

GAODENG SHUXUE



高职高专“十一五”规划教材

高等数学

王雪莲 刘春英 主编



化学工业出版社

GAODENG

SHUXUE

GAODENG SHUXUE

高等数学

GAODENG SHUXUE

GAODENG SHUXUE

GAODENG SHUXUE

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

王雪莲 刘春英 主编



化学工业出版社

· 北京 ·

内 容 提 要

本书共十一章, 内容主要包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、多元函数微积分学、向量与空间解析几何、级数及拉普拉斯变换。书中每一章节都配有丰富的例题、习题及复习题, 并尽量增加应用型题目。书后附有参考答案与提示。

本书每章前指出学习目标, 章后进行小结, 并附有和本章内容相关的数学史话, 为的是更好地将“学法”融入教材中, 又让学生了解相关的数学发展史, 激发学习兴趣。

本书可作为高职高专学校高等数学课程的教材, 也可以用作大专成人教育学院、继续教育学院教材以及数学爱好者的参考用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/王雪莲, 刘春英主编. —北京: 化学工业出版社, 2008.7

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-03372-7

I. 高… II. ①王…②刘… III. 高等数学-高等学校: 技术学院-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 106645 号

责任编辑: 梁静丽 李植峰 郎红旗

文字编辑: 王 洋

责任校对: 顾淑云

装帧设计: 风行书装

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 刷: 北京市振南印刷有限责任公司

装 订: 三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 18½ 字数 460 千字 2008 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 29.80 元

版权所有 违者必究

高职高专食品类“十一五”规划教材 建设委员会成员名单

主任委员	贡汉坤	逯家富					
副主任委员	杨宝进	朱维军	于雷	刘冬	徐忠传	朱国辉	丁立孝
	李靖靖	程云燕	杨昌鹏				
委 员	(按姓名汉语拼音排列)						
	边静玮	蔡晓雯	常 锋	程云燕	丁立孝	贡汉坤	顾鹏程
	郝亚菊	郝育忠	贾怀峰	李崇高	李春迎	李慧东	李靖靖
	李伟华	李五聚	李 霞	李正英	刘 冬	刘 靖	娄金华
	陆 旋	逯家富	秦玉丽	沈泽智	石 晓	王百木	王德静
	王方林	王文焕	王宇鸿	魏庆葆	翁连海	吴晓彤	徐忠传
	杨宝进	杨昌鹏	杨登想	于雷	臧凤军	张百胜	张 海
	张奇志	张 胜	赵金海	郑显义	朱国辉	朱维军	祝战斌

高职高专食品类“十一五”规划教材 编审委员会成员名单

主任委员	莫慧平						
副主任委员	魏振枢	魏明奎	夏 红	翟玮玮	赵晨霞	蔡 健	
	蔡花真	徐亚杰					
委 员	(按姓名汉语拼音排列)						
	艾苏龙	蔡花真	蔡 健	陈红霞	陈月英	陈忠军	初 峰
	崔俊林	符明淳	顾宗珠	郭晓昭	郭 永	胡斌杰	胡永源
	黄卫萍	黄贤刚	金明琴	李春光	李翠华	李东凤	李福泉
	李秀娟	李云捷	廖 威	刘红梅	刘 静	刘志丽	陆 霞
	孟宏昌	莫慧平	农志荣	庞彩霞	邵伯进	宋卫江	隋继学
	陶令霞	汪玉光	王立新	王丽琼	王卫红	王学民	王雪莲
	魏明奎	魏振枢	吴秋波	夏 红	熊万斌	徐亚杰	严佩峰
	杨国伟	杨芝萍	余奇飞	袁 仲	岳 春	翟玮玮	詹忠根
	张德广	张海芳	张红润	赵晨霞	赵晓华	周晓莉	朱成庆

高职高专食品类“十一五”规划教材建设单位

(按汉语拼音排列)

