高等学校教材

高等数学

（第二版）

上册

西安交通大学

高等数学教研室编

高等学校教材

高等数学

（第二版）

上　　册

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

本书由西安交通大学高等数学教研室在1979年版《高等数学》的基础上修订而成．本版对第一版的内容作了适当精简，体系上做了一些调整，还补充了一些综合习题，文字通畅、易懂，便于教学和自学．

全书共分上、下两册．上册内容包括函数、极限、一元微积分及其应用、级数等．

本书由华中工学院陆传务教授、林华夷副教授初审，大连工学院肖义珣教授复审，最后由工科数学教材编审委员会审定为教材．可供工科院校各专业使用．

高等学校教材

高等数学

（第二版）

上册

西安交通大学高等数学教研室编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 17.375　字数 420,000

1979年3月第1版　1985年5月第2版　1985年10月第1次印刷

印数 00,001—7,250

书号 13010·01120　定价 3.50 元

第二版前言

本书在修订过程中，认真吸收了第一版自 1979 年出版以来教学实践的经验和广大使用者的意见，并按照高等工业学校高等数学教学大纲的要求，遵循便于教学的原则，对第一版的内容作了适当的精简，在内容的编排和处理方法上，作了较大的改动.

本版的大字部分紧扣高等工业学校高等数学教学大纲的基本内容和要求. 大纲中的 * 号内容和少量补充内容均用小字排印，并保持相对的独立性，以便于不同类型和要求的读者选用.

为了克服第一版内容过多的弊病，本版删去了插值法、数值求导等内容和框图；精简了一些大纲以外而又较为枝节的内容. 为了便于更多的读者使用，本版还删去了"微积分基本分析方法"一节，但仍保留原书中阐明微分、积分等基本概念的实质及其内在联系，同时还保留了以此来处理有关应用问题的特点，同时，注意了用语的确切性. 此外，从实用的观点出发，增加了小 o 的运算及其应用等内容.

本版将第一版中分离开的微分方程重新合并为一章；把分散两处的定积分应用合在一起；旁义积分的审敛准则提前与概念紧接；含参变数的积分与广义重积分作为小字分散到有关章节. 此外，在某些问题的讲解方法上作了一些改变.

本版改正了第一版中的某些排印错误和叙述不当之处；对文字作了进一步的加工；调整、补充了章节后的习题，并每隔几章之后，配备了一定数量的综合复习题，以培养读者综合应用所学知识的能力.

本书第二版由陆传务、林化夷以及大连工学院肖义珣等同志

审查，工科数学教材编审委员会复审。审稿的同志对本书提出了许多宝贵意见，帮助我们进一步提高了本书的质量。在此，我们衷心地表示感谢。

参加本书第二版修订工作的有陆庆乐、叶维平、马知恩、周德晖。限于编者水平，书中难免还有缺点和不当之处，恳切地希望广大读者批评指正。

编　者

1984 年 6 月

前言

本书是在我室1964年和1975年编写出版的两本《高等数学》的基础上，总结了我室广大教师的教学经验改编而成的．共分上、下两册．上册包括一元函数微积分和无穷级数；下册包括向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，场论，常微分方程，傅氏级数与傅氏积分．

考虑到科学技术对数学的要求日益广泛和深入，本着加强基础的精神，本书在内容的深广度方面较前两书有所增加．除将场论，含参变量积分，傅氏积分编入了本书之外，主要增加的内容有：柯西收敛原理，一致收敛，隐函数组的微分法，重积分的一般变换公式，一致连续，广义二重积分，线性微分方程组等．与此同时，对原有的某些内容作了适当精简．例如：在极限定义中削减了给出ε求δ的要求，微分学的几个中值定理的分析证明改排小字，罗彼塔法则只就$\frac{0}{0}$型给出证明，积分法仅着重于换元法、分部积分法以及积分表的使用，有理函数的积分法等环绕查积分表讲解．

本书在给出基本概念的定义和重要定理证明的同时，注意了运用唯物辩证法思想阐明微分、积分等基本概念的本质及其内在联系．在第二章中，通过“微积分基本分析方法”一节，概括地介绍了微积分学所研究的导数与积分两类问题以及解决问题的基本思想方法，使读者对微积分思想有一概括的了解，也为引入极限概念提供了实际背景．在第五章定积分与不定积分以及第十二章重积分及其应用中，通过“积分与微分的关系及其应用”一节，阐明“积分是微分的无限积累”，并运用这一思想讲解各类积分的应用．

为了加强内容之间的有机联系，本书把有些关系紧密的内容相对地加以集中，例如：第一型线、面积分概念与重积分概念同时提出；方向导数安排在偏导数之后；部分一阶微分方程与可降阶方

程作为不定积分的应用，安排在积分应用一章中；各类广义积分与含参变量积分一起另列一章.

