中等职业教育公共基础课教学改革规划教材

应用数学基础

王英杰 翟钰凤 主编

MATHEMATICS

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

中等职业教育公共基础课教学改革规划教材

应用数学基础

主　编　王英杰　翟钰凤
副主编　王新芳
参　编　孙曼曼　石爱军
主　审　周　凯

机械工业出版社

本书是根据教育部2000年8月颁布的《中等职业学校数学教学大纲（试行）》及中等职业教育教学要求编写的。

本书共11章，内容涉及不等式、集合、函数，指数函数与对数函数，三角函数及其应用，数列，平面向量及其应用，复数，直线，二次曲线，空间图形，排列、组合、概率，线性代数等。

本书可作为中等职业学校机械类、电子类、管理类、经济类等专业的文化基础课程教材，也可作为成人教育培训教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础/王英杰，翟钰凤主编．—北京：机械工业出版社，2008.6

中等职业教育公共基础课教学改革规划教材

ISBN 978-7-111-24311-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①王…②翟… Ⅲ.应用数学—专业学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第087760号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：宋 华 责任编辑：宋 华 版式设计：张世琴
责任校对：李 婷 封面设计：王伟光 责任印制：李 妍
北京中兴印刷有限公司印刷
2008年8月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 14印张 · 343千字
0 001—4 000册
标准书号：ISBN 978-7-111-24311-3
定价：23.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：(010)68326294
购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：(010)88379199
封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是根据教育部2000年8月颁布的《中等职业学校数学教学大纲（试行）》及中等职业教育教学要求编写的，可作为中等职业学校机械类、电子类、管理类、经济类等专业的文化基础课程教材，也可作为成人教育培训教材。

针对目前中等职业教育应用数学课程教学过程中出现的新要求、新情况以及某些教材中存在的问题，我们查阅了大量的参考资料，进行了多次专题交流与研讨，并积极汲取各种现有教材的精华，认真制定了编写提纲，并进行了合理的编写。

本书共包含11章，内容包括：不等式、集合、函数，指数函数与对数函数，三角函数及其应用，数列，平面向量及其应用，复数，直线，二次曲线，空间图形，排列、组合、概率，线性代数等。

本书建议教学时数64学时左右，用书学校可以根据专业培养目标差异进行合理选择与组合。在编写过程中，本书主要突出以下几个方面：

（1）涉及的知识面较宽，内容浅显易懂，便于学生复习与自学。

（2）突出概念介绍，语言精炼，图表直观，注重内容的系统性和逻辑性。

（3）举例密切联系生活、生产和工程实例，突出应用与实践相结合。

（4）练习题紧紧与内容相扣，不出难题、怪题以及与日常生活不相关的题，重点让学生掌握和巩固最基本的概念、定义、定律、定理、推论等知识。

（5）练习题形式多样，包括填空题、选择题、判断题、计算题、综合题等形式，尽量适应大多数学生的基本情况。

本书由王英杰和翟钰凤任主编，王新芳任副主编，周凯任主审。王英杰负责拟定编写提纲与编写要求，并负责对编写内容进行统稿。

本书第一章由太原市职工培训中心孙曼曼编写；第二章、第三章（第一节至第七节）、第五章及第六章由太原铁路机械学校王新芳编写；第三章（第八节至第九节）、第四章、第八章至第十一章由太原铁路机械学校翟钰凤编写；第七章由山西大学职业技术学院王英杰和石爱军编写。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请广大读者批评与指正。同时，本书在编写过程中参考了大量的文献资料，在此向文献资料的作者致以诚挚的谢意。

编　者

目　　录

第一章　不等式　集合　函数

不等式、集合和函数是数学中重要的基本知识，是现实世界中量与量之间依存关系在数学中的反映，是学习高等数学及其他知识的基础，在社会实践中应用广泛.

