丛书策划　华育文化传播公司

高中生学习指导

[人教B版]

GAOZHONGSHENGXUEXIZHIDAO

数学 5

必修

辽宁师范大学出版社

G

高中生学习指导

［人教B版］

GAOZHONGSHENGXUEXIZHIDAO

丛书主编　杜贵忠

本册主编　苏文捷

本册副主编　刘子军　邢长艳

本册编者　佟国荣　吴成波　刘　娜

数学 5

必修

辽宁师范大学出版社

·大　连·

图书在版编目(CIP)数据

高中生学习指导:人教 B 版. 数学. 5:必修/杜贵忠主编. —大连:辽宁师范大学出版社,2007.9
ISBN 978-7-81103-670-1

Ⅰ.高... Ⅱ.杜... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 149985 号

出 版 人:程培杰
责任编辑:吕英辉　王　琦
责任校对:王媛媛
封面设计:李小曼

出 版 者:辽宁师范大学出版社
地　　址:大连市黄河路 850 号
邮　　编:116029
营销电话:(0411)84206854　84215261　84259913(教材)
印 刷 者:沈阳全成广告印务有限公司
发 行 者:辽宁时代华育书业发展有限公司

幅面尺寸:210mm×285mm
印　　张:5.5
字　　数:165 千字

出版时间:2007 年 9 月第 1 版
印刷时间:2007 年 9 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-81103-670-1

定　　价:8.00 元

编写说明

为了适应普通高中课程改革和使用新教材的需要，切实提高高中教学质量，并努力实现减轻学生的课业负担的目标，我们组织辽宁省部分示范性高中、重点高中的知名教师，按学科编写了高中教学辅助用书《高中生学习指导》丛书。目前，完成了语文、数学、英语(两个版本)、物理、化学、生物、思想政治、历史、地理等 9 个学科必修教材的配套用书，共 37 册，供高中教师、学生选用。

丛书体例：

《高中生学习指导》按教材的章节(或单元)顺序编排，包括以下几个部分：

目标导航：对本章节的知识结构及要点进行归纳，让学生对本章节的知识结构有个清晰的了解。

知识提要：对本节重点知识进行概括，对易混淆知识点进行讲解。

典例探源：选择典型习题或示例，并对其进行规范的分析与解答，使学生掌握正确的解题思路。

学习提点：对难掌握的知识进行归纳，梳理、提示解题方法与技巧。

学海探骊：结合本课学习内容，有针对性地精选习题，体现习题的基础性、层次性、选择性。

章末检测：对本章内容进行测试，检验学生对本章知识的掌握情况。

模块测试：对本模块教学内容进行综合测试，考查学生对模块教学内容的掌握情况。

参考答案：对全书的学海探骊、章末检测及模块测试中的习题给出正确答案，对易错题进行思路点拨。

丛书特点：

与新教材紧密配合，与课程计划同步；体现课改理念，符合课程标准要求；体现教辅用书的科学性、基础性、层次性、选择性；引导学生主动探究学科知识，指导学生掌握正确的学习方法；精选习题，注意减轻学生的学习负担；充分体现名校、名师的教学经验，实现资源共享。

本册由**东北育才学校**编写，由**苏文捷**任本册主编，**刘子军**、**邢长艳**任本册副主编。

本套丛书的编写力求贴近学生学习的实际需要，有效提高学生自主学习的能力和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。希望老师和同学们能在使用过程中，提出宝贵的补充意见和修改建议，以使本丛书在修订后更臻完善。

杜贵忠

目 录

第一章　解三角形

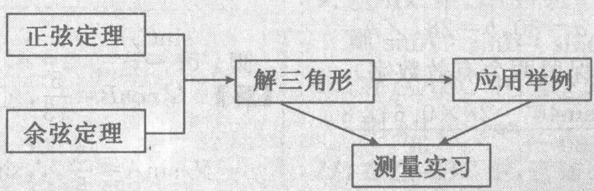
【目标导航】

作用：正弦定理、余弦定理是关于任意三角形边角之间关系的两个重要定理，它们是解决测量问题的一种重要方法.运用它们可以解决测量、工业、几何等方面的实际问题.从而使学生进一步了解数学在实际中的应用，激发学生学习数学的兴趣，培养学生由实际问题抽象出数学问题并加以解决的能力.

内容：1.通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

2.掌握用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

知识结构：



1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

知识提要

1.正弦定理

在一个三角形中，各边的长和它所对角的正弦的比相等，即$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

2.正弦定理的作用

(1)已知三角形的两角和任一边，求三角形的其他边与角.

(2)已知三角形的两边和其中一边的对角，求三角形的其他边与角.

3.正弦定理的变化

(1)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

(2)$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$(R为三角形外接圆半径)

(3)$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$.

典例探源

例1　在$\triangle ABC$中，已知$c=10$，$\angle A=45°$，$\angle C=30°$，求a，b(精确到0.01).

【解】　$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$\therefore a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{10\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{2}\approx 14.14.$

$\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，且 $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)=105^\circ$，

$\therefore b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})\approx 19.32.$

例 2　在$\triangle ABC$中，已知 $a=20, b=28, \angle A=40^\circ$，求$\angle B$（精确到 1°）和 c（保留两个有效数字）.