为了便于领会重要定理的实质和证明方法．有利于由直观到抽象能力的培养．在一些重要定理（如微分学的几个中值定理、微积分学基本定理等）的分析证明之前，先通过几何直观或物理模拟对定理加以说明.

鉴于计算技术在工程中的广泛应用，本书环绕主要内容添加了一些简单的计算方法，所附的一些简明框图是为了清晰地表达逻辑思维，同时也有助于读者进一步学习编制程序．为了加强联系实际，本书注意了向量的运用，并在空间解析几何中引入了向量的导数；加强了导数作为变化率的论述和建立积分式的训练；增添了包络等内容和一些简单的机、电方面的例题．此外，删去了1975年我室所编《高等数学》一书中某些涉及较多专业知识的实例.

本书编入了较多的小字部分，以便不同类型和要求的读者选用，某些小字内容也可作为课外自学参考．为便于自学，本书叙述比较详细，配有较多习题，书后附有答案．有关各章和全书之后尚有附录以备读者查阅.

本书承华中工学院数学教研室审查，参加审稿的有：陆传务（主审），高克强，罗汝梅，林化夷．审稿同志对本书提出了许多宝贵的修改意见．在此，我们衷心地表示感谢.

本书由叶维平、马知恩主编，陆庆乐定稿，参加编写工作的有邵济煦、葛仁杰、向隆万．参加本书编写部分工作的有周德晖、杨泽高、周长新．此外，唐象礼、寿纪麟曾参加1975年一书的编写工作．现在上海机械学院的赵孟养同志曾对1964年一书的编写做了大量工作．限于编者的水平，书中缺点、错误在所难免，恳切地希望广大读者批评指正.

编者　1979月1月

目　录

第一章　函数、极限、连续

微积分是从量的方面来研究事物运动变化规律的一种基本的数学方法，它是本书的主要内容. 函数是微积分学研究的主要对象，极限是建立微积分方法的理论基础，连续是很广泛一类函数所具有的基本性质，连续函数是微积分学所讨论的函数的主要类型. 所以，本章是微积分的基础。

§1　函　数

1-1　函数概念

关于函数概念以及常见的基本初等函数，中学已有比较仔细的讲授，这里，我们再作简要的复习，并着重指出其中一些要点.

当我们在观察、研究某些物质运动或生产过程时，常会遇到两种不同的量，一种量在过程的进行中不断变化，可取不同的数值，这种量叫做**变量**；另一种量在过程的进行中保持不变，或相对保持不变而可以看作保持一个固定的值，这种量叫做**常量**. 前者显得更为重要，因为正是通过它们，人们才能掌握事物变化的规律.

在一个具体的变化过程中，变量总有其取值范围，称为变域，而且在同一变化过程中，所涉及的各个变量之间总是相互联系、相互依赖的. 例如，在真空中自由下落的物体，经过的路程 s 随时间 t 不断变化，它们之间有如下依赖关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，变量 t 的变域是从开始时刻（设 $t=0$）到运动结束时刻（设 $t=t_1$）的一个区间 $[0, t_1]$. 对于变域 $[0, t_1]$ 上的

任一个值 t_0，根据上述关系，就有相应的路程

$$s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$$

与其对应．函数概念就是这种变量间对应关系的抽象和概括．

函数定义　设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在其变域内取得的每一个值，y 按照确定的法则有唯一确定的值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，自变量 x 的这个变域叫做函数的**定义域**．当变域是一个区间时叫做**定义区间**．对于定义域中自变量 x 的每个值，因变量 y 的对应值的全体叫做函数的**值域**，y 与 x 之间的这种对应关系就叫做**函数关系**．

函数的这个定义包含着三个内容：一是函数的定义域；二是因变量与自变量的对应法则；三是对应于自变量在定义域内所取的每一值，因变量所对应的值叫做函数值．下面分别加以说明．

函数的定义域　定义域就是允许自变量取值的范围．在实际问题中，函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的．例如，从上述自由落体运动的规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来看，并不是对任意的 t，都可以确定 s 的值，只有在物体开始下落（设 $t=0$）到运动结束（设 $t=t_1$）这段时间里，上述式子才有意义，也就是说 s 作为 t 的函数，只有当 t 在区间 $[0, t_1]$ 上取值时才有意义．可见，定义域是函数定义中的一个重要因素．当我们提到一个函数时，一般应该指明它的定义域．当我们讨论仅由数学式子表示的函数而不考虑它的实际意义时，它的定义域就是指使这个数学式子有意义的自变量的取值范围．例如，如果我们不考虑函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

的实际意义，那末这个函数的定义域应为无穷区间$(-\infty,+\infty)$.

例1 求函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3x-10}}$的定义域.

解 要使函数有意义，x应满足

$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)>0,$$

解此不等式，得$x>5$和$x<-2$，这就是函数的定义域，写成区间的形式是开区间$(-\infty,-2)$和$(5,+\infty)$.