第一节　不　等　式

一、一元一次不等式组

1. 定义

几个含有相同未知数的一元一次不等式所组成的不等式组，称为一元一次不等式组. 不等式组中各个不等式的解的公共部分，称为不等式组的解. 例如

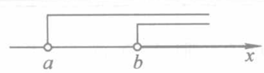
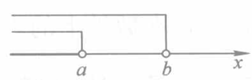
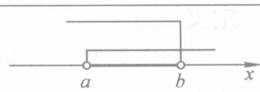
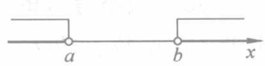
$$\begin{cases}3x+2\geqslant 0\\1-2x\leqslant 0\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}2x+4>0\\3x-4<0\\x-1\leqslant 0\end{cases}$$

就是一元一次不等式组.

2. 一元一次不等式组的解法

如表 1-1 所示，两个一元一次不等式所组成的不等式组的解有四种状态（a 和 b 均为实数，且 $a<b$）.

表 1-1　不等式组的解

不 等 式 组	不等式组的解	在数轴上的表示
$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$x>b$	 a)
$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$x<a$	 b)
$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	$a<x<b$	 c)
$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$	无解	 d)

例 1 解一元一次不等式组，并用数轴表示.

$$\begin{cases}3x>4x+5\\4x+7<2x+3\end{cases}$$

解：分别解各不等式，得

$$\begin{cases}x<-5\\x<-2\end{cases}$$

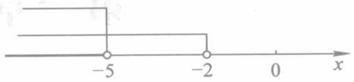


图 1-1

故不等式组的解为 $x<-5$，在数轴上的表示如图 1-1 所示.

二、绝对值不等式

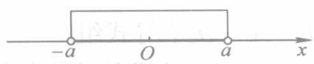
1. 定义

含有绝对值符号的不等式称为绝对值不等式. 例如，$|x|>5$，$|3x-3|<6$ 等都是绝对值不等式.

2. 绝对值不等式的解法

一个实数的绝对值的几何意义是：在数轴上表示这个数的点到原点的距离. 所以，$|x|<a$或$|x|>a$（$a>0$）的解可以列成表 1-2.

表 1-2 绝对值不等式的解

绝对值不等式	绝对值不等式的解	在数轴上的表示
$\|x\|<a$	$-a<x<a$	 a)
$\|x\|>a$	$x<-a$ 或 $x>a$	 b)

例 2 解不等式 $|3x-3|<6$.

解：原绝对值不等式可转化为 $-6<3x-3<6$，即 $-3<3x<9$. 所以，原绝对值不等式的解为 $-1<x<3$，在数轴上的表示如图 1-2 所示.

图 1-2

三、一元二次不等式

1. 定义

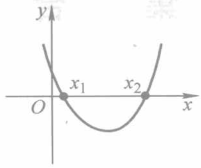
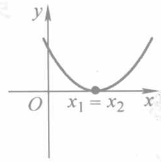
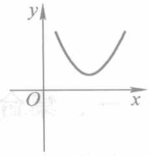
含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的不等式，称为一元二次不等式. 它的一般形式是：$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（a、b、c 为任意实数，$a\neq0$）.

例如，$4x^2-3x-2>0$，$3x^2-6x+2<0$ 都是一元二次不等式.

2. 一元二次不等式的解法

根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的图像可得出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 与 $ax^2+bx+c<0$的解，如表 1-3 所示. 如果 $a<0$，不等式两边可乘以-1，将二次项系数转化为正值情形处理.

表 1-3　二次函数的解

$y=ax^2+bx+c$ 的图像（$a>0$）	 a)	 b)	 c)
$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	两实根为 x_1 和 x_2（$x_1<x_2$）	两实根相等 $x_1=x_2$	无实根
$ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解	$x_1<x<x_2$	无解	无解
$ax^2+bx+c>0$（$a>0$）的解	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq x_1$ 的全体实数	全体实数

例 3　解不等式 $-x^2+x+12>0$.

解：原不等式可转化为 $x^2-x-12<0$. 因为方程 $x^2-x-12=0$ 的实根是 $x_1=-3$，$x_2=4$，所以由图 1-3 可知不等式 $-x^2+x+12>0$ 的解是 $-3<x<4$.

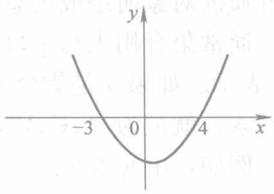


图　1-3

例 4　解不等式 $\dfrac{x+2}{x-3}<0$.