【解】　$\because \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 40^\circ}{20}\approx\dfrac{28\times 0.6428}{20}=0.8999$，

$\therefore \angle B_1=64^\circ, \angle B_2=116^\circ.$

当$\angle B_1=64^\circ$时，$\angle C_1=180^\circ-(\angle B_1+\angle A)=180^\circ-(64^\circ+40^\circ)=76^\circ.$

$c_1=\dfrac{a\sin C_1}{\sin A}=\dfrac{20\sin 76^\circ}{\sin 40^\circ}\approx\dfrac{20\times 0.9703}{0.6428}\approx 30.$

当$\angle B_2=116^\circ$时，$\angle C_2=180^\circ-(\angle B_2+\angle A)=180^\circ-(116^\circ+40^\circ)=24^\circ$，

$c_2=\dfrac{a\sin C_2}{\sin A}=\dfrac{20\sin 24^\circ}{\sin 40^\circ}\approx\dfrac{20\times 0.4067}{0.6428}\approx 13.$

变式 1　在$\triangle ABC$中，已知 $a=30, b=28, \angle A=40^\circ$，求$\angle B$（精确到 1°）和 c（保留两个有效数字）.

【解】　$\because \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 40^\circ}{30}\approx\dfrac{28\times 0.6428}{30}=0.5999$，

$\therefore \angle B_1=37^\circ, \angle B_2=143^\circ.$

$\because a>b, \therefore \angle A>\angle B.$

$\therefore \angle B_2=143^\circ$（舍去）.

当$\angle B_1=37^\circ$时，$\angle C=180^\circ-(\angle B_1+\angle A)=180^\circ-(37^\circ+40^\circ)=103^\circ.$

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{30\sin 103^\circ}{\sin 40^\circ}\approx\dfrac{30\times 0.9744}{0.6428}\approx 45.$

变式 2　在$\triangle ABC$中，已知 $a=10, b=28, \angle A=40^\circ$，求$\angle B$（精确到 1°）和 c（保留两个有效数字）.

【解】　$\because \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 40^\circ}{10}\approx\dfrac{28\times 0.6428}{10}=1.7998>1$，

$\therefore$此题无解.

例 3　已知$\triangle ABC$中，$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$. 试判断该三角形的形状.

【解】　已知 $a^2[\sin(A-B)-\sin(A+B)]=b^2[-\sin(A+B)-\sin(A-B)]$，

$\therefore 2a^2\cos A\sin B=2b^2\cos B\sin A.$

由正弦定理即 $\sin^2 A\cos A\sin B=\sin^2 B\cos B\sin A$，

$\therefore \sin A\sin B(\sin A\cos A-\sin B\cos B)=0.$

$\therefore \sin 2A=\sin 2B.$

由 $0<2\angle A$ 或 $2\angle B<2\pi$，得 $2\angle A=2\angle B$、$2\angle A=\pi-2\angle B$.

即$\angle A=\angle B$或$\angle A+\angle B=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

变式　在$\triangle ABC$中，$a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【解】　由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$知

$a=2R\sin A, b=2R\sin B.$

$\therefore (2R\sin A)^2\dfrac{\sin B}{\cos B}=(2R\sin B)^2\dfrac{\sin A}{\cos A}.$

$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B.$

$\therefore \sin 2A=\sin 2B.$

$\therefore 2\angle A=2\angle B$，或 $2\angle A+2\angle B=\pi$.

$\therefore \angle A=\angle B$或$\angle A+\angle B=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

例 4　在$\triangle ABC$中，已知 $\sin A=\dfrac{3}{5}, \cos B=\dfrac{5}{13}$，求 $\sin C$.

【解】　$\because \cos B=\dfrac{5}{13}, \angle B\in(0,\pi), \therefore \sin B=\dfrac{12}{13}.$

又 $\sin A=\dfrac{3}{5}, \therefore \sin A<\sin B.$

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$可知 $a<b$.

$\therefore \angle A<\angle B, \therefore \angle A$只能为锐角，$\therefore \cos A=\dfrac{4}{5}.$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\dfrac{63}{65}.$

学习提点

1. 在已知$\triangle ABC$的两边 a, b 及$\angle A$（锐角）解三角形时，解的情况有下面四种（如图 1.1-1）：

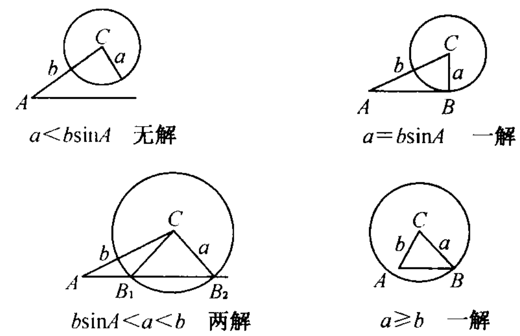


图 1.1-1

运用正弦定理解决“已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而求其他元素”这类问题时，注意对解的判断.

2. 判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形(如锐角、直角、钝角、等腰、等边三角形等).