宝鸡职业技术学院
北京电子科技职业学院
北京农业职业学院
滨州市技术学院
滨州职业学院
长春职业技术学院
常熟理工学院
重庆工贸职业技术学院
重庆三峡职业学院
东营职业学院
福建华南女子职业学院
福建宁德职业技术学院
广东农工商职业技术学院
广东轻工职业技术学院
广西农业职业技术学院
广西职业技术学院
广州城市职业学院
海南职业技术学院
河北交通职业技术学院
河南工业贸易职业学院
河南农业职业学院
河南商业高等专科学校
河南质量工程职业学院
黑龙江农业职业技术学院
黑龙江畜牧兽医职业学院
呼和浩特职业学院
湖北大学知行学院
湖北轻工职业技术学院
湖州职业技术学院
黄河水利职业技术学院
济宁职业技术学院
嘉兴职业技术学院
江苏财经职业技术学院
江苏农林职业技术学院
江苏食品职业技术学院
江苏畜牧兽医职业技术学院
江西工业贸易职业技术学院
焦作大学
荆楚理工学院
景德镇高等专科学校
开封大学
漯河医学高等专科学校
漯河职业技术学院
南阳理工学院
内江职业技术学院
内蒙古大学
内蒙古化工职业学院
内蒙古农业大学职业技术学院
内蒙古商贸职业学院
宁德职业技术学院
平顶山工业职业技术学院
濮阳职业技术学院
日照职业技术学院
山东商务职业学院
商丘职业技术学院
深圳职业技术学院
沈阳师范大学
双汇实业集团有限责任公司
苏州农业职业技术学院
天津职业大学
武汉生物工程学院
襄樊职业技术学院
信阳农业高等专科学校
杨凌职业技术学院
永城职业学院
漳州职业技术学院
浙江经贸职业技术学院
郑州牧业工程高等专科学校
郑州轻工职业学院
中国神马集团
中州大学

《高等数学》编写人员名单

主 编 王雪莲 济宁职业技术学院
 刘春英 长春职业技术学院
副 主 编 郑淑红 商丘职业技术学院
 王玉英 济宁职业技术学院
 王福胜 黑龙江畜牧兽医职业学院

编写人员 (按姓名汉语拼音排列)

刘春英 长春职业技术学院
路海莲 山东省科技职业学院
吕秀英 山东省济南卫生学校
王福胜 黑龙江畜牧兽医职业学院
王雪莲 济宁职业技术学院
王玉英 济宁职业技术学院
杨 蕊 东营职业学院
郑淑红 商丘职业技术学院

序

作为高等教育发展中的一个类型,近年来我国的高职高专教育蓬勃发展,“十五”期间是其跨越式发展阶段,高职高专教育的规模空前壮大,专业建设、改革和发展思路进一步明晰,教育研究和教学实践都取得了丰硕成果。各级教育主管部门、高职高专院校以及各类出版社对高职高专教材建设给予了较大的支持和投入,出版了一些特色教材,但由于整个高职高专教育改革尚处于探索阶段,故而“十五”期间出版的一些教材难免存在一定程度的不足。课程改革和教材建设的相对滞后也导致目前的人才培养效果与市场需求之间还存在着一定的偏差。为适应高职高专教学的发展,在总结“十五”期间高职高专教学改革成果的基础上,组织编写一批突出高职高专教育特色,以培养适应行业需要的高级技能型人才为目标的高质量教材不仅十分必要,而且十分迫切。

教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高[2006]16号)中提出将重点建设好3000种左右国家规划教材,号召教师与行业企业共同开发紧密结合生产实际的实训教材。“十一五”期间,教育部将深化教学内容和课程体系改革、全面提高高等职业教育教学质量作为工作重点,从培养目标、专业改革与建设、人才培养模式、实训基地建设、教学团队建设、教学质量保障体系、领导管理规范化等多方面对高等职业教育提出新的要求。这对于教材建设既是机遇,又是挑战,每一个与高职高专教育相关的部门和个人都有责任、有义务为高职高专教材建设做出贡献。

化学工业出版社为中央级综合科技出版社,是国家规划教材的重要出版基地,为我国高等教育的发展做出了积极贡献,被新闻出版总署领导评价为“导向正确、管理规范、特色鲜明、效益良好的模范出版社”,最近荣获中国出版政府奖——先进出版单位奖。依照教育部的部署和要求,2006年化学工业出版社在“教育部高等学校高职高专食品类专业教学指导委员会”的指导下,邀请开设食品类专业的60余家高职高专骨干院校和食品相关行业企业作为教材建设单位,共同研讨开发食品类高职高专“十一五”规划教材,成立了“高职高专食品类‘十一五’规划教材建设委员会”和“高职高专食品类‘十一五’规划教材编审委员会”,拟在“十一五”期间组织相关院校的一线教师和相关企业的技术人员,在深入调研、整体规划的基础上,