解：不等式 $\dfrac{x+2}{x-3}<0$ 与不等式 $(x+2)(x-3)<0$ 有相同的解. 因为 $(x+2)(x-3)=0$ 的根是 $x_1=-2$，$x_2=3$，所以，由图 1-4 可知不等式 $(x+2)(x-3)<0$ 的解为 $-2<x<3$.

故不等式 $\dfrac{x+2}{x-3}<0$ 的解为 $-2<x<3$.

例 5　解不等式 $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{2x+3}>0$.

解：原不等式可转化为 $\dfrac{2}{(2x+1)(2x+3)}>0$，此不等式与不等式 $(2x+1)(2x+3)>0$ 具有相同的解. 因为方程 $(2x+1)(2x+3)=0$ 的根为 $x_1=-\dfrac{3}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$. 所以由图1-5 可知原不等式的解为 $x_1<-\dfrac{3}{2}$，$x_2>-\dfrac{1}{2}$.

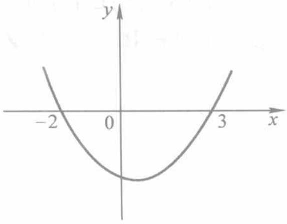


图　1-4

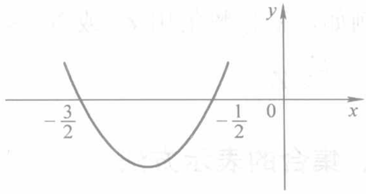


图　1-5

第二节 集 合

一、集合的概念

分析下列几组对象：

（1） 小于 6 的自然数；

（2） 全校的学生；

（3） 直线上的所有点；

（4） $2x-5x+2>0$ 的所有解.

可以看出，上述几类分析对象是由一些数、学生、点和解所组成的. 我们把具有某种特定性质的对象所组成的总体称为集合（或简称集），集合中的各个对象称为这个集合中的元素. 通常集合用大写字母 A、B、C、$D\cdots$表示，而集合中的各个元素用小写字母 a、b、c、$d\cdots$表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就记为“$a\in A$”，读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记为“$a\notin A$”，读作“a 不属于 A”.

例如，由元素 1、2、3、4、5 组成的集合可用 A 表示，则 $1\in A$，$6\notin A$.

为了形象直观地表示集合，通常用一条封闭的曲线围成的图形表示集合，封闭曲线内部的点表示这个集合的元素. 这样的图形称为文氏（Venn）图，如图 1-6 所示.

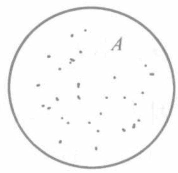


图 1-6

含有有限个元素的集合称为有限集，如上面例子中的（1）和（2）就是有限集. 含有无限个元素的集合称为无限集，如上面例子中的（3）和（4）就是无限集. 只含有一个元素的集合称为单元素集，如方程 $x-2=0$ 的解集. 不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，如$\sqrt{x}<0$ 的解集.

通常把至少含有一个元素的集合称为非空集. 由点组成的集合称为点集. 由数组成的集合称为数集. 表 1-4 是各个常用的数集和它们的表示符号.

表 1-4 常用数集名称及表示符号

集合名称	自然数集（含 0）	整数集	有理数集	实数集
表示符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

如果数集中的元素仅限于正数，就在集合的右上角标以“＋”号；如果数集中的元素都是负数，就在集合的右上角标以“－”；如果数集中的元素不含 0，就在集合的右上角标以“＊”. 例如，正整数集用 $\mathbf{Z}^{+}$ 或 $\mathbf{N}^{*}$ 表示；负实数集用 $\mathbf{R}^{-}$ 表示；$4\in\mathbf{R}$，$-4\in\mathbf{Z}^{-}$，$0\notin\mathbf{Z}^{+}$，$\frac{2}{3}\notin\mathbf{N}$，$-7\notin\mathbf{Z}^{+}$.

