民族院校精品课程学习指导书

GAODENG DAISHU
SIXIANG FANGFA HE YINAN JIEXI

高等代数思想方法和疑难解析

赵 云 编著

甘肃民族出版社
GANSU NATIONALITIES PUBLISHING HOUSE

高等代数
思想方法和疑难解析

GAODENG DAISHU
SIXIANG FANGFA HE YINAN JIEXI

赵　云　编著

图书在版编目（CIP）数据

高等代数思想方法和疑难解析/赵云编著．—兰州：甘肃民族出版社，2008.5
ISBN 978-7-5421-1303-0

Ⅰ．高… Ⅱ．赵… Ⅲ．高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 059072 号

书　　名：高等代数思想方法和疑难解析
作　　者：赵　云　编著
责任编辑：李青立　张兰萍
封面设计：陈妮娜
出　　版：甘肃民族出版社（730030　兰州市南滨河东路 520 号）
发　　行：甘肃民族出版社发行部（730030　兰州市南滨河东路 520 号）
印　　刷：甘肃新华印刷厂
开　　本：880mm×1230mm 1/32 印张：4.125　插页：2
字　　数：130 千
版　　次：2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～1000
书　　号：ISBN 978-7-5421-1303-0
定　　价：15.00 元

邮编：730030　地址：兰州市南滨河东路 520 号
电话：0931-9773261（编辑部　联系人：李青立　E-mail：LiLi295@sohu. com）
电话：0931-8773271（发行部　联系人：葛　慧　E-mail：gsmzgehLi3271@tom. com）

民族院校精品课程学习指导书

甘肃民族出版社
GANSU NATIONALITIES PUBLISHING HOUSE

前 言

高等代数是数学专业的一门主干基础课程，对于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、科学表达能力，提高学生的“数学素质”以及后继课程的学习起着非常重要的作用。但是，学生在学习这门课程时普遍感到抽象，抓不住概念的实质，解题更感困难，总结不出一般的思考方法。尤其对于民族院校数学系的学生来说，高等代数的学习难度更大，往往是对概念一知半解、解题无从下手、思路不清、掌握不住从定义出发思考和进行严密的逻辑推理的基本学习方法。因此，着眼于民族院校理科生的知识基础，充分尊重学生现有的发展水平，进行因材施教的特殊教育，切实加大课外辅导的力度，给学生创造在课堂之外进行思考讨论的条件，实现使学生的思维从课堂向课外的自然延伸。同时，也为帮助学生消化课堂所讲解的内容，加深对基础概念基本理论的理解，提高解题的技能与技巧。编者根据长期从事民族院校高等代数课教学的实践经验，编写了本书。

本书内容体系按照校级精品课程选用教材——张禾瑞、郝鈵新编《高等代数》(第五版)编排。每章均由以下三部分内容组成：

一、内容概述　叙述本章基本内容，突出重点与难点，讲解各知识点之间的联系，梳理主线，分析前后章节之间环环相扣的知识链，使学生对本章内容有一个整体的认识，全面理解高等代数的理论体系。

二、思想方法　精选了高等代数中具有代表性的问题和张禾瑞《高等代数》中的部分典型习题为例题，通过对例题的分析解答，归纳出高等代数中基本问题的解决方法和技巧，总结解题规律，使读者可以举一反三，触类旁通，蕴涵思想方法于问题的分析解答当中。

三、疑难解析　回答了学生在各章学习中不易掌握和容易混淆的一些问题，帮助学生抓住概念的实质，澄清事实，明确认识。

由于编者水平有限，教学经验不足，疏漏难免，敬请读者指正。

编　者

2007 年 10 月

目　录

第一章　多项式

一、内容概述

多项式是代数学中一个基本的研究对象，它与高次方程的讨论有着密切的联系．虽然它在整个高等代数课程中是一个相对独立而自成体系的部分，但却为高等代数所讲述的基本内容提供了理论依据．多项式理论中的一些重要定理和方法，在进一步学习数学理论和解决实际问题时常要用到，虽然学生在中学代数里已经学过多项式，但那时对多项式的讨论侧重于对多项式的运算，很少涉及多项式的理论．这一章将严格地、系统地，讨论一元多项式的整除性理论、多项式的因式分解以及多项式的根等问题．对于准确地刻画概念，严谨地推导论述，学生会感到很不习惯．因此，在教学过程中要注意训练学生正确掌握概念，学会推理要有根据，并且计算准确无误．