3. 对于给定条件是边角关系混合在一起的问题，一般应运用正弦定理和余弦定理(下节学习)，一是把它统一为边的关系，或者统一为角的关系，再利用三角形的有关知识，三角恒等变形，代数恒等变形方法进行转化化简，从而得出结论.

4. 判断三角形形状问题常用结论：

(1)若 $a^2+b^2=c^2$，则$\angle C=90°$；

(2)若 $a^2+b^2>c^2$，则$\angle C<90°$；

(3)若 $a^2+b^2<c^2$，则$\angle C>90°$；

(4)若 $\sin2A=\sin2B$，则$\angle A=\angle B$ 或$\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$.

5. $\triangle ABC$ 中，下面关系成立：(1)若 $\sin A=\sin B$，则$\angle A=\angle B$；(2)若 $\sin A>\sin B$，则$\angle A>\angle B$.

学海探骊

1. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{2}$，$b=2$，$\angle B=45°$，则$\angle A$ 等于 ( )

A. 60° B. 30°

C. 60°或 120° D. 30°或 150°

2. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，则$\angle B$ 等于 ( )

A. 60° B. 30°

C. 60°或 120° D. 30°或 150°

3. 有分别满足下列条件的两个三角形 ①$\angle B=30°$，$a=14$，$b=7$，②$\angle B=60°$，$a=10$，$b=9$，那么下面判断正确的是 ( )

A. ①只有一解；②只有一解

B. ①有两解；②有两解

C. ①有两解；②只有一解

D. ①只有一解；②有两解

4. $\triangle ABC$ 中，已知$\angle B=30°$，$b=50\sqrt{3}$，$c=150$，那么这个三角形是 ( )

A. 等边三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰或直角三角形

5. 在$\triangle ABC$ 中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则$\angle B$ 为 ( )

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

6. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，最大边与最小边之比为$(\sqrt{3}+1):2$，则最大角为 ( )

A. 45° B. 60°

C. 75° D. 90°

7. 已知$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，且$\angle B=30°$，则$\triangle ABC$ 的面积等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 在$\triangle ABC$ 中，若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，那么这个三角形是 ( )

A. 直角三角形 B. 等腰直角三角形

C. 等边三角形 D. 等腰或直角三角形

9. $\triangle ABC$ 中，若$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，则 $\sin A:\sin B:\sin C=$________.

10. 在$\triangle ABC$ 中，若$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，则 $a:b:c=$________.

11. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a=x$ cm，$b=2$ cm，$\angle B=45°$，如果利用正弦定理解三角形有两解，则 x 的取值范围是________.

12. 在$\triangle ABC$ 中，内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知$\angle C=60°$，$a+b=\lambda c$.$(1<\lambda<\sqrt{3})$，求$\angle A$ 的取值范围.

1.1.2 余弦定理

知识提要

1. 余弦定理

三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，即：

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

若令$\angle C=90°$，则$c^2=a^2+b^2$，这就是勾股定理.

余弦定理还有另外一种形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

2. 余弦定理的作用

(1)已知三边，求三角.

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

这两种类型的问题在有解时都只有一个解.

典例探源

例1 已知$\triangle ABC$的三边长为$\sqrt{7}$，2，1. 求它的最大内角.

【解】 设三角形的三边分别为$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$c=1$，则最大内角为$\angle A$.

由余弦定理$\cos A=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times1}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\angle A=120°$.

变式1 已知$\triangle ABC$的三边长的比是$\sqrt{7}:2:1$，求它的最大内角.

【解】 设三角形的三边分别为$a=\sqrt{7}k$，$b=2k$，$c=k$. 则最大内角为$\angle A$.

由余弦定理$\cos A=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times1}=-\frac{1}{2}$.

$\therefore\angle A=120°$.

变式2 已知$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{7}:2:1$，求它的最大内角.

【解】 由正弦定理可得，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

$\therefore a:b:c=\sqrt{7}:2:1$，解法同变式1.

例2 在$\triangle ABC$中，$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，$2\cos A\sin B=\sin C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【解】 $\because(a+b+c)(a+b-c)=3ab$

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$.

$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\angle C=60°$，$\therefore\angle A+\angle B=120°$.

$\because 2\cos A\sin B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\therefore\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)=0$.

$\therefore\angle A=\angle B=60°$.

故$\triangle ABC$为等边三角形.

变式 在$\triangle ABC$中，如果$\frac{1-\cos A}{1-\cos B}=\frac{a}{b}$，试判定$\triangle ABC$的形状.

【解】 解法1：由余弦定理$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$得

$$1-\cos A=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

同理$1-\cos B=\frac{(a+b-c)(b-a+c)}{2ac}$.

$\because\frac{1-\cos A}{1-\cos B}=\frac{a}{b}$，

$\therefore(a+b-c)(a-b+c)=(a+b-c)(b-a+c)$.

$\because a+b>c\quad\therefore a-b+c=b-a+c$，

$\therefore a=b$. 即$\triangle ABC$为等腰三角形.

解法2：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

又$\frac{1-\cos A}{1-\cos B}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{B}{2}}$，$\frac{1-\cos A}{1-\cos B}=\frac{a}{b}$，得

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

$\therefore\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}$.