二、集合的表示方法

1. 列举法

把集合内的元素全部列举出来，彼此之间用逗号分开，写在花括号｛ ｝内，并且每个

元素仅写一次，也不考虑彼此顺序的集合表示方法，称为列举法．例如，$x^2-4=0$ 的解为 $\{-2, 2\}$；小于 10 的自然数表示为 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$；$\mathbf{Z}^*=\{\cdots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$．

2. 描述法

把属于某个集合的元素所具有的共同属性描述出来，写在花括号 $\{\ \ \}$ 内的集合表示方法，称为描述法．集合描述法有两种表示方式：第一种表示方式是 $\{x \mid p(x)\}$ 或 $\{x: p(x)\}$，括号内“|”或“:”的左方表示集合所含元素的一般形式，右方表示集合的元素所具有的共同属性；第二种表示方式是把集合中元素的公共属性直接写在大括号内，如 {直线 $y=3x$ 上的点}，{不大于 10 的自然数}．

例 1　写出下列方程和不等式的解集，并在数轴上用点集表示．

（1）$x^2-4x-5=0$；（2）$x^2-4x-5<0$．

解：（1）解方程 $x^2-4x-5=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=5$，所以，此方程的解集是 $\{-1, 5\}$．用数轴上的 -1 和 5 两点组成的点集表示如图 1-7 所示．

（2）解不等式 $x^2-4x-5<0$ 得 $-1<x<5$，所以，此不等式的解集为 $\{x \mid -1<x<5\}$．用数轴上满足 $-1<x<5$ 的所有点组成的点集表示如图 1-8 所示．

图 1-7

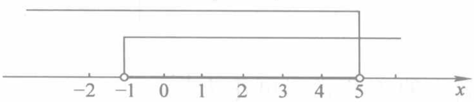


图 1-8

例 2　求方程组 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 的解集．

解：解方程组得

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-2 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=2 \end{cases}$$

所以，此方程组的解集为 $\{(-1, -2), (1, 2)\}$．

上述两种方法是表示一个集合的常用方法．此外，我们经常遇到“介于两个实数之间的所有实数的集合”，这种集合通常用区间表示．下面给出区间的定义．

3. 区间法

定义　介于两个实数之间的所有实数的集合称为区间，这两个实数称为区间的端点，两个端点之间的距离称为区间．当区间的长为有限时称为有限区间，当区间的长为无限时称为无限区间．

设 a、b 为两个实数，且 $a<b$，x 为变量．规定：

（1）满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合称为闭区间，记为 $[a, b]$；

（2）满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合称为开区间，记为 (a, b)；

（3）满足 $a<x \leqslant b$ 的实数 x 的集合称为左开区间，记为 $(a, b]$；

（4）满足 $a \leqslant x<b$ 的实数 x 的集合称为右开区间，记为 $[a, b)$．

上述区间都是有限区间，它们在数轴上的表示如图 1-9 所示．

关于无限区间有如下规定：

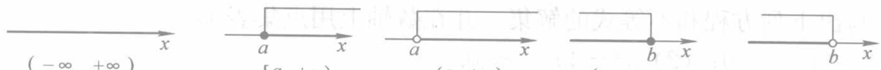
实数集用区间可表示为 $(-\infty, +\infty)$．“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷

闭区间 $[a,b]$　　开区间 (a,b)　　左开区间 $(a,b]$　　右开区间 $[a,b)$

a)　　b)　　c)　　d)

图 1-9

大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”．把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$．它们在数轴上的表示如图 1-10 所示．必须注意的是：在用区间表示集合时，必须将较小的数写在左端，较大的数写在右端，不可颠倒．



$(-\infty, +\infty)$　　$[a, +\infty)$　　$(a, +\infty)$　　$(-\infty, b]$　　$(-\infty, b)$

a)　　b)　　c)　　d)　　e)

图 1-10

例 3　用区间表示不等式组 $\begin{cases} 3x+5>2x+7 \\ \dfrac{x}{3}+3>x-3 \end{cases}$ 的解集．

解：原不等式组可化为 $\begin{cases} x>2 \\ x<9 \end{cases}$

所以，该不等式组的解集区间可表示为 $(2, 9)$．

在实际运用时可以根据方便原则，选用合适的表示方法．

三、集合之间的关系

1. 集合的包含关系

我们知道，自然数集 $\mathbf{N}$ 中的任何一个数都是整数集 $\mathbf{Z}$ 中的数．对于集合之间的这种关系，我们给出下面的定义．

定义 1　对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则集合 A 称为集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”，因此，有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$，$\{1, 2, 3\}\subseteq\{-1, 0, 1, 2, 3\}$．

