数}\}$$

又如，$C=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$ 表示由方程 $x^2-4x+3=0$ 的根所组成的集合.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$Q=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^{*}$ 为排除数 0 的实数集,$\mathbf{R}^{+}$ 为全体正实数的集合.

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$. 例如,设

$$A=\{1,2\},B=\{x\mid x^{2}-3x+2=0\}$$

则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$,例如,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$. 例如

$$\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 } x^{2}+2=0\}$$

是空集,规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subset A$.

二、集合的运算

集合的最基本的运算是并、交、差. 这如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样,集合与集合之间也有一些特定的运算及运算规律.

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记作 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

例如,设 $A=\{x\mid 1<x<3\}$,$B=\{x\mid 2<x<4\}$

则 $A\cup B=\{x\mid 1<x<4\}$;$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$;$A\setminus B=\{x\mid 1<x<2\}$.

集合的运算满足如下运算律:

设 A、B、C 为任意三个集合,则有下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

三、区间和邻域

区间是用得较多的一类数集,设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$

开区间　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

无限区间　$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$

此处，“$+\infty$”(读作正无穷大)，“$-\infty$”(读作负无穷大)是引用的符号，不是数.

以后在不需要辨明区间是否包含端点，是否有限或无限，常将其简称为区间，且常用字母 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为 $\cup(a,\delta)$，即

$$\cup(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径(图 1-1)，

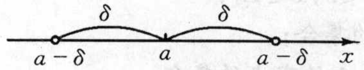


图 1-1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$\cup(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $\cup(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\overset{0}{\cup}(a,\delta)$，即

$$\overset{0}{\cup}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $\cup(a)$.

四、实数的绝对值

在讨论集合、区间、邻域等概念时，经常涉及实数的绝对值，回顾和复习一下这些内容十分必要.

对于任意一个实数 x，它的绝对值为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如，$|-2|=|2|=2$，$|-1.3|=1.3$，$|0|=0$ 等.

绝对值 $|x|$ 的几何意义：实数 x 的绝对值等于数轴上的点 x 到原点的距离.

绝对值有如下性质：

设 a、b 为任意两个实数，则有，

(1) $|a|=\sqrt{a^2}$；　　(2) $|a|\geqslant 0$，仅当 $a=0$ 时，$|a|=0$；

(3) $|-a|=|a|$；　　(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(5) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；　　(6) $\big||a|-|b|\big|\leqslant |a-b|$；

(7) $|a\cdot b|=|a||b|$；　　(8) $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}$ $(a\neq 0)$.

由绝对值的性质知，$|x|\leqslant a\,(a>0)$ 等价于 $-a\leqslant x\leqslant a$，因此集合 $\{x\mid |x|<a\}$ 与集

合$\{x|-a<x<a\}$是相同的.

习题 1－1

1. 用区间表示下列不等式的解集合.

(1) $|x|\geqslant 3$;　(2) $|x-2|<3$;　(3) $|2x+1|\leqslant 1$;

(4) $|5-\frac{1}{x}|<1$;　(5) $x^2-6\leqslant 0$;　(6) $x^2-x-6>0$;

(7) $0<|x-5|<1$;　(8) $|3-2x|\leqslant 1$.

2. 用列举法表示下列集合.

(1) 集合$\{x|0<|x-2|\leqslant 5, x\in \mathbf{Z}\}$;

(2) 方程$2^{x-1}=1$的根的集合;

(3) 抛物线$y^2=x$与$x=1$的交点的集合.

3. 用描述法表示下列集合.

(1) 不小于6的全体实数的集合;

(2) 抛物线$y=2x^2$与直线$y=2$的交点的集合;

(3) 点2的去心$\frac{1}{3}$邻域.

4. 设$A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$,求

(1) $A\cup B$;　(2) $A\cap B$.

5. 设$M=\{x|x^2-6x\leqslant 0\}$, $N=\{x|x^2+x-12<0\}$,求

(1) $M\cup N$;　(2) $M\cap N$.

6. 设$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$, $B=[-10,3)$.求

(1) $A\cup B$;　(2) $A\cap B$;　(3) $A\setminus B$.

第二节　函　数

一、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中,往往同时存在着多个不断变化的量(变量),这些变量并不是孤立的,而是相互联系并遵循一定的规律,函数就是描述这种联系的一个法则.

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为t,落下的距离为s,假定开始下落的时刻为$t=0$,则变量s与t之间的相依关系由数学公式$s=\frac{1}{2}gt^2$给定.其中g是重力加速度.

1. 函数的定义

定义　设x、y是两个变量,D是一个给定的非空数集。如果对于任何$x\in D$,按照一定的法则f都有唯一确定的y值与之对应,则称该对应法则f是变量x的函数,记为

$$y=f(x)\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为这个函数的定义域，也记为 D_f. 即 $D=D_f$.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$. 因为法则 f 产生因变量 y，也习惯把 y 称为 x 的函数。

$y=f(x)$ 有两重意义：当 x 为定值时，$f(x)$ 表示对应 x 的函数值；当 x 为变量时，$f(x)$ 表示 x 的函数. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为函数关系.