$\because\frac{1}{2}\angle A,\frac{1}{2}\angle B\in(0,\frac{\pi}{2})$，

$\therefore\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle B$，

$\therefore\angle A=\angle B$.

$\therefore\triangle ABC$为等腰三角形.

例3 已知$\triangle ABC$中，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，$\angle B=30°$，求a.

【解】 解法1：(利用正弦定理)

由正弦定理$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because c>b$，$\therefore\angle C>\angle B$.

$\therefore\angle C$有两解(锐角或钝角).

当$\angle C=60°$时，$\angle A=90°$，

$\therefore a=4$.

当$\angle C=120°$时，$\angle A=30°$，

$\therefore a=2$.

$\therefore a=4$或2.

解法 2:(利用余弦定理)

将 $b=2,c=2\sqrt{3},\angle B=30°$代入 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,得

$4=a^2+(2\sqrt{3})^2-2a\cdot 2\sqrt{3}\cos 30°$,

整理得 $a^2-6a+8=0$,解得 $a=4$ 或 2.

变式 在$\triangle ABC$ 中,已知 $b=(\sqrt{3}-1)a,\angle C=30°$,求$\angle A$、$\angle B$.

【解】 由 $b=(\sqrt{3}-1)a$,据余弦定理,得

$$c^2=b^2+a^2-2ba\cos C$$
$$=[(\sqrt{3}-1)a]^2+a^2-2a^2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=(4-2\sqrt{3})a^2+a^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)a^2$$
$$=(2-\sqrt{3})a^2.$$

$\because a>0,c>0$,

$\therefore c=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$,

$\therefore \frac{c}{a}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

由正弦定理,得

$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$.

$$\therefore \sin A=\frac{\sin C}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

由 $b=(\sqrt{3}-1)a$,知 $a>b$,

$\therefore\angle A=75°$或 $105°$.

若$\angle A=75°$,则$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)=75°$,$a=b$,与已知矛盾.

$\therefore\angle A=105°,\angle B=180°-(\angle A+\angle C)=45°$.

例 4 在$\triangle ABC$ 中,求证:$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

【证明】 证法 1:左式$=\frac{2R\sin A-2R\sin C\cos B}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}$

$$=\frac{\sin A-\sin C\cos B}{\sin B-\sin C\cos A}$$
$$=\frac{\sin(B+C)-\sin C\cos B}{\sin(A+C)-\sin C\cos A}$$
$$=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C-\sin C\cos B}{\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A}$$
$$=\frac{\sin B\cos C}{\sin A\cos C}=\frac{\sin B}{\sin A}=\text{右式}.$$

所以等式成立.

证法 2:左式$=\dfrac{a-c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b-c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

$$=\frac{\dfrac{2a^2-a^2-c^2+b^2}{2a}}{\dfrac{2b^2-b^2-c^2+a^2}{2b}}=\frac{\dfrac{a^2-c^2+b^2}{2a}}{\dfrac{b^2-c^2+a^2}{2b}}=\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

$=$右式.

所以等式成立.

变式 已知$\triangle ABC$ 中,$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边分别为 a,b,c.

(1)求证:$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$.

(2)若$\angle A=60°$,求用$\triangle ABC$ 的边表示 $\sin B$ 的解析式.

【解】 (1)证明:右边$=\frac{\sin C-\sin B\cos A}{\sin B-\sin C\cos A}$

$$=\frac{\sin(A+B)-\sin B\cos A}{\sin(A+C)-\sin C\cos A}$$
$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B\cos A}{\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A}$$
$$=\frac{\sin A\cos B}{\sin A\cos C}=\frac{\cos B}{\cos C}=\text{左边}.$$

$\therefore$原式成立.

(2)$\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{b}{a}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}b}{2a}$.

学习提点

1. 在解三角形的问题中,可根据不同的已知条件运用正弦定理、余弦定理,总结如下:

$$\left.\begin{array}{l}\text{角边角}\\\text{角角边}\\\text{边边角}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{正弦定理}\qquad\left.\begin{array}{l}\text{边角边}\\\text{边边边}\\\text{边边角}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{余弦定理}$$

2. 判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形(如锐角、直角、钝角、等腰、等边三角形等).

3. 对于给定条件是边角关系混合在一起的问题,一般应运用正弦定理和余弦定理,把它们统一为边的关系,或统一为角的关系,再利用三角形的有关知识,三角恒等变形方法,代数恒等变形方法进行转化、化简,从而得出结论.

学海探骊

1. 在$\triangle ABC$ 中,若 $a=6,b=7,c=8$,则$\triangle ABC$ 的形状是 ( )

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 无法判定

2. 在△ABC 中，$a^2=b^2+c^2+bc$，则∠A 等于 (　　)

A. 60°　　B. 45°

C. 120°　　D. 30°

3. 在△ABC 中，已知 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，且 AB 边的中线长为 1，则 c 边长为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. 3

4. 在△ABC 中，若 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，则∠$B$ 等于 (　　)

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 120°

5. 在△ABC 中，$AB=3$，$BC=\sqrt{13}$，$AC=4$，则边 AC 上的高为 (　　)

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

6. △ABC 中，$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，则∠A：∠B：∠C= (　　)

A. 1：2：3　　B. 2：3：1

C. 1：3：2　　D. 3：1：2

7. 已知△ABC 中，$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，则△ABC 的形状是 (　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不能确定

8. 已知△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{5}:\sqrt{35}:2\sqrt{5}$，则最大角的度数为________.