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以，任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$．

由于空集是不含任何元素的集合，所以规定：空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$．

由定义可知，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则有 $A\subseteq C$．

需要注意的是：“$\in$”与“$\subseteq$”之间是有区别的．“$\in$”表示元素对集合的从属关系；“$\subseteq$”表示集合与集合的包含关系．

定义 2　如果集合 A 是集合 B 的子集（即 $A\subseteq B$），且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，则 A 称为 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$．文氏图表示如图 1-11 所示．

例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{R}$，$\{0, 1, 2\}\subsetneqq\{0, 1, 2, 3\}$．

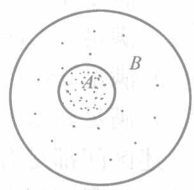


图 1-11

由定义可知：

(1) $\varnothing$ 是任何非空集合 A 的真子集，即 $\varnothing \subsetneqq A$；

(2) 若 A 是 B 的真子集，则 A 一定是 B 的子集，反之则不成立.

例 4 写出集合 $\{0, 1\}$ 的所有子集及真子集.

解：集合 $\{0, 1\}$ 的所有子集是 $\varnothing$、$\{0\}$、$\{1\}$、$\{0, 1\}$. 其中 $\varnothing$、$\{0\}$、$\{1\}$ 是 $\{0, 1\}$ 的真子集.

可以证明，如果集合含有 n 个元素，则它的子集个数为 2^n 个，真子集的个数为 2^n-1 个.

2. 集合的相等关系

定义 若集合 A 的元素和集合 B 的元素完全相同，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 即若集合 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

例 5 讨论下列集合间的关系：

(1) $A=\{x \mid |x-1|<2\}$ 与 $B=\{x \mid x^2-2x-8<0\}$；

(2) $A=\{-2, 4\}$ 与 $B=\{x \mid x^2-2x-8=0\}$.

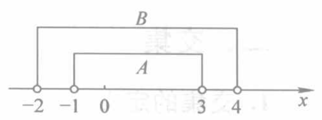


图 1-12

解：(1) $A=\{x \mid |x-1|<2\}=\{x \mid -1<x<3\}$，

$B=\{x \mid x^2-2x-8<0\}=\{x \mid (x+2)(x-4)<0\}=\{x \mid -2<x<4\}$.

由图 1-12 可知 $A\subsetneqq B$.

(2) 由 (1) 题可知：$B=\{-2, 4\}$，所以 $A=B$.

第三节 集合的运算

一、并集

1. 并集的定义

设集合 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{-1, -2, 0, 1, 2\}$，把集合 A 和 B 的元素合并在一起（相同元素只取一个），可以组成一个集合 $C=\{-1, -2, 0, 1, 2, 3\}$，对于这样的集合我们给出如下定义.

定义 把集合 A 和 B 的元素合并在一起（相同元素只取一个）组成一个集合，这个集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

求 $A\cup B$ 的运算称为并运算，如全体偶数的集合与全体奇数的集合的并集是整数集.

值得注意的是，"$x\in A$ 或 $x\in B$" 包含三种情况：第一种情况是 $x\in A$ 但 $x\notin B$；第二种情况是 $x\in B$ 但 $x\notin A$；第三种情况是 $x\in A$ 且 $x\in B$. 总之，x 至少属于 A 或 B 中的一个. 图 1-13 中的阴影部分表示集合 A 和集合 B 的并集 $A\cup B$ 中的元素 x 的几种情况示意图.

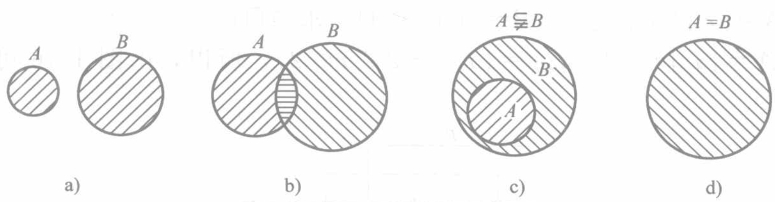


图 1-13

2. 并集的性质

由定义可知，若 A、B 为任意两个集合，则有下列性质：

(1) $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$；

(2) $A\subseteq(A\cup B)$，$B\subseteq(A\cup B)$；

(3) 若 $A\supseteq B$，则有 $A\cup B=A$；

(4) $A\cup B=B\cup A$.