编写出版一套食品类相关专业基础课、专业课及专业相关外延课程教材——“高职高专‘十一五’规划教材★食品类系列”。该批教材将涵盖各类高职高专院校的食品加工、食品营养与检测和食品生物技术等专业开设的课程，从而形成优化配套的高职高专教材体系。目前，该套教材的首批编写计划已顺利实施，首批 60 余本教材将于 2008 年陆续出版。

该套教材的建设贯彻了以应用性职业岗位需求为中心，以素质教育、创新教育为基础，以学生能力培养为本位的教育理念；教材编写中突出了理论知识“必需”、“够用”、“管用”的原则；体现了以职业需求为导向的原则；坚持了以职业能力培养为主线的原则；体现了以常规技术为基础、关键技术为重点、先进技术为导向的与时俱进的原则。整套教材具有较好的系统性和规划性。此套教材汇集众多食品类高职高专院校教师的教学经验和教改成果，又得到了相关行业企业专家的指导和积极参与，相信它的出版不仅能较好地满足高职高专食品类专业的教学需求，而且对促进高职高专课程建设与改革、提高教学质量也将起到积极的推动作用。

希望每一位与高职高专食品类专业教育相关的教师和行业技术人员，都能关注、参与此套教材的建设，并提出宝贵的意见和建议。毕竟，为高职高专食品类专业教育服务，共同开发、建设出一套优质教材是我们应尽的责任和义务。

贡汉坤

前 言

随着中国高等教育的蓬勃发展, 高职高专教育已呈现出大众化发展趋势。高等数学是高职高专院校各专业必修的一门重要基础课程, 而教材作为教学内容和教学方法的知识载体, 一定要满足时代发展和教育改革的需求。为适应 21 世纪人才发展的市场需要和中国高职教育培养高技能人才的需要, 根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》, 在认真总结全国高职高专高等数学教改经验及研究借鉴同类优秀教材编写特色的基础上, 结合高职高专学生及教师的实际情况, 编写了这本《高等数学》教材。

本教材主要具有以下特点。

① 凸显高职高专特色。本教材立足于高职高专院校中开设《高等数学》基础课的各个专业。教材编写以“教师好用、学生好学”为出发点, 凸显高职高专特色。为强调贯彻“以应用为目的, 以必需够用为度”的教学原则, 本教材注重从实际问题引入基本概念, 揭示其实质。教材既适度保持数学学科自身的系统性与逻辑性, 又充分考虑高职高专学生的认知特点, 恰当选取教材内容的深度和广度。在不影响数学基本理论体系的前提下, 淡化了繁琐的逻辑证明和推理过程, 强化了几何说明、物理意义和经济背景, 使学生形象、直观地理解和掌握教学内容, 并能实现学以致用。

② 增强教材的可读性。数学严密的逻辑性和高度的抽象性导致许多学生产生“畏数学”的消极心理。为此, 本教材在每章或每节的开始都用简短的语言点题, 承上启下, 使读者了解所研究问题的来龙去脉; 在每章最后附有和本章内容相关的数学史话, 不仅丰富了学生知识, 更激发了学生学习数学的兴趣。这都提高了数学的亲合力, 增强了教材的可读性。

③ 融“学法”于教材。为加强对高等数学的学习指导, 本教材在每章内容前明确本章【学习目标】和【重点与难点】, 每章内容后归纳有【本章小结】。【本章小结】包括两部分: 一是内容提要, 即对重要内容进行提示; 二是常见题型与解题指导, 意在分析和总结解题规律。这样既帮助学生整合本章知识, 加快理解掌握数学知识的速度, 又帮助学生释疑解难。把“学法”融于教材, 让学生轻松学高等数学。

④ 依据循序渐进的教学原则, 本教材精心配置了每节的例题、习题和每章的复习题。不仅注意知识点和例题、习题、复习题的相互呼应, 更注意题目之间的渐进性。书后附有习题和复习题的参考答案, 便于教师参考和学生自学反馈。

本教材第一至五章为两年制高职高专学生必学, 教学时数不少于 70 学时, 主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用(书中加“*”号的内容教师可酌情选用)。第六至十一章的教学时数不少于 60 学时。

