运 筹 学

主编　杨茂盛　副主编　逯春雁

陕西科学技术出版社

运 筹 学

主 编 杨茂盛
副主编 逯春雁

陕西科学技术出版社

（陕）新登字 002 号

内 容 简 介

本书内容包括线性规划、对偶规划、灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、非线性规划、网络分析、存储论、排队论、对策论，全书共分 11 章，书中结合管理专业的实际应用进行了系统地阐述，每章后附有习题，并有运筹学算法的常用程序。

本书可作为高等学校管理工程类各专业和其它专业的教材或参考书，亦可供广大管理干部和工程技术人员自学与参考。

运 筹 学
主 编 杨茂盛
副主编 逯春雁
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街 131 号）
新华书店经销 西安建筑科技大学印刷厂印刷
787×1092 毫米 16 开本 16.5 印张 37 万字
1997 年 1 月第 1 版 1997 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—2500
ISBN 7-5369-2682-0/O・87
定价： 18.8 元

前　言

运筹学是一门研究系统优化的科学。在一个系统中，常遇到两类决策问题，一类是如何利用确定的资源去完成最大的任务，另一类是如何利用最少的资源来完成一个确定的任务。运筹学应用定性及定量的分析方法，对有关上述问题提供了科学决策的依据。

运筹学诞生于本世纪三十年代。在第二次世界大战中曾被成功地应用于研究作战的战略、战术和后勤供应等问题，取得了较好的效果。战后，运筹学又被广泛应用于经济建设和社会管理方面的决策，节省了巨大财富。

我国从五十年代中期开始研究。三十多年来，无论在理论及实际应用方面都作出不少成绩，有的添补了空白。目前，除已建立全国性的运筹学学会和出版专门的运筹学杂志外，在很多学会中设有运筹学的专业组织，有几百种刊物发表过有关运筹学的研究成果。在高等院校很多专业，已把运筹学列为必修课程。

运筹学是一门新兴的应用性科学。因为“新”，所以较难确定其确切的内容和范围，本教材只是据管理工程专业的教学计划、培养目标以及教学大纲的内容编写的。

本教材介绍了运筹学各主要分支的原理和方法，内容上力求阐明概念和原理的经济、物理含义，并用了较多的例子介绍各类模型的建立和它们在实际中的应用，并编入了一些运筹学计算方法的常用程序。

本教材曾作为我校管理专业教材 1989 年铅印过，这次根据几年来的教学实践，又对各章节分别进行了重写、补充和修改。

本教材第一、二、三、七、八、十章由西安建筑科技大学杨茂盛编写，第四章由陕西经贸学院杨殿学编写，第五章由安徽建工学院黄已立编写，第六章由南方冶金学院黄学良编写，第九章由西安理工大学逯春雁编写，第十一章由西北建筑学院任世安老师编写，杨茂盛负责全书的统稿和主编，逯春雁任副主编。

在本教材的编写过程中，西安建筑科技大学张正西、田良华教授及李智令副教授提出了不少宝贵指导意见，使我们得益非浅，谨在此表示感谢。

由于水平有限，掌握资料也不多，书中错误之处，望请读者批评指正。

编　者

1996 年 10 月

目　录

第1章 线性规划

线性规划是运筹学的一个十分重要的分支，自1949年丹捷格提出了求解线性规划问题的单纯形法后，线性规划的应用日趋增多，现国内外盛行。

线性规划所解决的问题主要分为两类：一类是在资源（人力、物力、财力……等）一定的情况下，我们如何利用这些有限的资源来完成最多的任务。另一类是在任务确定的情况下，我们如何利用最小的资源来完成这个确定的任务。

要用线性规划解决一个实际问题，一般来说，都需要首先根据待要解决的问题，建立线性规划的数学模型，其次对已得模型利用计算机求解，得出优解，再施于实践。故此，在这里我们首先考虑线性规划的数学模型。

§1.1 线性规划的数学模型

建模是解决线性规划问题的极为重要的一个环节，一个正确数模（数学模型）的建立，要求建模者熟悉问题的生产情况和管理内容，明确目的要求和错综复杂的已知与未知条件，以及它们之间二者相互关系，而一些已知数据还要通过大量的调查和统计资料获取可靠的原始数据加以证实。对初学者来说，要求我们怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于从数学的角度有条理地表述出来，掌握建模的分析问题的步骤及方法。