9. △ABC 中，若 $a^4+b^4+c^4=2(a^2+b^2)c^2$，则∠$C$ 的大小是________.

10. 已知△ABC 三边 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$，$AC=\sqrt{a^2+c^2}$，$BC=\sqrt{b^2+c^2}$，其中 $a,b,c>0$，则△ABC 是________角三角形.

11. 在△ABC 中，若 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(b^2+c^2-a^2)$，则∠$A$=________.

12. 在△ABC 中，$a=\sqrt{3}-1$，$b=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$c=\frac{\pi}{4}$，则∠B 是________.（填“锐角”、“直角”或“钝角”）

13. 在△ABC 中，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，求∠A，∠B，∠C 及 $S_{\triangle ABC}$.

14. 已知 a,b,c 是△ABC 中∠A，∠B，∠C 的对边，S 是△ABC 的面积.若 $a=4$，$b=5$，$S=5\sqrt{3}$，求 c 的长度.

15. 若以 2，3，x 为三边组成一个锐角三角形，求 x 的取值范围.

16. 在△ABC 中，如果 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且 B 为锐角，试判断此三角形的形状.

反思提升

1. 如图 1.1-2，在四边形 $ABCD$ 中，A，B 为定点，C，D 是动点，$AB=\sqrt{3}$，$BC=CD=AD=1$，△ABD 与△BCD 的面积分别为 S 与 T.

(1)求 S^2+T^2 的取值范围.

(2)当 S^2+T^2 取得最大值时，求∠BCD 的值.

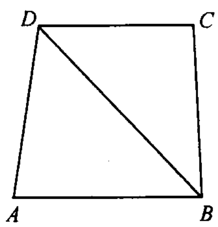


图 1.1-2

2. 已知△ABC 的三边长分别为 a,b,c.

(1)若 a,b,c 成等差数列，求∠B 的取值范围.

(2)若 a,b,c 成等比数列，求证△ABC 中有两个内角不超过 60°.

1.2 应用举例

知识提要

1. 掌握利用正弦定理、余弦定理解任意三角形的方法.

2. 了解解任意三角形的知识在实际中的应用.

3. 了解数学建模的思想方法.

4. 应用解三角形知识解实际问题的4个步骤是

(1)根据题意作出示意图.

(2)确定实际问题所涉及的三角形以及三角形中的已知或未知元素.

(3)选用正弦定理、余弦定理求解.

(4)给出答案.

典例探源

例1 如图1.2-1,要测底部不能到达的烟囱的高AB,从与烟囱底部在同一水平直线上的C,D两处,测得烟囱的仰角分别是$\alpha=45^\circ$和$\beta=60^\circ$,CD间的距离是12 m.已知测角仪器高1.5 m,求烟囱的高.

想一想:图中给出了怎样的一个几何图形?已知什么?求什么?

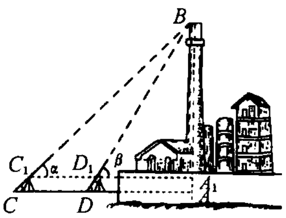


图1.2-1

【分析】 如图,因为$AB=AA_1+A_1B$,又已知$AA_1=1.5$ m,所以只要求出A_1B即可.

【解】 在$\triangle BC_1D_1$中,$\angle C_1BD_1=60^\circ-45^\circ=15^\circ$由正弦定理可得:

$$\frac{C_1D_1}{\sin\angle C_1BD_1}=\frac{BC_1}{\sin\angle C_1D_1B}.$$

$$\therefore BC_1=\frac{C_1D_1\cdot\sin\angle C_1D_1B}{\sin\angle C_1BD_1}=\frac{12\sin120^\circ}{\sin15^\circ}$$

$$=18\sqrt{2}+6\sqrt{6}.$$

$$\therefore A_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}BC_1=18+6\sqrt{3}\approx28.4.$$

$$\therefore AB=A_1B+AA_1\approx28.4+1.5=29.9(\text{m}).$$

答:烟囱的高为29.9 m.

变式 如图1.2-2要测底部不能到达的烟囱的高AB,在地面上两点C、D测得烟囱顶部的仰角分别为α、β,又测得$\angle CBD=\gamma$,$CD=a$,求烟囱的高AB.

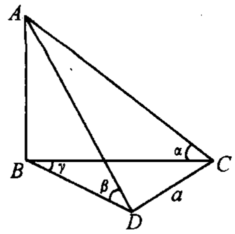


图1.2-2

【分析】 如图A,B,C,D四点不在同一平面内,欲求AB的长度.只要求得BD长度即可.

【解】 设$AB=h$,则在$\text{Rt}\triangle ABD$中,$\frac{BD}{h}=\cot\beta$.

在$\text{Rt}\triangle ABC$中,$\frac{BC}{h}=\cot\alpha$.

$\therefore BD=h\cot\beta,BC=h\cot\alpha$.