本书在编写过程中得到了济宁职业技术学院、长春职业技术学院、商丘职业技术学院、黑龙江畜牧兽医职业学院、山东省科技职业学院、山东省济南卫生学校和东营职业学院、河南工业大学 8 所院校领导和老师的支持, 在此深表感谢。

本书框架结构、编写大纲及最后审定由王雪莲完成, 并改写了部分章节内容。刘春英、郑淑红、王玉英、王福胜也修改和整理了部分章节内容。

本教材的编写得到了化学工业出版社的大力支持, 不仅对本书提出了许多宝贵的意见和建议, 而且组织专家进行修改和审定, 在此表示衷心感谢。由于编者水平所限, 加之时间仓促, 书中定存有欠妥之处, 恳请广大同仁和读者批评指正。

编者

2008 年 6 月

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
【学习目标】	1
【重点与难点】	1
第一节 函数	1
一、函数的概念	1
二、函数的表示法	3
三、函数的性质	4
四、反函数	5
习题 1-1	5
第二节 初等函数	6
一、基本初等函数	6
二、复合函数	9
习题 1-2	10
第三节 极限的概念	10
一、数列的极限	10
二、函数的极限	11
三、极限的性质	14
四、无穷小量	15
五、无穷大量	16
习题 1-3	16
第四节 极限的运算	17
一、极限的四则运算法则	17
二、复合函数的极限法则	19
三、两个重要极限	19
四、无穷小的比较	21
习题 1-4	22
第五节 函数的连续性	23
一、函数连续性的概念	23
二、函数的间断点	24
三、连续函数的运算	25
四、初等函数的连续性	26
五、闭区间上连续函数的性质	26
习题 1-5	27
【本章小结】	28
【复习题一】	29
【数学史话】 极限思想的发展	30
第二章 导数与微分	32
【学习目标】	32
【重点与难点】	32
第一节 导数的概念	32
一、引例	32
二、导数的概念	33
三、导数的几何意义	36
四、函数的可导性与连续性的关系	37
习题 2-1	37
第二节 导数的运算	37
一、导数的四则运算法则	38
二、复合函数的求导法则	39
三、反函数的求导法则	40
四、初等函数的导数	41
五、三个常用的求导方法	42
习题 2-2	44
第三节 高阶导数	44
习题 2-3	45
第四节 微分及其应用	46
一、引例	46
二、微分的概念	46
三、微分公式和微分的运算法则	47
四、微分在近似计算中的应用	48
习题 2-4	49
【本章小结】	49
【复习题二】	50
【数学史话】 欧拉	54
第三章 导数的应用	55
【学习目标】	55
【重点与难点】	55
第一节 中值定理	55
一、罗尔定理	55

二、拉格朗日中值定理	56	二、曲线的渐近线	68
三、柯西定中值定理	57	三、函数图形的描绘	69
习题 3-1	59	习题 3-4	71
第二节 洛必达法则	59	* 第五节 曲率	71
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	59	一、曲率的概念	71
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	60	二、曲率的计算	73
三、其他类型的未定式	61	习题 3-5	75
习题 3-2	62	* 第六节 微分学在经济领域的应用	75
第三节 函数的单调性、极值与最值	63	一、边际分析	75
一、函数单调性的判别法	63	二、税收问题	77
二、函数的极值	64	三、弹性分析	78
三、函数的最值	66	习题 3-6	80
习题 3-3	67	【本章小结】	80
第四节 函数图形的描绘	67	【复习题三】	81
一、曲线的凹凸性及拐点	67	【数学史话】拉格朗日	83
第四章 不定积分	84	一、第一类换元积分法(凑微分法)	87
【学习目标】	84	二、第二类换元积分法	89
【重点与难点】	84	习题 4-2	91
第一节 不定积分的概念和性质	84	第三节 分部积分法	91
一、不定积分的概念	84	习题 4-3	93
二、不定积分的性质	85	【本章小结】	94
三、基本积分公式	85	【复习题四】	94
习题 4-1	86	【数学史话】牛顿	95
第二节 换元积分法	87	二、定积分的分部积分法	108
第五章 定积分及其应用	97	习题 5-3	109
【学习目标】	97	第四节 广义积分	109
【重点与难点】	97	一、无穷区间上的广义积分	109
第一节 定积分的概念与性质	97	二、无界函数的广义积分	111
一、定积分问题举例	97	习题 5-4	112
二、定积分的概念	99	第五节 定积分的应用	113
三、定积分的几何意义	100	一、定积分的微元法(元素法)	113
四、定积分的性质	101	二、定积分在几何上的应用	113
习题 5-1	103	* 三、定积分在物理上的应用	118
第二节 微积分基本公式	104	习题 5-5	120
一、积分上限函数	104	【本章小结】	120
二、微积分基本公式	105	【复习题五】	121
习题 5-2	106	【数学史话】莱布尼兹	122
第三节 定积分的计算	106		
一、定积分的换元积分法	106		

