

常州工学院数学教学部 编

大学数学

习题指导

MATHEMATICS

ISBN 978-7-81137-112-3



9 787811 371123 >

定价: 17.00元

◆ 苏州大学出版社

大学数学习题指导

常州工学院数学教学部 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学习题指导/常州工学院数学教学部编. —苏州:
苏州大学出版社, 2008. 8
ISBN 978-7-81137-112-3

I. 大… II. 常… III. 高等数学-高等学校-习题
IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 127508 号

大学数学习题指导

常州工学院数学教学部 编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)

江苏省新华书店经销

宜兴文化印刷厂印装

(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787×1092 1/8 印张 10.5 字数 260 千

2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-112-3 定价:17.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

前 言

高等数学是高等院校的一门重要基础理论课. 作为应用型本科院校学生, 要学好这门课程, 必须要有与教材相适宜的、符合学生特点的习题进行练习.

我们经过多年的教学实践和摸索, 本着注重基础、由浅入深、难度适中的原则, 力求使本书既与教学大纲要求内容相吻合, 又能够减轻学生的负担, 同时方便教师的教学和作业批改. 本书每章习题分为必做题和思考题两部分, 书的最后根据题目的难易程度给出参考答案、解题思路或者完全解答, 以方便同学学习.

本书由常州工学院数学教学部组织教师编写, 参加本书编写的人员有: 许定亮、秦勇、王忠英、张驰、高波、王志芳、吴玉珍、邓理进、徐宜民、贾达明、冯庆红、陶永祥、丁仲明. 本书的编写还得到了常州工学院理学院和教务处的的大力支持, 在此表示感谢!

限于我们的水平和经验, 书中难免存在不足之处, 恳请广大师生批评指正.

编 者

2008 年 6 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第二章 导数与微分	(7)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(13)
第四章 不定积分	(19)
第五章 定积分	(23)
第六章 定积分的应用	(29)
第七章 空间解析几何与向量代数	(33)
第八章 多元函数微分法及其应用	(37)
第九章 重积分	(45)
第十章 曲线积分与曲面积分	(51)
第十一章 无穷级数	(55)
第十二章 微分方程	(59)
参考答案	(65)

第一章 函数与极限

1. 填空题:

(1) 设 $f(x) = \sqrt{2-x} + \lg(\lg x)$, 其定义域为_____;(2) 设 $f(x) = \ln(x+1)$, 其定义域为_____;(3) 设 $f(x) = \arcsin(x-3)$, 其定义域为_____;(4) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(\sin x)$ 的定义域为_____;(5) 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则 $y = f(x^2)$ 的定义域为_____.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sin \sqrt{x}$;(2) $y = e^{\frac{1}{x}}$;(3) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域: (a) $y = f(e^x)$; (b) $y = f(\ln x)$.

3. 求下列由所给函数构成的复合函数:

(1) $y = u^2, u = \sin v, v = x^2$;(2) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2$;(3) $y = u^2, u = e^v, v = \sin x$;(4) 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f[f(x)], f[g(x)]$.4. 根据函数极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$.

5. 计算下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right);$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x-3};$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1};$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x^2}\right);$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2};$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$

6. 利用极限准则证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1;$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$

7. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x-1};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}.$

8. 比较下列无穷小的阶:

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$;

(2) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 - x$ 与 $\frac{1}{2}(1 - x^2)$;

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2^x + 3^x - 2$ 与 x .

9. 利用等价无穷小的性质求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 是正整数}).$

10. 填空题:

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + k}{x - 3} = 4$, 则 $k =$ _____;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right) =$ _____;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1)(x^2 + 3x + 2)}{2x^5 + 5x^3} =$ _____;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{kn} = e^{-3}$, 则 $k =$ _____;

(5) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是比 $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}$ _____ 的无穷小;

(6) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $1 - \sqrt{1-x}$ 与 x 相比较是 _____ 无穷小;

(7) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & x < 0, \\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $a =$ _____.

11. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0, \end{cases}$ 应当怎样选择 a , 才能使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续函数?

13. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 应当怎样选择数 a , 才能使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续?

(6) 设 $y = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, 则 $x=1$ 为 y 的_____间断点;

(7) 已知 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, 则当 a 为_____时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处连续;

(8) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的连续区间为_____;

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 0, \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a =$ _____.

16. 利用函数的连续性求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$;

14. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点的类型.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x}$;

15. 填空题:

(1) 函数 $y = \frac{x}{\sin x}$ 有间断点_____, 其中_____为其可去间断点;

(2) 若当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(0) =$ _____;

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续是 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续的_____条件;

(4) 函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点是_____;

(5) $x=0$ 是函数 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的第_____类间断点;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$;

(4) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, 求 $\lim_{t \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{t-1}\right)$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}$.

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

17. 证明: 方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \cdot \sin \frac{2}{x}.$$

思考题

1. 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .

2. 证明: 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在.

5. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) > a, f(b) < b$, 证明: 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = \xi$.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{x};$$

第二章 导数与微分

1. 填空题:

(1) 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $f(x_0)=0, f'(x_0)=1$, 则 $\lim_{h \rightarrow \infty} h f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) =$ _____;(2) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导, 且 $f'(x_0)=k$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h} =$ _____;(3) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = k f'(x_0)$, 则 $k =$ _____;(4) 设 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处可导, 且 $f'(2)=1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} =$ _____;(5) 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sin x, & x < 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____, $f'(0) =$ _____.2. 求曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.3. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. 设函数 $\varphi(x) = \frac{2}{3}x, f(x) = 2x - |x|$. (1) 求 $f[\varphi(x)]$; (2) $f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处是否连续? (3) $f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处是否可导?

5. 求下列函数的导数:

(1) $y = 5x^3 - 2^x + \sin x$;

(2) $y = x^2 \ln x$;

(3) $y = \frac{\ln x}{x}$.

6. 求下列函数在给定点的导数值:

(1) $y = \sin x - \cos x$, 求 $y' \left(\frac{\pi}{6} \right)$;

(3) $y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1 - e^{3x}}$;

(2) $\rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$, 求 $\left. \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\theta = \frac{\pi}{4}}$;

(4) $y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x$.

(3) $y = x \sin \left(\frac{\pi}{4} + \ln x \right)$, 求 $y' \Big|_{x=1}$.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = e^{-3x^2}$;

(2) $y = \ln(1+x^2)$;

8. 填空题:

(1) 曲线 $y = \frac{1}{3}x^3$ 上平行于直线 $x - 4y = 5$ 的切线方程为 _____;

(2) 曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \right)$ 处的法线斜率是 _____.

9. 求下列函数的高阶导数:

(1) 设 $y = 2x^2 + \ln x$, 求 y'' ;

(2) 设 $f(x) = (x+10)^5$, 求 $f''(2)$;

(2) 设 $y=f(x)$ 由方程 $ye^x + \sin xy = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=1}$;

(3) 设 $y=f(x)$ 由方程 $\sin xy - \ln \frac{x+1}{y} = 1$ 确定, 求 $y' \Big|_{x=0}$;

(4) $y = xe^x$, 求 $y^{(n)}$.

(4) 设 $y=f(x)$ 由方程 $ye^y = e^{x-1}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{y=1}$;

10. 填空题:

(1) 设一质点按 $s(t) = \sin^2(\omega t + \varphi)$ 做直线运动, 则质点在时刻 t 的速度 $v(t) =$ _____, 加速度 $a(t) =$ _____;

(2) 设 $f(x) = \ln(1-x)$, 则 $f^{(n)}(0) =$ _____;

(3) 设 $f(x) = x \cdot e^{-x}$, 则 $f^{(n)}(x) =$ _____.

11. 求下列函数的导数:

(1) 设 $y=f(x)$ 由方程 $y^2 - 2xy + 9 = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(5) 设 $y = 1 - xe^y$, 求 y' ;

(6) 设 $y = x^{-x^2}$, 求 y' ;

(7) 设 $y = \sqrt{x}$ ($x > 0$), 求 y' ;

(8) 设 $f(x) = 3^x + x^3 + x^x \sin x$, 求 $f'(x)$;

(9) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

12. 求下列函数的导数:

(1) 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) 设 $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sec t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(3) 设 $\begin{cases} x = 2\sin t - t^2, \\ y = 3\cos t + 3t^2, \end{cases}$ 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(4) 设 $\begin{cases} x=2t^2-1, \\ y=\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(5) 设 $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(6) 设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}, \\ y=\arctant, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

13. 填空题: 函数 $\begin{cases} x=t \cdot e^t, \\ y=\ln(2-e^t) \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为_____.

14. 求由曲线 $\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t} \end{cases}$ 在相应 $t=0$ 点处的切线方程和法线方程.

15. 求下列函数的微分:

(1) 设 $y=2^x + \frac{\sin x^2}{x}$, 求 dy ;

(2) 设 $y=\tan x \cdot \arcsin \sqrt{1-x^2}$, 求 dy ;

(3) 设 $y=x^x$, 求 dy ;

(4) 设 $y=e^{-ax} \cdot \sin bx$, 求 dy ;

(5) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, 求 dy .

思考题

1. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

2. 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 求 $f'(t)$.

3. $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \left(\sin \frac{1}{x}\right)$, 求 y' .

4. $f(x) = e^{\sin^2(1-x)}$, 求 $f'(x)$.

5. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程.

6. 设 $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$, 求 $y^{(n)}$.

第三章 微分中值定理与导数的应用

1. 函数 $y=x^2-1$ 在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理的 $\xi=$ _____.
2. 若 $f(x)=x^3$ 在 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$ _____.
3. $f(x)=x^2+x-1$ 在区间 $[-1,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$ _____.
4. 函数 $y=\ln(x+1)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$ _____.
5. 试证明:对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

6. 用拉格朗日中值定理证明下列不等式:

(1) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$;

(2) 当 $a > b > 0$ 时, $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

7. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x}-1} \right)$.

8. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$;

(2) $y=2x+\frac{8}{x} \quad (x>0)$.

9. 利用函数的单调性证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$;

(2) $y = x + \sqrt{1-x}$.

(2) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$;

11. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leq x \leq 4$;

(3) 当 $x > 1$ 时, $e^x > ex$.

(2) $y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leq x \leq 3$;

10. 求下列函数的极值:

(1) $y = x - \ln(1+x)$;

(3) $y = x + \sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1$.