一般来说，一个待建模的线性规划问题需满足以下条件，方可入手。

(1)所求问题的目标一定能表为最大化或最小化的问题，例如，求最小成本或人力，投资等，材料储备的最大利用，企业的最大利润等问题。

(2)问题一定要具备有达到目标的不同方法，即必须要有选择的可能性。

(3)要达到的目标是有限制条件的。

(4)问题的目标和约束都能表示为线性式。

以下我们将通过几个实例来说明建模的思路及线性规划在实际问题中的应用，并随之引出线性规划的标准模型。

1.1.1 线性规划问题举例

例1.1 （资源利用问题）设某建筑公司的预制厂利用沙，石，灰三种原料 A_1, A_2, A_3，来生产两种产品 B_1 和 B_2，已知该厂各种原料的现有数量，每单位产品对各种原料的消耗量及所获利润如下表1-1所示。

现在的问题是，在这些现有资源的条件下，如何分配产品 B_1、B_2 的生产，才使公司取得利润最大。

分析：1. 确定未知变量，设 x_1 表示 B_1 的生产数量，x_2 为产品 B_2 的生产数量。

2. 因为所求问题的目标是要求公司取得最大利润，所以，设利润函数为 $f(x)$，则 $f(x)=5x_1+4x_2$（百元）。

3. 问题的约束资源限制为各种原料的现有数，所以，有关系式：

$$\begin{cases} x_1+3x_2\leqslant 90 \\ 2x_1+x_2\leqslant 80 \\ x_1+x_2\leqslant 45 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

表 1-1

单位产品的消耗 产品 / 原料	B_1	B_2	原料现有数(M^3)
A_1	1	3	90
A_2	2	1	80
A_3	1	1	45
单位利润(百元)	5	4	

归纳 1,2,3 式得出该问题为：

求满足

$$\begin{cases} x_1+3x_2\leqslant 90 \\ 2x_1+x_2\leqslant 80 \\ x_1+x_2\leqslant 45 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

并使 $f(x)=5x_1+4x_2$ 最大的一组数$(x_1,x_2)^T$。

一般地，设用 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 种原料，可以生产 $B_1,B_2\cdots,B_n$ 种产品，已知 A_i 种原料为 a_i 单位，B_j 种单位产品所需 A_i 种原料 a_{ij}单位，B_j 种单位产品的利润为 C_j 元，问应如何组织生产才能获得最大利润？

解：设 x_j 为生产产品 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$的计划数，那么这一问题的数学模型为：求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant a_i(i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$$

并且使利润函数 $f(x)=\sum_{j=1}^{n} C_jx_j$ 的值最大。

例 1.2 (物资调运问题)

设有两个砖厂 A_1,A_2，产量分别为 23 和 27 万块砖，它的产品供应 B_1,B_2,B_3 三个工地，需要量分别为 17 万块，18 万块和 15 万，已知从 A_1,A_2 分别向 B_1,B_2,B_3 运送一万块砖所需要的运费如表 1-2 所示。

问如何调运才使得总运费最小？

解：设 x_{ij}表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 的砖的数量(单位：万块)

$(i=1,2;j=1,2,3)$

因为，由砖厂 A_i 运往三个工地的砖数总和应等于 A_i 的产量，从而有约束式：

运价表(单位：元/万块)　　表 1-2

工地 / 运价 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3) \end{cases}$$

又因为由 A_1,A_2 两个砖厂运到各工地的砖数总和应等于各工地的需求量，所以又得约束式：

$$\begin{cases}x_{11}+x_{21}=17\\x_{12}+x_{22}=18\\x_{13}+x_{23}=15\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3)\end{cases}$$

于是，该运输问题归结为：

求一组满足条件：

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=23\\x_{21}+x_{22}+x_{23}=27\\x_{11}+x_{21}=17\\x_{12}+x_{22}=18\\x_{13}+x_{23}=15\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3)\end{cases}$$

并使 $f(x)=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$ 最小的 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$。

一般地，设某种物资有 m 个产地：$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 联合供应 n 个销地：$B_1,B_2,\cdots,B_n$。各产地产量（单位：吨），各销地销量（单位：吨），各产地至各销地单位运价（单位：元/吨）如表 1-3 所示。