第六章 常微分方程	124		
【学习目标】	124		
【重点与难点】	124		
第一节 常微分方程的基本概念与可分离变量方程	124		
一、常微分方程的基本概念	124		
二、可分离变量方程	127		
习题 6-1	128		
第二节 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程	129		
一、一阶线性微分方程	129		
二、可降阶的高阶微分方程	131		
习题 6-2	133		
		第三节 二阶常系数线性微分方程	134
		一、二阶常系数线性微分方程解的结构	134
		二、二阶常系数线性齐次微分方程的解法	135
		三、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	137
		习题 6-3	141
		【本章小结】	142
		【复习题六】	143
		【数学史话】 正统的数学家——柯西	144
第七章 向量与空间解析几何	146		
【学习目标】	146		
【重点与难点】	146		
第一节 空间直角坐标系与向量的概念	146		
一、空间直角坐标系	146		
二、向量的概念及线性运算	148		
三、向量的坐标表示	149		
习题 7-1	151		
第二节 向量的点积和叉积	151		
一、向量的点积	151		
二、向量的叉积	152		
习题 7-2	154		
第三节 空间平面与直线	154		
一、图形与方程	154		
		二、平面	155
		三、直线	157
		习题 7-3	159
		第四节 曲面与空间曲线	159
		一、曲面	159
		二、空间曲线	160
		三、空间曲线在坐标面上的投影	162
		习题 7-4	163
		【本章小结】	163
		【复习题七】	164
		【数学史话】 向量的由来	165
第八章 多元函数微分学	166		
【学习目标】	166		
【重点与难点】	166		
第一节 多元函数的极限与连续性	166		
一、多元函数的概念	166		
二、二元函数的极限与连续性	168		
习题 8-1	170		
第二节 偏导数	170		
一、偏导数	170		
二、高阶偏导数	172		
习题 8-2	173		
第三节 全微分	174		
一、全微分的概念	174		
二、全微分在近似计算中的应用	176		
习题 8-3	176		
第四节 多元复合函数微分法	177		
		一、多元复合函数微分法	177
		二、隐函数的微分法	180
		习题 8-4	181
		第五节 偏导数在几何上的应用	181
		一、空间曲线的切线和法平面	181
		二、空间曲面的切平面和法线	183
		习题 8-5	184
		第六节 多元函数的极值和最值	184
		一、多元函数的极值	184
		二、多元函数的最值	186
		三、条件极值	187
		习题 8-6	190
		【本章小结】	190
		【复习题八】	192
		【数学史话】 多元函数微积分的创立 (一)	193

第九章 多元函数积分学	194
【学习目标】	194
【重点与难点】	194
第一节 二重积分的概念和性质	194
一、引例分析	194
二、二重积分的概念	195
三、二重积分的性质	195
习题 9-1	196
第二节 二重积分的计算与应用	196
一、在直角坐标系下计算二重积分	196
二、在极坐标系下计算二重积分	201
三、二重积分的应用	204
习题 9-2	207
* 第三节 曲线积分的概念与计算	208
一、第一类曲线积分——对弧长的曲线积分	208
二、第二类曲线积分——对坐标的曲线积分	210
习题 9-3	213
【本章小结】	213
【复习题九】	215
【数学史话】多元函数微积分的创立(二)	216
第十章 级数	217
【学习目标】	217
【重点与难点】	217
第一节 数项级数及其敛散性	217
一、数项级数的概念及性质	217
二、正项级数的概念及性质	222
三、交错级数的概念及性质	226
四、绝对收敛与条件收敛	226
习题 10-1	228
第二节 幂级数	228
一、函数项级数的概念	228
二、幂级数及其收敛性	229
三、幂级数的性质	231
四、函数的幂级数展开	233
习题 10-2	239
【本章小结】	240
【复习题十】	241
【数学史话】大数学家——泰勒	243
第十一章 拉普拉斯变换	245
【学习目标】	245
【重点与难点】	245
第一节 拉普拉斯变换的概念	245
一、拉普拉斯变换的基本概念	245
二、单位脉冲函数及其拉普拉斯变换	246
习题 11-1	248
第二节 拉普拉斯变换性质	248
一、线性性质	248
二、微分性质	248
三、积分性质	250
四、位移性质	250
五、延迟性质	251
六、卷积与卷积定理	251
习题 11-2	253
第三节 拉普拉斯变换的逆变换	254
习题 11-3	254
第四节 拉普拉斯变换的应用	255
习题 11-4	256
【本章小结】	256
【复习题十一】	257
【数学史话】拉普拉斯	257
附录 I 拉普拉斯变换表	259
附录 II 参考答案	262
参考文献	281