本章可归纳为以下四个方面：

1．一般理论，包括一元多项式的概念、运算、导数及基本性质；

2．整除性理论，包括整除、最大公因式、互素的概念与性质；

3．因式分解理论，包括不可约多项式、因式分解、重因式、实系数与复系数多项式的因式分解、有理系数多项式不可约的判定等；

4．根的理论，包括多项式理论、多项式的根、代数学基本定理、有理系数多项式有理根的求法、根与系数的关系等．

一元多项式内容的重点是整除性理论与因式分解的理论，最基本的结论是带余除法定理，最大公因式的存在表示定理，因式分解的唯一性定理．在学习过程中如果能把握住这两个重点和三大基本定理就能从整体上把握一元多项式的理论．

二、思想方法

1．多项式相等的问题

多项式相等的问题，可以利用多项式相等的定义，即对应同次项系数相等，也可根据数域 F 上多项式函数相等的意义，分别取一些特殊的 x 的值来确定参数．

例 1 当 a,b,c 取何值时多项式 $f(x)=x-5$ 与 $g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$ 相等．

解 方法一 由于

$$g(x)=(a+c)x^2+(-4a+b-c)x+(4a+b+2c)$$

根据多项式相等的定义，得

$$a+c=0,-4a+b-c=1,4a+b+2c=-5$$

解得 $a=-\frac{6}{5},b=-\frac{13}{5},c=\frac{6}{5}$

方法二 分别取 $x=2,-1,0$ 由对应函数值相等得

$$-3=3b+4c,-6=9a+4b,-5=4a+b+2c$$

解得 $a=-\frac{6}{5},b=-\frac{13}{5},c=\frac{6}{5}$

例 2 设 $f(x),g(x)$ 与 $h(x)$ 均为实数域上的多项式，证明：如果

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$

证明 反证法，若 $f(x)\neq 0$，则 $f^2(x)\neq 0$ 由

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)=x(g^2(x)+h^2(x))$$

知 $g^2(x)+h^2(x)\neq 0$ 因此

$$\partial(f^2(x))=\partial[x(g^2(x)+h^2(x))]$$

但 $\partial(f^2(x))$ 为偶数，而 $\partial[x(g^2(x)+h^2(x))]$ 为奇数，因此

$$f^2(x)\neq xg^2(x)+xh^2(x)$$

这与已知矛盾，故 $f(x)=0$ 此时 $x(g^2(x)+h^2(x))=0$，由 $x\neq 0$，知 $g^2(x)+h^2(x)=0$. 因为 $g(x),h(x)$ 均为实系数多项式，从而必有 $g(x)=h(x)=0$，于是 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

2. 带余除法与整除性．用多项式 $g(x)\neq 0$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 可以通过如下两种格式进行：

①普通除法．

$$\begin{array}{r l}
 & \text{商式 } q(x) \\
\text{除式 } g(x) & \overline{)\text{被除式 } f(x)} \\
 & \underline{-)q(x)g(x)} \\
 & \text{余式 } r(x)
\end{array}$$

②竖式除法.

$$\begin{array}{l|l|l}
\text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商式 } q(x) \\
 & \underline{-)q(x)g(x)} & \\
 & \text{余式 } r(x) &
\end{array}
\quad \text{或} \quad
\begin{array}{l|l|l}
\text{商式 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x). \\
 & \underline{-)q(x)g(x)} & \\
 & \text{余式 } r(x) &
\end{array}$$

在利用以上两种格式进行计算时,要逐步利用除式 $g(x)$确定商 $q(x)$中由高次到低次的项来消去被除式的首项,以得到次数低于 $g(x)$的多项式或零多项式 $r(x)$.

例 1　确定 m,p 的值使 $x^2+3x+2\mid x^4+mx^2-px+2$.