在$\triangle BCD$中,由余弦定理得

$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos\gamma$,

$a^2=h^2\cot^2\alpha+h^2\cot^2\beta-2h^2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma$,

$$\therefore h=\sqrt{\frac{a^2}{\cot^2\alpha+\cot^2\beta-2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cos^2\beta-2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma}}.$$

例2 某观测站C在目标A南偏西25°方向,从A出发有一条南偏东35°走向的公路,在C处测得公路上与C相距31 km的B处有一人正沿此公路向A走去,走20千米到达D处,此时测得CD距离为21 km,求此人所在D处与A处的距离.

【解】 如图1.2-3所示,知$\angle CAD=60^\circ$,

$$\cos B=\frac{BD^2+BC^2-CD^2}{2BC\cdot BD}$$

$$=\frac{31^2+20^2-21^2}{2\times31\times20}=\frac{23}{31}.$$

$$\therefore\sin B=\frac{12\sqrt{3}}{31},$$

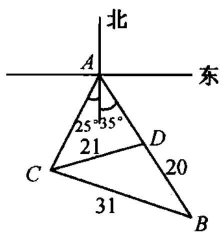


图1.2-3

在$\triangle ABC$中,$AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin\angle CAB}=24$.

由余弦定理得

$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle CAB$.

即 $31^2=AB^2+24^2-2\times AB\times 24\times\cos60^\circ$.

整理得 $AB^2-24AB-385=0$,

解得 $AB=35$ 或 $AB=-11$(舍).

故 $AD=AB-BD=35-20=15$(km)

答:此人所在 D 处与 A 处相距 15 km.

变式 在某海滨城市附近海面上有一台风,据监测,当前台风中心位于城市 O(如图 1.2-4)的东偏南 θ ($\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$)方向 300 km 的海面 P 处,并以 20 km/h 的速度向西偏北 45°的方向移动.台风侵袭的范围为圆形区域,当前半径为 60 km,并以 10 km/h 的速度不断增大,问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?

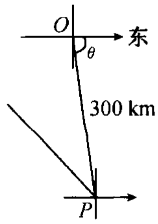


图 1.2-4

【解】 设在 t h 时台风中心为 Q,此时台风侵袭的圆形区域半径为 $(10t+60)$km,若在 t 时刻城市 O 受到台风的侵袭,则 $OQ\leqslant 10t+60$.

由余弦定理,得 $OQ^2=PQ^2+PO^2-2PQ\cdot PO\cdot\cos\angle OPQ$.

由于 $PO=300$ km,$PQ=20t$ km.

$\cos\angle OPQ=\cos(\theta-45^\circ)=\cos\theta\cos45^\circ+\sin\theta\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{10^2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}$.

$\therefore OQ^2=20^2t^2-9\ 600t+300^2$,

因此 $400t^2-9\ 600t+300^2\leqslant(10t+60)^2$

即 $t^2-36t+288\leqslant 0$,解得 $12\leqslant t\leqslant 24$.

答:12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

例 3 在奥运会垒球比赛前,C 国教练布置战术时,要求击球手以与连结本垒及游击手的直线成 15°的方向把球击出,根据经验及测速仪的显示,通常情况下球速为游击手最大跑速的 4 倍,问按这种布置,游击手能不能接着球?

【解】 要注意将数学知识与实际垒球常识相联系,将问题抽象为一个解三角形的纯数学问题.如图 1.2-5 所示,设游击手能接着球,接球点为 B,而游击手从点 A 跑出,本垒为 O 点,设从击出球到接着球的时间为 t,速度为 v,则 $\angle AOB=15^\circ$,$OB=vt$,$AB\leqslant\frac{v}{4}\cdot t$,在 $\triangle AOB$ 中,由正弦定理,

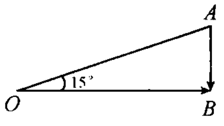


图 1.2-5

得 $\frac{OB}{\sin\angle OAB}=\frac{AB}{\sin15^\circ}$

$$\therefore \sin\angle OAB=\frac{OB\sin15^\circ}{AB}\geqslant\frac{vt}{\frac{vt}{4}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

而 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=8-4\sqrt{3}>8-4\times1.74>1$,即 $\sin\angle OAB>1$.

$\therefore$ 这样的 $\angle OAB$ 不存在,因此,游击手不能接着球.

例 4 一物体受到两个大小均为 60 N 的力的作用,两力夹角为 60°且有一力方向水平,求合力的大小及方向.

【解】 如图 1.2-6,设 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 分别表示两力,以 OA,OB 为邻边作▱$OACB$,则 $\overrightarrow{OC}$ 就是合力.

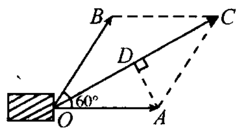


图 1.2-6

据题意知 $\triangle OAC$ 为等腰三角形,且 $\angle COA=30^\circ$,过点 A 作 $AD\perp OC$ 于点 D,则在 Rt$\triangle OAD$ 中 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}|\cos30^\circ=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$,故 $|\overrightarrow{OC}|=2|\overrightarrow{OD}|=60\sqrt{3}$.

答:合力的大小为 $60\sqrt{3}$ N,方向与水平方向成 30°角.