例 1 设 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid |x|\leqslant 3\}$，求 $A\cup B$.

解： 因为 $B=\{x\mid |x|\leqslant 3\}=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，所以，由图 1-14 可知，$A\cup B=\{x\mid -3\leqslant x<4\}$.

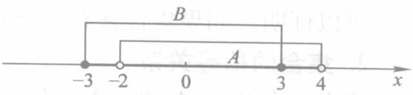


图 1-14

二、交集

1. 交集的定义

定义 集合 A 和 B 的共同元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

求 $A\cap B$ 的运算称为交运算，如全体偶数的集合与全体奇数的集合的交集是空集；又如 $\{-2, -1, 0, 1, 3\}\cap\{0, 1, 2\}=\{0, 1\}$.

值得注意的是，"$x\in A$ 且 $x\in B$" 指的是 $A\cap B$ 的元素同时属于 A 和 B. 图 1-15 中的阴影部分表示集合 A 和集合 B 的交集 $A\cap B$.

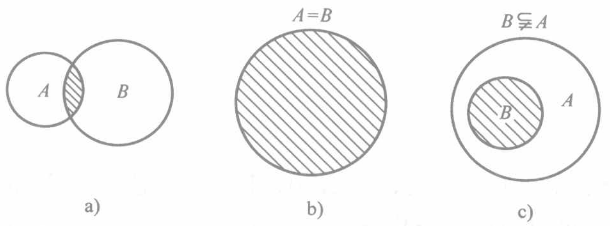


图 1-15

2. 交集的性质

由定义和图 1-15 可知，若 A、B 为任意两个集合，则有下列性质：

(1) $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(2) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

(3) 若 $B\subseteq A$，则有 $A\cap B=B$；

(4) $A\cap B=B\cap A$.

例 2 设 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x<1\}$，求 $A\cap B$.

解： 因为 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，所以，由图 1-16 可知：$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<1\}$.

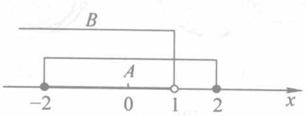


图 1-16

例 3 设 $A=\{x \mid x<5\}$，$B=\{x \mid x^2+x-6>0\}$，求 $A\cap B$.

解： 因为 $B=\{x \mid x^2+x-6>0\}=\{x \mid (x+3)(x-2)>0\}=\{x \mid x<-3$ 或 $x>2\}$.

所以，由图 1-17 可知，$A\cap B=\{x \mid x<-3$ 或 $2<x<5\}$.

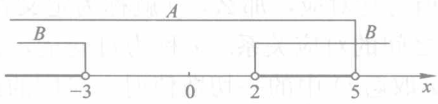


图 1-17

三、补集

在研究某些集合时，我们会遇到一些集合都是给定集合的子集，这个给定的集合称为全集，记作 Ω，也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素.

例如，我们研究数集时，常常把实数集 **R** 作为全集，在实数集 **R** 中，方程 $x^2-9=0$ 的解集是 $\{-3, 3\}$，显然这个解集是 **R** 的子集.

若 A 是全集 Ω 的子集，对于 Ω 中那些不属于 A 的元素我们给出下面的定义.

定义 设 Ω 为全集，A 为 Ω 的子集，在 Ω 中去掉集合 A 的所有元素，剩下元素组成的集合称为 A 在全集 Ω 中的补集，记作 $\complement_\Omega A$，读作"A 补"，即 $\complement_\Omega A=\{x \mid x\in\Omega$ 且 $x\notin A\}$.

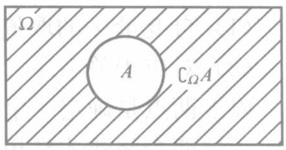


图 1-18

求补集的运算称为补运算. 图 1-18 所示长方形内表示集合 Ω，圆内表示集合 A，阴影部分表示 $\complement_\Omega A$.

值得注意的是，补集是对全集而言的，同一个集合对不同的全集会有不同的补集.