解　方法 1　应用竖式除法求得余式,再令余式为零

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2+3x+2 & x^4 \qquad +mx^2-px+2 & x^2-3x+(m+7)=q(x) \\
 & \underline{x^4+3x^3+2x^2} & \\
 & \quad -3x^3+(m-2)x^2-px+2 & \\
 & \quad \underline{-3x^3-9x^2-6x} & \\
 & \qquad (m+7)x^2-(p-6)x+2 & \\
 & \qquad \underline{(m+7)x^2+3(m+7)x+2(m+7)} & \\
 & r(x)= \qquad -(3m+p+15)x-(2m+12) &
\end{array}$$

令 $r(x)=0$　可得:$-(3m+p+15)=0,-2(m+6)=0$

解得:$m=-6,p=3$

方法 2　应用待定系数法

如果 $x^2+3x+2\mid x^4+mx^2-px+2$,则有 $q(x)=x^2+ax+b$,使

$$x^4+mx^2-px+2=(x^2+ax+b)(x^2+3x+2)$$

将上式右端展开,并比较同次项的系数,得

$$0=a+3,m=2+3a+b,-p=2a+3b,2=2b$$

解得:$a=-3,b=1,m=-6,p=3$

例 2　证明 $x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$($m,n,p$ 是三个任意的正整数).

分析 用带余除法及待定系数法不易证明时，可以考虑采用因式定理来证明，即$(x-a)|f(x)$的充分必要条件是$f(a)=0$.

证明 可求得$x^2+x+1=0$的根为$\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，所以

$$x^2+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)$$

又因$\omega_i^3-1=(\omega_i-1)(\omega_i^2+\omega_i+1)=0(i=1,2)$，知$\omega_i^3=1$从而$\omega_i^{3m}=\omega_i^{3n}=\omega_i^{3p}$.

设$f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$则有

$f(\omega_i)=\omega_i^{3m}+\omega_i^{3n+1}+\omega_i^{3p+2}=1+\omega_i+\omega_i^2=0,(i=1,2)$

故由因式定理知$(x-\omega_1)|f(x)$，$(x-\omega_2)|f(x)$，又因为$x-\omega_1$与$x-\omega_2$互素，从而

$(x-\omega_1)(x-\omega_2)|f(x)$，即$x^2+x+1|f(x)$

例 3 证明：x^d-1整除x^n-1当且仅当d整除n.

分析 如能利用乘法公式在被除式中分解出除式作为因式，则也能证明整除性.

证明 充分性 设$d|n$，假定$n=dt$，则有

$x^n-1=(x^d)^t-1=(x^d-1)(x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1)$

从而$x^d+1|x^n-1$

必要性 已知$x^d-1|x^n-1$，假定$n=dt+r$，$0\leqslant r<d$，则

$x^n-1=x^{dt+r}-1=x^{dt}\cdot x^r-x^r+x^r-1=(x^{dt}-1)x^r+(x^r-1)$

由充分性的证明知$x^d-1|x^{dt}-1$，从而由$x^d-1|x^n-1$得$x^d-1|x^r-1$. 因为$0\leqslant r<d$，所以必有$x^r-1=0$，即$r=0$，故得$d|n$.

3. 最大公因式性质的应用

例 1 设$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$. 证明：若$(f(x),g(x))=d(x)$，且$f(x)$和$g(x)$不全为零，则$(f_1(x),g_1(x))=1$；反之，若$(f_1(x),g_1(x))=1$，则$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

证明 因为$(f(x),g(x))=d(x)$，故存在$u(x)$，$v(x)$，使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$$

即 $d(x)f_1(x)u(x)+d(x)g_1(x)v(x)=d(x)$.

由于 $f(x),g(x)$不全为零，故 $d(x)\neq 0$，两边消去 $d(x)$得：

$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$

即：$(f_1(x),g_1(x))=1$

反之，由 $f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$知 $d(x)$是 $f(x),g(x)$的公因式，因$(f_1(x),g_1(x))=1$，故存在 $u(x),v(x)$使

$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$

两边乘以 $d(x)$得

$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$

若 $h(x)$是 $f(x),g(x)$的任一公因式，则有 $h(x)|d(x)$，从而 $d(x)$是 $f(x),g(x)$的一个最大公因式.