表 1-3

单价（元/吨） 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量（吨）
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m
销量（吨）	b_1	b_2		b_n	

表中：a_i 表示产地 A_i 的产量$(i=1,2,\cdots m)$

b_j 表示销地 B_j 的销量$(j=1,2,\cdots n)$

C_{ij}表示 A_i 到 B_j 间的单位运价（元/吨）$(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$。问应如何调运，才使总运费最少？

解：当产销平衡（即 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$）时，设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

那么，上述运输问题的数学模型为：

求一组变量 x_{ij} $(i=1, 2, \cdots m;\ j=1, 2, \cdots n)$ 的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1\\x_{21}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{2n}=a_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m\\x_{11}+x_{21}+\cdots\cdots+x_{m1}=b_1\\x_{12}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{m2}=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n\\x_{ij}\geqslant 0\ (i=1, 2\cdots, m;\ j=1, 2\cdots, n)\end{cases}$$

并使目标函数 $f(x)=C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots+C_{mn}x_{mn}$ 的值最小。

利用连加号($\sum$),这一数学模型可以写为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的值,使它满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_i(j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2\cdots,m;j=1,2\cdots,n)\end{cases}$$

并且使目标函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

如果运输问题中,没有产销平衡这一限制,当产大于销时(即 $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$),这一问题的数学模型应为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的值,使它满足

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i(i=1,2,\cdots,m)$$

(产地 A_i 发到各销地的发量总和不超过 A_i 的产量)

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j(j=1,2,\cdots,n)$$

(各产地发到销到 B_j 的发量总和应等于 B_j 的销量)

$x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

(调运量不能取负值)

并且使目标函数 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

例 1.3 (节约下料问题)

设有一批规格为 10 米长的园钢筋,将它截成分别为 3,4 米长的预制构件的短钢筋各 100 根,问怎样截取最省料。

解:因为,10 米长的钢筋截为 3 米或 4 米长,共有三种截法:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 余 \\ \begin{cases}截法\ \text{I}.3\quad 3\quad 3\quad 1\quad 米\\ 截法\ \text{II}.3\quad 3\quad 4\quad 0\quad 米\\ 截法\ \text{III}.4\quad 4\quad 0\quad 2\quad 米\end{cases}\end{array}$$

所以,设按截法Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ各截取 10 米长的钢筋分别为 x_1,x_2,x_3 根,

则该问题归纳为:求满足约束条件

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=100\\ x_1+2x_3=100\\ x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ 3)\end{cases}$$

并使得总钢筋数 $f(x)=x_1+x_2+x_3$ 最小的一组数 $(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$。

一般地,设用某原材料(条材或板材)下零件 A_1,$A_2\cdots$,A_m 的毛坯,根据过去经验在一件原材料上有 B_1,B_2,…,B_n 种不同的下料方式,每种下料方式可得各种毛坏个数

及每种零件需要量如下表1-4所示，问应怎样按排下料方式，使得既能满足需求，用的原材料又少。

解：设采用 B_j 种方式下料时，需要的原材料数为 x_j，则这一问题的数学模型为：

求一组变量 x_j（$j=1$，2，…，n）的值，使它满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_j \geqslant a_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ \text{（所下的 } A_i \text{ 零件总数不能低于 } a_i\text{）}\\ x_j \geqslant 0\end{cases}$$

并且使目标函数 $f(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j$ 的值最小。

表1-4

各种方式下的另件个数 / 下料方式 / 另件名称	B_1	B	…	B_n	另件需要量
A_1	C_{11}	C_1	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m

例1.4 （投资计划问题

一个公司制订投资计划问题的关键是在预算范围内，合理选择投资项目，使总的资金回收额达到最大。

例如，某建筑企业拥有20万资金，拟在今后五年内对下列项目投资。已知：

项目 A：从第一年到第四年每年年初需投资，并于次年末回收本利115%；

项目 B：第三年年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过8万元；

项目 C：第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过6万元；

项目 D：五年内每年年初可购买公债或定期储蓄，于当年末归还，并加利息9%。

现要求确定这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金本利总额为最大。

分析：

1. 假设变量，设以 x_{iA}，x_{iB}，x_{iC}，x_{iD}（$i=1$，2，3，4，5）分别表示第 i 年年初给项目 A，B，C，D 的投资额。