第一章 函数、极限与连续

学习目标

1. 理解复合函数、初等函数的概念，掌握复合函数的复合过程.
2. 深刻理解极限的概念，了解极限的性质.
3. 理解无穷小量的定义和无穷小量的概念.
4. 熟练掌握极限的运算法则，并能灵活应用.
5. 理解无穷小量的阶的比较（高阶无穷小、低阶无穷小、等价无穷小等），掌握无穷小替换定理，并能熟练应用求极限.
6. 深刻理解函数连续的概念和性质，了解连续函数的运算法则.

重点与难点

重点：函数的概念和性质；极限的概念和运算；连续函数的概念和性质.

难点：复合函数的分解；极限的概念和运算.

17 世纪，自然科学的大发展扩大了数学的研究领域，数学开始研究运动与变化. 函数是描述事物变化过程中变量相依关系的数学模型，是数学的基本概念之一. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学学科，而用极限的思想研究函数是高等数学的一种基本方法，也是高等数学区别于初等数学的一个显著标志.

本章将在总结中学已有函数知识的基础上，着重讨论函数的极限与函数的连续性，为微积分的学习奠定坚实的基础.

第一节 函 数

一、函数的概念

在研究某些自然现象或社会现象的变化过程时，往往会遇到一些变量，这些变量并不是孤立地变化的，而是存在着某种互相依赖关系. 为此引入例子进行说明.

引例 自由落体运动 设做自由落体运动的物体下落的初始时刻为 0，着陆的时刻为 T . 如果下落时间为 t ，下落距离为 s ，则变量 s 与变量 t 之间的对应关系可用公式表示为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度. 显然，如果变量 t 在 $[0, T]$ 上任意取定一个值时，按照公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ ，变量 s 就有唯一确定的值与它相对应. 这里称变量 s 是变量 t 的函数. 由此可抽象出函数的概念.

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y ，若当变量 x 在实数的某个范围 D 内任意取定一个数值

时, 变量 y 按照一定的对应法则 f , 都有唯一确定的值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作

$$y=f(x), x \in D,$$

其中变量 x 称为自变量, 变量 y 称为函数 (或因变量), D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$, 按照对应法则 f , 函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之相对应, 则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$.

当自变量 x 取遍定义域 D 内的每个数值时, 对应的函数值的集合称为函数的值域, 记作 M .

2. 函数的两个要素

函数的定义域和对应法则称为函数的两大要素, 而函数的值域一般称为函数的派生要素. 所以, 两个函数相同的充分必要条件是两函数的定义域和对应法则都相同, 但与变量的符号无关.

使得函数有意义的自变量的取值范围 D 即为函数的定义域.

【例 1】 求函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x} + \ln(2-x)$ 的定义域.

解 为使函数有意义, 必满足

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \\ x < 2 \end{cases}.$$

\therefore 函数的定义域为 $\{x | -1 \leq x < 2 \text{ 且 } x \neq 0\}$, 用区间可表示为 $[-1, 0) \cup (0, 2)$.

【例 2】 设函数 $y=f(x)=x^2-2x+3$, 则 f 确定的对应法则是

$$y=f(\quad) = (\quad)^2 - 2(\quad) + 3.$$

【例 3】 设 $y=f(x)=e^x+2\sin x-5$, 求 $f(\pi)$.