例 2 令 $f(x)$与 $g(x)$是 $F[x]$的多项式，而 a,b,c,d 是 F 中的数，并且

$ad-bc\neq 0$

证明：$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x))$.

证明 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),g_1(x)=cf(x)+dg(x)$. 令 $(f(x),g(x))=d(x)$，由于 $d(x)|f(x),d(x)|g(x)$，而 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，所以 $d(x)|f_1(x)$；同样由 $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$知，$d(x)|g_1(x)$.

再设 $h(x)$是 $f_1(x)$与 $g_1(x)$的任一公因式，则有 $h(x)|f_1(x)$，$h(x)|g_1(x)$. 由于，$ad-bc\neq 0$，可解得

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x)$$

$$g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x)$$

从而由 $h(x)|f_1(x),h(x)|g_1(x)$得 $h(x)|f(x),h(x)|g(x)$，于是 $h(x)|d(x)$，即 $d(x)$也是 $f_1(x)$与 $g_1(x)$的最大公因式，故

$(f_1(x),g_1(x))=(f(x),g(x))$.

例 3 证明：

(i)$(f,g)h$ 是 fh 和 gh 的最大公因式；

(ii) $(f_1,g_1)(f_2,g_2)=(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2)$,

此处 f,g,h 等都是 $F[x]$ 的多项式.

证明 (i)设 $(f,g)=d$,则 $d|f,d|g$. 所以 $dh|fh,dh|gh$. 又有 u,v 使 $uf+vg=d$. 于是

$$ufh+vgh=dh$$

所以 dh 是 fh,gh 的一个最大公因式.

(ii)设 $(f_1,g_1)=d_1,(f_2,g_2)=d_2$,则 d_1d_2 同时整除 $f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2,d_1d_2$ 是它们的一个公因式,再设 φ 是 $f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2$ 的任一公因式,那么就有 $\varphi|(f_1f_2,f_1g_2),(f_1f_2,f_1g_2)=f_1(f_2,g_2)=f_1d_2,\varphi|(f_2g_1,g_1g_2),(f_2g_1,g_1g_2)=(f_2,g_2)g_1=g_1d_2$. 所以 $\varphi|(f_1d_2,g_1d_2)$,而 $(f_1d_2,g_1d_2)=(f_1,g_1)d_2=d_1d_2$. 即 $\varphi|d_1d_2$. 故有

$(f_1,g_1)(f_2,g_2)=(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2)$.

例 4 证明:

(i)设 $(f,g)=1$. 令 n 是任意的正整数,那么 $(f,g^n)=1$. 由此进一步证明,对于任意正整数 m,n,都有 $(f^m,g^n)=1$;

(ii)对于任意正整数 n 数都有 $(f,g)^n=(f^n,g^n)$.

证明 (i)因为 $(f,g)=1$,所以有 u,v 使 $uf+vg=1$,则 $vg=1-uf$,两边 n 次方并整理,得

$$v^ng^n=(1-uf)^n=1+u_1f$$

所以 $-u_1f+v^ng^n=1$,从而 $(f,g^n)=1$,固定 g^n,同理可证 $(f^n,g^n)=1$.

(ii)设 $(f,g)=d$,则 $f=df_1,g=dg_1$ 且 $(f_1,g_1)=1$,由(i)知 $(f_1^n,g_1^n)=1$,从而存在 u,v 使 $uf_1^n+vg_1^n=1$. 所以 $uf_1^nd^n+vg_1^nd^n=d^n$,即 $uf^n+vg^n=d^n$. 又 $d^n|f^n,d^n|g^n$,所以

$$(f,g)^n=(f^n,g^n)$$

4. 多项式的因式分解问题.

例 1 分别在复数域,实数域和有理数域上分解多项式 x^4+1 为不可约因式的乘积.