2. 资金流转分析，原则是每年年初应把资金全部投出去，手中不留呆滞资金。因此，第一年年初将20万元资金投给 A，D 项目，有

$x_{1A}+x_{1D}=200000$，则年底回收项目 D 的本息为：x_{1D}（$1+9\%$）$=1.09x_{10}$

这些资金应在第二年年初投资给 A，C，D 三个项目，故有

$x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.09x_{1D}$

第二年年底回收项目 A 的第一年投资和项目 D 当年投资的本利总和为：$1.15x_{1A}+1.09x_{2D}$这些资金在第三年初投资给项目 A,B,D,有 $x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.09x_{2D}$

第三年年底回以 A 项的第二年投资和 D 项当年投资的本利总和为：$1.15x_{2A}+1.09x_{3D}$

类似地，可得第四年投资为：

$x_{4A}+x_{4D}=1.15x_{2A}+1.09x_{3D}$

第五年投资为：$x_{5D}=1.15x_{3A}+1.09x_{4D}$

第五年年底共回收资金：

项目 A：$1.15x_{4A}$

项目 B：$1.25x_{3B}$，且 $x_{3B}\leqslant 80000$

项目 C：$1.40x_{2C}$，且 $x_{2C}\leqslant 60000$

项目 D：$1.09x_{5D}$

从而得到该投资问题的模型为：求 x_{iA}，x_{iB}，x_{iC}，x_{iD} $(i=1, 2, \cdots, 5)$

$$
\text{满足}\begin{cases}
x_{1A}+x_{1D}=200000 \\
-1.09x_{1D}+x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=0 \\
-1.15x_{1A}-1.09x_{2D}+x_{3A}+x_{3B}+c_{3D}=0 \\
-1.15x_{2A}-1.09x_{3D}+x_{4A}+x_{4D}=0 \\
-1.15x_{3A}-1.09x_{4D}+x_{5D}=0 \\
x_{3B}\leqslant 80000 \\
x_{2C}\leqslant 60000 \\
x_{iA},\ x_{iB},\ x_{iC},\ x_{iD}\geqslant 0\ (i=1, 2, \cdots 5)
\end{cases}
$$

并使 $f=1.15x_{4A}+1.25x_{3B}+1.40x_{2C}+1.09x_{5D}$ 最大。

例 1.5 （混凝土搅拌站选址问题）

在一个联合协作多点开口建筑施工的场地中，一个大型搅拌站的安装位置，对施工的进度将起着很大的作用，特别是基础浇灌阶段更为重要，由此，我们来建立一个选址问题的数学模型。

设共有 n 个施工点（广义地称需求点），有 m 个可供选择建站的地点（广义地称为供应点），每个点至多建立一个搅拌站，现设在地点 i 建站的生产能力为 r_i（单位：立方米），在地点 i 搅拌站生产的单位时间的固定成为为 F_i（F_i 可用固定资产折旧来衡量）施工点 j 的需求量为 S_j，从搅拌站 i 到施工点 j 的单位运费为 C_{ij}。

设 x_{ij} 为从搅拌站 i 向施工点 j 供应的混凝量（单位：立方米）

u_i 表示是否选择地点 i 建立搅拌站，

$$
\text{则 } u_i=\begin{cases}1, & \text{若选 } i \text{ 点。}\\ 0, & \text{若不选 } i \text{ 点。}\end{cases}
$$

归纳得到数模：求满足

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant r_i u_i\ (i=1, 2, \cdots, m) \\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}\geqslant S_j\ (j=1, 2, \cdots, n) \\
x_{ij}\geqslant 0;\ u_i \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1\ (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots n)
\end{cases}
$$

并使 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} C_{ij}x_{ij}+\sum\limits_{i=1}^{m} F_i u_i$ 取最小值的 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$

综合上述各例，不难看出我们所建立的数学表式都具有一个共同特点：要求出一组非负数 $x_j \geqslant 0$ （$j=1, 2, \cdots n$），且使它们满足一组线性条件（一组线性方程或线性不等式），并且使得某一个关于 n 个变量 x_j 的线性函数取得最大值或最小值。我们把这一类问题统称为线性规划问题。