函数值的全体组成的集合称为函数的值域，记为 R_f，即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

注　函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素，两个函数为同一函数的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据实际意义具体确定，如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的自然定义域.

例 1　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}$$

的 x 值的全体. 解此不等式组，得

$-3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4$

所以，函数的定义域为 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

例 2　下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $s=\sqrt{t}$.

解　(1) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 不是相同的函数，因为定义域不同.

(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $s=\sqrt{t}$ 是相同的函数，因为定义域与对应法则均相同.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的. 这样定义的函数称为单值函数，否则称为多值函数.

例如，方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，对每个 $x\in(-a,a)$，都有两个 y 值 $(\pm\sqrt{a^2-x^2})$ 与之对应，因而 y 是多值函数.

注　今后若无特殊说明，函数均指单值函数.

2. 函数的表示法

函数的常用表示法有三种：表格法、图形法、公式法（解析法），这在中学大家已经熟悉. 其中公式法根据函数的解析表达式的形式不同，又分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1) 显函数　函数 y 由 x 的解析式直接表示. 例如，$y=x^2+1$.

(2) 隐函数　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程

$$F(x,y)=0$$

来确定. 例如, $\ln y=\sin(x+y)$.

(3) 分段函数　函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

例 3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$. 图形如图 1-2 所示.

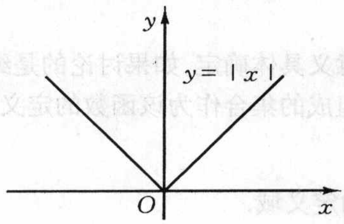


图 1-2

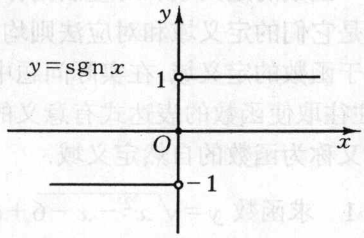


图 1-3

例 4　符号函数

$$y=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{-1,0,1\}$. 图形如图 1-3 所示.

例 5　取整函数

$$y=[x]$$

其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如,

$$[\pi]=3, [-2,3]=-3, [\sqrt{3}]=1$$

易见, 取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 其图形如图 1-4 所示.

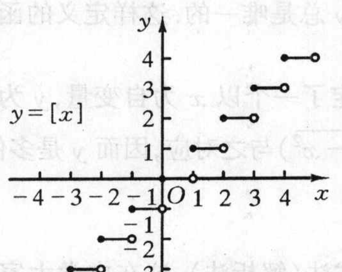


图 1-4

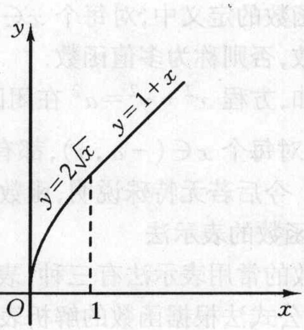


图 1-5

例 6　作出分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

的图形,并求 $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(3)$.

解　$f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $f(1)\ =2\sqrt{1}=2$, $f(3)\ =1+3=4$.

其图形如图 1－5 所示.

二、函数的四种几何特性

设函数 $y=f(x)$在某区间 I 上有定义

1. 有界性　若存在正数 M,使得在区间 I 上,$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 I 上有界.

例如,$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,因为$|\sin x|\leqslant 1$;而 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

2. 单调性　若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调减少,区间 I 称为单调减区间.单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

例如,$y=\tan x$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调增加,$y=(\frac{1}{2})^x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调减少,$y=x^2$在$(-\infty,0]$内单调减少,而在$[0,+\infty)$内单调增加.

3. 奇偶性　设 I 为关于原点对称的区间,若对于任一 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为偶函数.若对任 $-x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为奇函数.

例如,$y=\cos x$,$y=\sqrt{1-x^2}$是偶函数;$y=x^3$,$y=\sin x$ 是奇函数;而 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

4. 周期性　若存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$,有$(x\pm l)\in D$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,l 称为$f(x)$的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

设 $y=f(x)$为定义在 D 上的函数,其值域为 R_f.若对于数集 R_f 中的每个数 y,数集 D 中都有唯一的一个数 x,使 $f(x)=y$,这就是说变量 x 是变量 y 的函数,这个函数称为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 R_f,值域为 D.

函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 两者的图形是相同的.

由于人们习惯于用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,为了照顾习惯.我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示.注意,这时两者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是:由方程 $y=f(x)$ 解出 x,得到 $x=f^{-1}(y)$;将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 分别换为 y 和 x,这样,得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 7 求函数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 的反函数.