学习提点

1. 利用解斜三角形解决有关测量问题时,其关键在于透彻理解题目中有关测量术语,如:

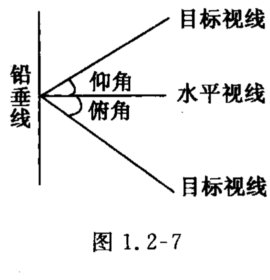


图 1.2-7

(1)仰角和俯角是指与目标视线在同一垂直平面内的水平视线和目标视线的夹角,其中目标视线在水平视线上方时叫做仰角,目标视线在水平视线下方时叫做俯角.

(2)方向角是指从指定方向线到目标方向线的水平角,如北偏西 30°(或北 30°西)是指测量的正北方向向西旋转 30°所成的角.

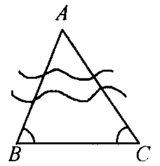
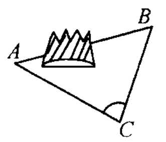
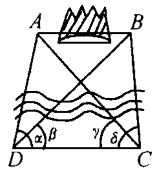
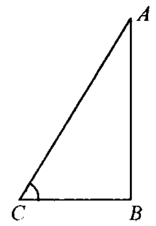
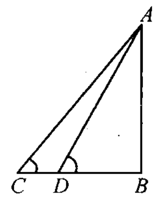
(3)方位角是指从正北方向顺时针旋转到目标方向线的水平角.

(4)坡度则是指坡面与水平面所成的角的度数.

解决此类问题的关键在于构造三角形,也就是建立解斜三角形的模型,要认真体会和理解数

学建模的思想方法.

2. 测量中常用的基本方法：

情况	求水平距离			求垂直距离	
	两点间能看到而不能到达	两点间不能看到，又不能通过	两点间不能看到不能通过、不能到达	底部可到达	底部不可到达
图形					
测量元素	$\angle B$、$\angle C$ BC	AC、BC、$\angle C$	α、β、γ、δ、CD	$\angle C$ BC	$\angle C$,$\angle ADB$,CD
解法	用两角一边求出 AB (正弦定理)	用两边及它们夹角求出 AB (余弦定理)	先由正弦定理求 BC,再由余弦定理求出 AB(正、余弦定理综合运用)	$AB=BC\cdot\tan C$	$AB=\dfrac{CD}{\cot\angle C-\cot\angle ADB}$

3. 熟悉三角形中有关公式

解斜三角形主要应用正弦定理和余弦定理，有时也会用到周长公式和面积公式.

$P=(a+b+c)$(P 为三角形的周长)

$S=\frac{1}{2}ah_a$(h_a 表示 a 边上的高)

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

$S=\frac{abc}{4R}$(R 为外接圆半径)

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(r 为内切圆半径)

除此还需熟悉两角和差的正弦、余弦、正切公式及二倍角的正弦、余弦、正切公式.

学海探骊

1. 从 A 处望 B 处的仰角为 α，从 B 处望 A 处的俯角为 β，则 α、β 的关系为 (　　)

A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha=\beta$

C. $\alpha+\beta=90°$　　D. $\alpha+\beta=180°$

2. 某人向正东方向走 x km 后，向右转 150°然后朝新方向走 3 km，结果他离出发点恰好为 $\sqrt{3}$ km，那么 x 的值是 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$　　D. 3

3. 如图 1.2-8 所示，D,C,B 三点在地面同一直线上，$DC=a$，从 C,D 两点测得 A 点的仰角分别是 β,α($\alpha<\beta$)，则 A 点到地面的距离 AB 等于(　　)

A. $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

B. $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$

C. $\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

D. $\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$

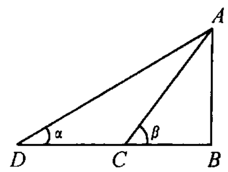


图 1.2-8

4. 在一幢 20 m 高的楼顶测得对面一塔顶的仰角为 60°，塔基的俯角为 45°，那么这座塔高是 (　　)

A. $20(1+\frac{\sqrt{3}}{3})$m　　B. $20(1+\sqrt{3})$m

C. $10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$m　　D. $20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$m

5. 某炮兵阵地位于 A 处，两观察所分别位于 D 处和 C 处，已知$\triangle ADC$ 为正三角形，且 $DC=a$，当目标出现在 B 处时，测得$\angle CDB=45°$，$\angle BCD=75°$，则炮兵阵地与目标的距离 AB 为________.

6. 在一幢高 40 m 的楼顶测得对面一塔顶的仰角为 60°，塔基的俯角为 30°，则该塔的高度为________ m.

7. 一艘船以 $22\sqrt{6}$ n mile/h 的速度向正北航行，在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 45°，1 小时 30 分后航行到 B 处，在 B 处看灯塔 S 在船的南偏东 15°，则灯塔 S 和 B 处之间的距离为________.

8. 一角槽横断面如图 1.2-9 所示，四边形 $ADEB$ 为矩形，若 $\alpha=50°$，$\beta=70°$，$AC=90$ mm，$BC=150$ mm，则 DE 的长为________.