§1.2 线性规划的标准形式

1.2.1 线性规划问题的标准形式

把上节例子加以概括，我们可以把它们抽象成这样一类数学问题：

求满足条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant (\leqslant \text{或} =)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant (\leqslant \text{或} =)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant (\leqslant \text{或} =)\ b_m \\ x_j \geqslant 0\ (j=1, 2, \cdots n) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1,1) \\ \\ (1,2) \end{matrix}$$

并且使 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 取得最大（小）值的一组数 x_j（$j=1, 2, \cdots n$）。

$$(1,3)$$

其中，a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$），b_i 及 c_j 都是已知常数，（1，1）式中的线性条件可以是方程式也可以是不等式，也可以二者兼有。

凡能表为以上形式的问题统称为线性规划问题。

（1，1）式称为线性规划的约束条件。

（1，2）式称为线性规划的未知变量（决策变量）。

（1，3）式称为线性规划的目标函数。

为了讨论方便起见，我们把以上线性规划问题统归成如下标准形式：

求满足约束方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0\ (j=1, 2, \cdots, n) \\ b_i \geqslant 0\ (i=1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

使 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 最大的一组数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$。

为了途述方起见，我们用（L，P）代表以上的标准形线性规划。

1. 标准线性规划的矩阵形式：

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$C^T=(c_1c_2\cdots c_n)$，则（L，P）的矩阵形式为求满足条件$\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$

并且使 $f(x)=C^TX$ 取最大的一组数 X。

简记为：$\begin{cases}\max f(x)=C^TX\\ s,t\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\\b\geqslant 0\end{cases}\end{cases}$

2. 标准线性规划的向量形式

设 $P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$ $\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{bmatrix}$ 则得(L,P)的向量形式：

$$\begin{cases}\max f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\ s\cdot t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\\x_j\geqslant 0\\b_i\geqslant 0\end{cases}\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}\max f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\ s\cdot t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b\\x_j\geqslant 0\\b\geqslant 0\end{cases}\end{cases}$$

1.2.2 将一般线性规划问题化为标准形式的方法

将非标准形式线性规划为标准形式线性规划时有以下几种情况可能出现，处理的方法有

1. 目标函数为极小化。对目标函数为极小化的问题只要将目标函数乘以（−1）即可化为等价的极大化问题。

2. 约束条件为不等式。部分或全部约束条件为不等式有两种情况：

（1）约束条件为小于或等于形式。对这样的约束，在不等式左端加上一个非负的新变量即可化为等式。新增的非负变量称为松弛变量。

（2）约束条件为大于或等于形式。对这样的约束，在不等式的左端减去一个非负的新变量即可化为等式。新增的非负变量称为剩余变量，亦可以称为松弛变量。

3. 决策变量有非正约束。如果 $x_j\leqslant 0$，则非用负变量 x'_j 代替，使 $x_j=-x'_j$。

4. 决策变量 x_j 符号不受限制。标准形式中要求变量为非负，碰到变量无非负约束时，可以用两个非负的新变量之差来代替。如变量 x_j 无非负性要求，则将它写成 $x_j=x'_j-x''_j$，新变量 x'_j 和 x''_j 为非负变量，而 x_j 的符号将由 x'_j 和 x''_j 来确定。

5. 决策变量有上下界。对这种情况，可将上下界分别处理。引进新的变量使等于原变量减去下限值，如此则下限为零，满足标准形式的非负性要求。如已知决策变量 x_j 的限制为 $a_j\leqslant x_j\leqslant b_j$；则以 $x'_j=x_j-a$ 代替 x_j，从而得 $0\leqslant x'_j\leqslant b-a$，现时的 x'_j 满足了非负要求。并用新变量 x'_j 替换目标函数和约束条件中所有的原变量 x_j，再将上限约束列为新的约束条件并化为等式。

下面举例说明如何将一般非标准形式的线性规划问题化为标准形式的线性规划问题。

例 1.6 将下列线性规划问题化为标准形式：

$$\begin{cases}\max f(x)=2x_1-x_2+x_3 \\ s\cdot t\begin{cases}x_1+3x_2-x_3\leqslant 20\\ 2x_1-x_2+x_3\geqslant 12\\ x_1-4x_2-4x_3\geqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0,x_3\ \text{符号不限}\end{cases}\end{cases}$$