解 由原式解得 $x=\dfrac{3y-5}{y-2}$,把 x 和 y 分别换为 y 和 x,即得所求的反函数

$$y=\frac{3x-5}{x-2}.$$

四、初等函数

微积分的研究对象,主要为初等函数,而初等函数是由基本初等函数组成的.

1. 基本初等函数

常数函数 $y=C$ (C 为常数)

幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 为常数)

指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, a 为常数)

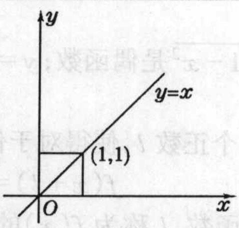
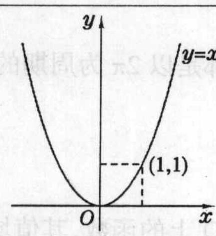
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, a 为常数)

三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ 等

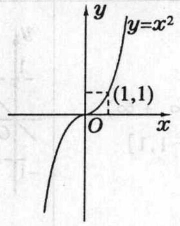
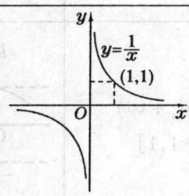
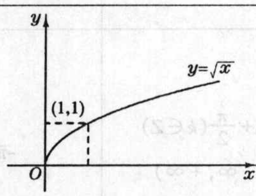
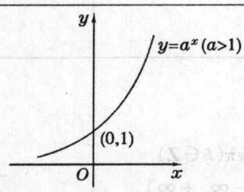
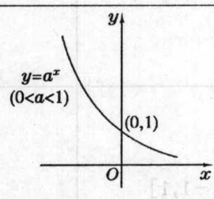
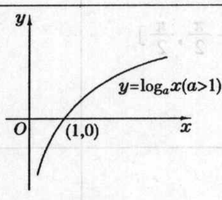
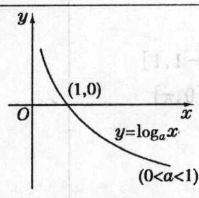
反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\mathrm{arccot}\,x$.

这六种函数统称为基本初等函数.这些函数的性质、图形在中学已经学过,为了便于应用,列表如下(表 1-1).

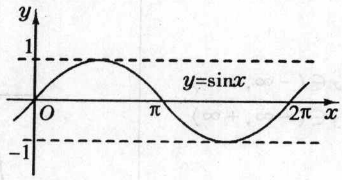
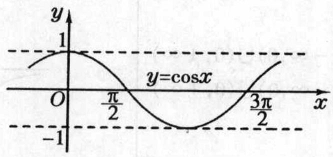
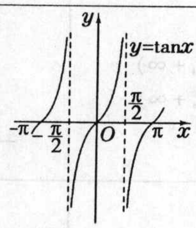
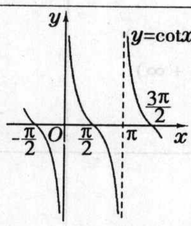
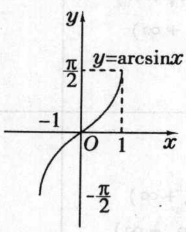
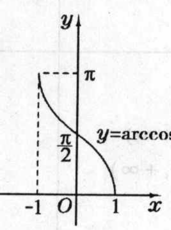
表 1-1

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

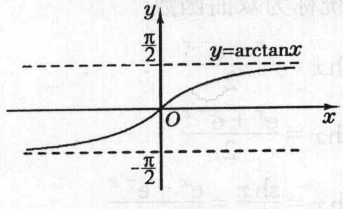
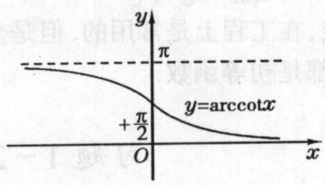
续表

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

续表

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

续表

	函数	定义域与值域	图像	特性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\text{arccot}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=g(x)$ 的值域为 R_g. 若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[g(x)]$ 为由 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 所构成的复合函数，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数. 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，其定义域为 $[-1,1]$，它是 $u=1-x^2$ 的定义域的一部分.

函数 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 不能构成复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $D_f=[-1,1]$，$u=2+x^2$ 的值域为 $R_g=[2,+\infty)$，$D_f\cap R_g=\varnothing$.

有了复合函数的概念，我们就可将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成的函数，这对于进一步分析函数的结构和今后研究微积分运算是非常重要的.

例 8　指出下列函数的复合结构

(1) $y=e^{2x}$；(2) $y=\ln(1+\cos x)$；(3) $y=\arcsin(2x+1)$.

解　(1) $y=e^u$，$u=2x$；

(2) $y=\ln u$，$u=1+\cos x$；

(3) $y=\arcsin u$，$u=2x+1$.

有时，一个复合函数可能由三个或更多个的函数构成. 例如，$y=e^{\sin(x^2+1)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 复合而成的，其中，u、v 都是中间变量.

例 9　设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求

(1) $f[g(x)]$；(2) $g[f(x)]$.

解　(1) $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$；

(2) $g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

3. 初等函数