解 $y|_{x=\pi} = f(\pi) = e^\pi + 2\sin\pi - 5 = e^\pi - 5$.

【例 4】 已知 $f(\sin x) = \cos^2 x$, 求 $f(x)$ 和 $f(1)$.

解 设 $t = \sin x$, 则 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$.

由已知得 $f(t) = 1 - t^2$, 则 $f(x) = 1 - x^2$, $f(1) = 1 - 1^2 = 0$.

【例 5】 判断下列各对函数是否相同. 为什么?

(1) 函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 和 $y = x$;

(2) 函数 $y = \sqrt{x^2}$ 和 $y = x$;

(3) 函数 $y = \sqrt{x}$ 和 $w = \sqrt{u}$.

解 (1) \because 函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域是 $\{x | x \neq 0\}$, 而函数 $y = x$ 的定义域为 R , 它们的定义域不同.

\therefore 函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 与函数 $y = x$ 是不同的;

(2) \because 函数 $y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 它与函数 $y = x$ 的对应法则不同.

\therefore 函数 $y = \sqrt{x^2}$ 与函数 $y = x$ 是不同的;

(3) \because 函数 $y = \sqrt{x}$ 和函数 $w = \sqrt{u}$ 的定义域和对应法则都相同.

\therefore 函数 $y = \sqrt{x}$ 和函数 $w = \sqrt{u}$ 是相同的.

二、函数的表示法

函数有三种表示方法：表格法、图像法和公式法. 高等数学中，当用公式法表示函数时，还会遇到下面三种函数.

① **分段函数** 在自变量不同的取值范围内，有不同的函数表达式，这样的函数叫分段函数，如函数 $y = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1+x, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ 就是定义在 $[-2, 3]$ 上的分段函数，其图像如图 1-1 所示；

而符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 就是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数，其图像如图 1-2 所示.

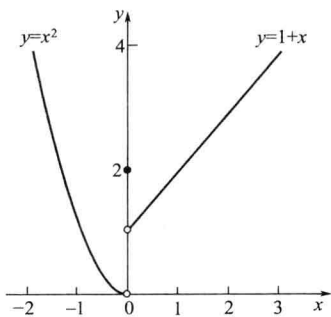


图 1-1

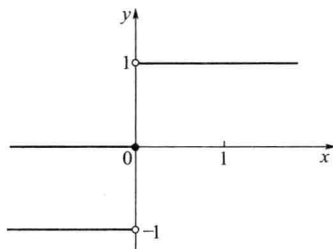


图 1-2

【例 6】 某城市出租车收费标准为乘车不超过 2km，收费 6 元；若超过 2km，超过的里程每千米加收 1.2 元.

(1) 试用公式法写出车费和车程之间的函数关系；

(2) 求函数的定义域；

(3) 求车程分别为 1km 和 7km 时的车费.

解 (1) 设车程为 x km，乘车费用为 y 元，则 x 和 y 之间函数关系为分段函数

$$y = \begin{cases} 6, & 0 < x \leq 2 \\ 6 + 1.2(x - 2), & x > 2 \end{cases};$$

(2) 由于当 $0 < x \leq 2$ 或 $x > 2$ 时，函数都有意义，所以其定义域为

$$(0, 2] \cup (2, +\infty) = (0, +\infty);$$

(3) $\because 0 < 1 < 2, \therefore y|_{x=1} = 6$ (元),

$\because 7 > 2, \therefore y|_{x=7} = 6 + 1.2(7 - 2) = 12$ (元),

即当车程分别为 1km 和 7km 时，车费分别为 6 元和 12 元.

② **隐函数** 在方程 $F(x, y) = 0$ 中，若变量 x 在某个区间 I 内任意取定一个值，总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数.

例如，方程 $e^x + xy - 1 = 0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系.

注意 通常把形如 $y = f(x)$ 的函数称为显函数，把隐函数化成显函数的过程叫隐函数的显化. 有些隐函数通过一定的运算可化成显函数，如 $e^x + xy - 1 = 0$ 可化成 $y = \frac{1 - e^x}{x}$. 但有些隐函数却不可能化成显函数，如 $e^x + xy - e^y = 0$.

③ **参数方程确定的函数** 中学平面解析几何中学过参数方程，如参数方程 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$