解：1. 因为 x_3 符号不限，以 $x'_3-x''_3=x_3$ 代入目标函数和所有约束条件中，其中，x'_3,x''_3 均为非负变量。

2. 对第一个约束加上松弛变量 x_4 化为等式。

3. 对后两个约束分别减去剩余变量 x_5 和 x_6 化为等式。

4. 为了保持目标函数不变，使 x_4,x_5 和 x_6 的目标系数均为零。得到的标准形式线性规划为：

$$\begin{cases}\max f(x)=2x_1-x_2+x'_3-x''_3+0x_4+0x_5+0x_6 \\ s\cdot t\begin{cases}x_1+3x_2-x'_3+x''_3+x_4=20\\ 2x_1-x_2+x'_3-x''_3-x_5=12\\ x_1-4x_2-4x'_3+4x''_3-x_6=2\\ x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\geqslant 0,x'_3,x''_3\geqslant 0\end{cases}\end{cases}$$

例 1.7 将下列线性规划问题化为标准形式：

$$\min f(x)=x_1+2x_2+4x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=20\\ 3x_1+x_2+4x_3=25\\ x_1,x_2\geqslant 0,2\leqslant x_3\leqslant 6\end{cases}$$

解：1. 给目标函数两端同乘 (-1)，令 $f'(x)=-f(x)$

2. 令 $x'_3=x_3-2$ 代入，问题化为：

$$\begin{cases}\max f'(x)=-x_1-2x_2-4x'_3-8 \\ s\cdot t\begin{cases}2x_1+x_2+3x'_3=14\\ 3x_1+x_2+4x'_3=17\\ x'_3\leqslant 4\\ x_1,x_2,x'_3\geqslant 0\end{cases}\end{cases}$$

将变量 x'_3 的上限约束化为等式，得标准形式为

$$\begin{cases}\max f'(x)=-x_1-2x_2-4x'_3-8 \\ s\cdot t\begin{cases}2x_1+x_2+3x'_3=14\\ 3x_1+x_2+4x'_3=17\\ x'_3+x_4=4\\ x_1,x_2,x'_3,x_4\geqslant 0\end{cases}\end{cases}$$

由以上看出，任何一个线性规划问题都可以化成等价的标准形式的线性规划问题。因此，以后如没有特殊声明，我们讲的线性规划都是指标准形式的线性规划。

§1.3 线性规划的基本概念及其基本原理

这一节主要介绍有关线性规划问题解的基本概念及性质，为下节线性规划的单纯形法作好理论上的准备工作。

1.3.1 线性规划问题的解的基本概念

由§1.2节知线性规划的标准形式为：

$$\begin{cases} \max f=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots m, \\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \end{cases}$$

定义 1　称满足线性规划的约束条件(2)和(3)的解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，为线性规划问题的可行解。所有可行解组成的集合称为可行域(可行解集)。

定义 2　称满足线性规划目标函数的可行解为线性规划的最优解，即使目标函数达到极大的可行解称为最优解。

定义 3　设 $A=(a_{ij})_{mn}$是约束方程组(2)的系数矩阵，其秩为 $m(m<n)$。若 B 是矩阵 A 中 $m\times m$ 阶非奇异子阵($|B|\neq 0$)，则称 B 是线性规划问题的一个基。

由线性代数知，如果 B 是线性规划问题的一个基，那么它一定是由 A 的 m 个线性无关的列向量组成的，为了不失一般性以下设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}=(\vec{P}_1,\vec{P}_2,\cdots\vec{P}_m),\vec{P}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

定义 4　设 B 是线性规划问题的一个基，则称 B 的列向量 $\vec{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$为线性规划问题的基向量。与基向量 $\vec{P}_j$ 对应的决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$称为线性规划问题的基变量，否则称为非基变量。

为了进一步讨论线性规划问题的解，我们先来研究方程组(2)的求解问题。

已知(2)的系数矩阵 A 的秩为 $m(m<n)$，故由线性代数的知识知方程组(2)有无穷多个解。不失一般性，不妨假设方程组的前 m 个变量的系数列向量是线性无关的，于是方程组(2)可改写为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1-a_{1m+1}x_{m+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2-a_{2m+1}x_{m+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mm}x_m=b_m-a_{mm+1}x_{m+1}-\cdots-a_{mn}x_n \end{cases}$$