显然，由补集的定义可知：$A\cup\complement_\Omega A=\Omega$，$A\cap\complement_\Omega A=\varnothing$，$\complement_\Omega\Omega=\varnothing$，$\complement_\Omega\varnothing=\Omega$.

例如，如果 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$A=\{1, 3\}$，那么，$\complement_\Omega A=\{0, 2, 4\}$.

又如，$\Omega=\mathbf{R}$，则 $\complement_\Omega \mathbf{Q}=\{$无理数$\}$.

例 4 若 $\Omega=\{x \mid -5\leqslant x\leqslant 10\}$，$A=\{x \mid |x|<4\}$，求 $\complement_\Omega A$.

解： 因为 $A=\{x \mid |x|<4\}=\{x \mid -4<x<4\}$，所以，由图 1-19 可知：

$\complement_\Omega A=\{x \mid -5\leqslant x<4$ 或 $4<x\leqslant 10\}$.

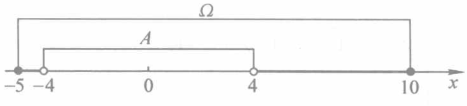


图 1-19

第四节 函 数

一、函数的定义

在某个变化过程中，设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某种对应法则，y 都有唯一确定的值与它对应，那么，变量 y 就称为变量 x 的函

数，x 称为自变量，与 x 值对应的 y 值，称为函数值.

下面我们用集合来描述函数的定义.

定义 设 D 是一个数集，如果对于 D 上变量 x 的每一个确定的值，按照某种对应的关系，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，那么，y 就称为定义在数集 D 上 x 的函数，记为 $y=f(x)$. “f”表示 y 与 x 之间的对应关系. x 称为自变量，自变量 x 的取值范围（数集 D）称为函数的定义域. 当 x 取遍 D 中的一切数值时，对应的函数值的集合称为函数的值域. 值域一般用 M 表示.

例如，$y=x^2+3$，x 是自变量，y 是 x 的函数，我们可写成 $y=f(x)=x^2+3$，对应关系 f 是自变量 x 的平方与 3 的和，函数的定义域是 $D=\mathbf{R}=(-\infty,\ +\infty)$，值域是 $M=\{y \mid y\geqslant 3\}=[3,\ +\infty)$.

又如，圆的面积 A 是半径 r 的函数，可写成 $A=f(r)=\pi r^2$，定义域 $D=\{r \mid r>0\}$，值域 $M=\{A \mid A>0\}$.

函数的记号除 $f(x)$ 外，我们还经常用 $F(x)$、$G(x)$、$\varphi(x)$ 等来表示.

二、函数定义域的求法

从函数的定义中可以看出，一个函数可以由下面两点确定：

（1）自变量 x 的取值范围，即函数的定义域；

（2）对应于关系 f，可由每一个自变量 x 值，对应一个完全确定的函数值 y.

以上两点是确定一个函数的两个要素. 两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才是相同的.

函数的定义域是确定函数的要素之一，我们在研究函数时，必须在函数的定义域范围内进行研究，因此，掌握函数定义域的求法是非常重要的.

在分析实际问题时，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 例如，圆的面积公式是 $A=\pi r^2$，半径 r 只能取正值，即定义域为 $\{r \mid r>0\}$.

对于用数学式子（即解析式）来表示的函数 $y=f(x)$，如果不考虑问题的实际意义，那么，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合. 例如，分式的分母不能为 0；偶次方根的被开方数不小于 0.

例 1 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x+3}$；　　（2）$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+4}$.

解：（1）要使函数 $y=\dfrac{1}{x+3}$ 有意义，必须满足 $x+3\neq 0$，即 $x\neq -3$. 所以，$y=\dfrac{1}{x+3}$ 的定义域是 $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ +\infty)$.

（2）要使函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+4}$ 有意义，必须满足 $\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ x+4\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\leqslant 1\\ x\geqslant -4\end{cases}$，也就是：$-4\leqslant x\leqslant 1$. 所以，$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+4}$ 的定义域是 $[-4,\ 1]$.

三、函数值的计算

若函数 $y=f(x)$，$x\in D$，则当自变量 x 在定义域 D 内取一个确定的值 a 时，对应的函