对应法则 对应法则是因变量y与自变量x之间函数关系的具体表现. 它的表达方式可以是各种各样的，常见的有三种:

一种是用数学式子来表示的，叫做**公式表示法**，如 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，$y=\sqrt{x}$等，这种数学式子一般称为解析表达式；一种是用图形来表示的，叫做**图象表示法**，如自动记录的气温曲线等. 再一种是用表格来表示的，叫做**列表表示法**，如三角函数表、对数表等. 无论它们的表示方法如何不同，其共同本质都是刻划因变量与自变量的对应关系，所以对应法则是函数概念中最本质的因素. 变量y与变量x能构成函数关系，必须而且只须存在某一确定法则，使当x在定义域中每取一值时，y有且仅有一个确定的值与之对应. 至于这个对应法则具体的表达方式是怎样的，函数定义对此并无要求. 在定义中，我们是用记号$f(\ )$来一般地表示这种对应法则的. 这样，我们把自然现象中量与量之间错综复杂的函数关系概括成为$y=f(x)$，从而进行一般地研究. 有时我们不把因变量y明显写出，而把函数简单地记作$f(x)$. 这时$f(x)$既表示对应法则也表示因变量y. 当然，$y=f(x)$这个记号也可以用来表示x的具体函数. 例如，用$f(x)=\dfrac{1}{2}gx^2$ 表示函数 $y=\dfrac{1}{2}gx^2$，用$f(x)=\sin x$表示函数 $y=\sin x$. 但是如果我们要同时讨论几个不同的函数，

就得用不同的记号，如 $g(\quad)$, $\varphi(\quad)$, $F(\quad)$ 等等来分别表示它们不同的对应法则.

例 2 在电子技术中常遇到的三角波函数，其一个波形的表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t, & 1<t\leqslant 2,\end{cases}$$

它的图形如图 1.1 所示.

这个函数(一个波形)的对应法则在两个不同的区间内，是由两个不同的式子分段表示出来的，这样的函数叫做**分段函数**，其定义区间是 $[0, 2]$. 要注意，这是一个函数，切不可误认为是两个函数. 当 t 取 0.5 与 1.5 时，按各自所在区间的对应法则的具体表达式，u 取得的对应值分别是 $u(0.5)=0.5$ 与 $u(1.5)=2-1.5=0.5$.

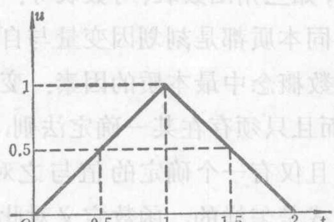

图 1.1

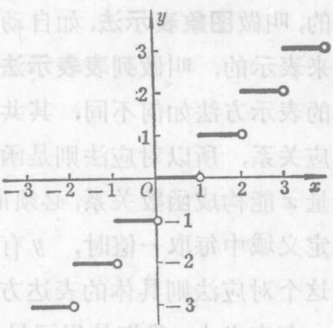

图 1.2

例 3 “取整函数”规定为：y 是不超过 x 的最大整数. 显然，对于 x 的任意一个值，都唯一地确定了 y 的一个对应值. 所以 y 是 x 的函数，记作

$$y=[x].$$

例如，$[8.23]=8$, $[-1.5]=-2$, $[5]=5$, $[\pi]=3$ 等等. 取整函数的图形如图 1.2 所示.

函数值 对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域内取得一

值 x_0 时，根据对应法则 $f(x)$ 所求得的因变量 y 的值 y_0，就叫做当 $x=x_0$ 时(或在 $x=x_0$ 处)的函数值，记作

$$y_0=f(x_0)\text{或}y_0=y|_{x=x_0}.$$

例 4 求函数 $y=x^2-3x+5$ 在 $x=2$, $x=x_0+1$, $x=x_0+h$ 各点处的函数值.

解 $y|_{x=2}=(2)^2-3(2)+5=3.$

如果用 $y=f(x)$ 表示函数 $y=x^2-3x+5$，那末

$$f(x)=x^2-3x+5,$$

于是在 $x=2$ 处的函数值为 $f(2)$，即

$$f(2)=(2)^2-3(2)+5=3.$$

同样 $f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3,$

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5\\&=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).\end{aligned}$$

例 5 求函数

$$q(\tau)=\begin{cases}0.5\tau+5, & -10\leqslant\tau<0,\\ \tau+85, & 0<\tau\leqslant10\end{cases}$$

在 $\tau=-4$, $\tau=5$ 处的函数值.

解 这是一个分段函数，不同点处的函数值应由相应区间内的式子确定. 所以,

$$q(-4)=0.5(-4)+5=3,$$

$$q(5)=5+85=90.$$

由前面的分析可知，如果一个函数的定义域及对应法则已经确定，那末函数值便随之而定. 因此，一个函数完全由定义域和对应法则确定，所以，定义域和对应法则是函数定义中的两个要素.

函数相等 如果两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的定义域相同，而且对于自变量在定义域内的任一值，它们所对应的函数值也相同，那末称这两函数相等. 记作