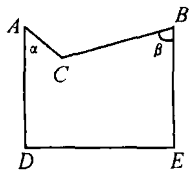


图 1.2-9

9. 如图 1.2-10，某人在山顶 P 处观察地面上有相距 2 500 m 的 A，B 两个目标，测得 A 在南偏西 57°，俯角为 30°，同时测得 B 在南偏东 78°，俯角为 45°，求山高 PQ.

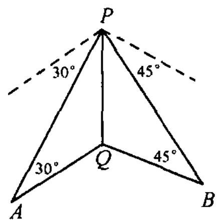


图 1.2-10

10. 如图 1.2-11 所示，甲舰在 A 处，乙舰在 A 的南偏东 45°方向的 B 处距 A 有 9 n mile 以 20 n mile/h的速度沿南偏西 15°行驶. 若甲舰以 28 n mile/h 的速度行驶，应沿什么方向，用多少小时，能尽快追上乙舰？

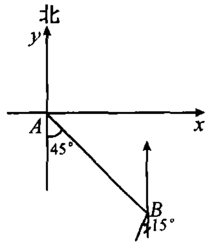


图 1.2-11

11. 在一个很大的湖岸边(可视湖岸为直线)停放着一只小船，由于缆绳突然断开，小船被风刮跑，其方向与河岸方向成 15°，速度为 2.5 km/h，同时岸上有一人从同一地点开始追赶小船，已知他在岸上跑的速度为4 km/h. 在水中游的速度为 2 km/h. 问：此人能否追上小船？如果小船的速度改变，那么小船能够被人追上的最大速度为多少？

章末检测

一、选择题

1. 在△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，则此三角形的最小内角是 ( )

A. 60°　　B. 45°

C. 30°　　D. 以上答案都不对

2. 在锐角△ABC 中，$a=1$，$b=2$，那么边 c 满足的关系是 ( )

A. $1<c<\sqrt{3}$　　B. $1<c<\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}<c<\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}<c<3$

3. 在△ABC 中，已知 $a=18$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=75^\circ$则 b 等于 ( )

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. $9\sqrt{6}$　　D. $\frac{32}{3}$

4. 在△ABC 中，$a=80$，$b=100$，$\angle A=45^\circ$，则此三角形解的情况是 ( )

A. 一解　　B. 两解

C. 一解或两解　　D. 无解

5. 在△ABC 中，$\angle A=105^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$BC=1$，则 AB 等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　D. 以上都不对

6. 在△ABC 中，已知 $\sin A=2\sin B\cos C$ 且 $\frac{a+b+c}{b+c-a}=\frac{3b}{c}$，则△$ABC$ 为 ( )

A. 直角三角形　　B. 钝角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

7. 已知△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=k:(k+1):2k(k\neq 0)$，则 k 的取值范围为 ( )

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

8. 如图 1-1，已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 O 的距离都等于 a km，灯塔 A 在观测站 O 的北偏东 20°，灯塔 B 在观测站 O 的南偏东 40°，则灯塔 A 与灯塔 B 的距离为 ( )

A. a km　　B. $\sqrt{3}a$ km

C. $\sqrt{2}a$ km　　D. $2a$ km

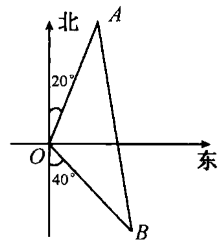


图 1-1

9. 在△ABC 中，$a^2\tan B=b^2\tan A$，则$\angle A$ 与$\angle B$ 的关系是 ( )

A. $\angle A=\angle B$　　B. $\angle A+\angle B=90^\circ$

C. $\angle A=\angle B$ 或$\angle A+\angle B=90^\circ$　　D. $\angle A=\angle B$ 且$\angle A+\angle B=90^\circ$

10. 已知△ABC 中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$\angle B=30^\circ$，则△ABC 的面积等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\frac{C}{2}}$，则$\triangle ABC$是　　（　　）

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

12. 关于x的方程$x^2-x\cos A\cos B-\cos^2\dfrac{C}{2}=0$有一个根为1，则$\triangle ABC$一定是　　（　　）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 钝角三角形

二、填空题

13. 在$\triangle ABC$中，若$a=7$，$b=8$，$\cos C=\dfrac{13}{14}$，则$\triangle ABC$的最大角的余弦值是________.

14. 如图1-2所示，$\triangle ABC$是简易遮阳棚，A、B是南北方向上两个定点，正东方向射出的太阳光线与地面成40°角，为了使所遮阴影面ABD面积最大，遮阳棚ABC与地面所成的角为________.

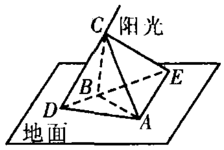


图 1-2

15. 若$\triangle ABC$三个角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$成等差数列，且最大边是最小边边长的2倍，则$\angle A:\angle B:\angle C=$________.

16. 在$\triangle ABC$中，已知$b^2-bc-2c^2=0$，且$a=\sqrt{6}$，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，则$\triangle ABC$的面积等于________.

三、解答题

17. 在$\triangle ABC$中，已知$\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\tan B=\dfrac{1}{3}$，且最长边长为1，求$\angle C$及$\triangle ABC$中最短边的长.

18. 已知在半径为R的圆内接$\triangle ABC$，$2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，求$\angle C$.