解 $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2$

$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

$=(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$

在有理数域上 x^4+1 不可约．

例 2　证明：$g^2(x)\mid f^2(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)\mid f(x)$．

证明　充分性显然．现证必要性，若 $g^2(x)\mid f^2(x)$，$f(x)=g(x)=0$，那么 $g(x)\mid f(x)$．如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为 0，令 $(f(x),g(x))=d(x)$，则 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，且 $(f_1(x),g_1(x))=1$．那么，$f^2(x)=d^2(x)f_1^2(x)$，$g^2(x)=d^2(x)g_1^2(x)$，故由

$g^2(x)\mid f^2(x)$，可得 $g_1^2(x)\mid f_1^2(x)$，故 $g_1(x)\mid f_1^2(x)$，又 $(f_1(x),g_1(x))=1$，根据互素多项式的性质知，$g_1(x)\mid f_1(x)$，从而 $g_1(x)=c$（常数）．于是

$$g(x)=cd(x),g(x)\mid f(x)$$

例 3　证明：次数 >0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为：对任意的多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x),g(x))=1$，或者对某一正整数 m，$f(x)\mid g^m(x)$．

证明　必要性设 $f(x)=p^m(x)$，其中 $p(x)$ 是不可约多项式，则对于任意多项式 $g(x)$，有

$(p(x),g(x))=1$ 或 $p(x)\mid g(x)$

当 $(p(x),g(x))=1$ 时，有 $(f(x),g(x))=1$；而当 $p(x)\mid g(x)$ 时，有 $p^m(x)\mid g^m(x)$，即 $f(x)\mid g^m(x)$．

充分性　设 $f(x)=p^k(x)q(x)$，其中 $k\geqslant 1$，$p(x)$ 不可约，且 $p(x)$ 不是 $q(x)$ 的因式，$\partial(q(x))>0$．取 $g(x)=q(x)$，则

$(f(x),q(x))=q(x)\neq 1$；且对于任意正整数 m，$f(x)$ 不能整除 $q^m(x)$，这是因为，若

$f(x)\mid q^m(x)$，则由 $p(x)\mid f(x)$ 得 $p(x)\mid q^m(x)$，又由 $p(x)$ 不可约得 $p(x)\mid q(x)$，与假设矛盾．故 $f(x)$ 必为一不可约多项式的方幂．

例 4 设 $p(x)\in F[x]$，且 $\partial(p(x))>0$. 若对于任意 $f(x),g(x)\in F[x]$，只要 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 就有 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$ 不可约.

证明 反证法 若 $p(x)$ 可约，设 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$，其中 $p_1(x),p_2(x)$ 的次数都低于 $p(x)$ 的次数. 由 $p(x)\mid p_1(x)p_2(x)$，根据已知条件可得出 $p(x)\mid p_1(x)$ 或 $p(x)\mid p_2(x)$，这是不可能的.

5. 重因式的有关性质证明.

例 1 当 a,b 满足什么条件时多项式 $f(x)=x^4+4ax+b$ 有重根?

解 方法一 $f'(x)=4x^3+4a$ 用 $f'(x)$ 除 $f(x)$ 得余式为 $r(x)=3ax+b$，可见，当 $a=b=0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 有 3 次的最大公因式；当 $a\neq 0$ 时，用 $r_1(x)$ 除 $f'(x)$ 得余式：

$$r_2(x)=\frac{4(27a^4-b^3)}{27a^3}$$

可见，$27a^4-b^3=0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 有 2 次的最大公因式，综上可知，当 $27a^4-b^3=0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素，$f(x)$ 有重根.

方法二 当 $a=0$ 时，只有 $b=0$，$f(x)=x^4$ 才有重根(重数是 4). 当 $a\neq 0$ 时，设 α 是 $f(x)$ 的重根，则 α 也是 $f'(x)$ 的根，即有

$$f(\alpha)=\alpha^4+4a\alpha+b=0,\ f'(\alpha)=4\alpha^3+4a=0$$

整理得 $\alpha(\alpha^3+4a)=-b$，$\alpha^3=-a$ 解得 $\alpha=-\dfrac{b}{3a}$，于是

$$\left(-\frac{b}{3a}\right)^3=\alpha^3=-a\text{，即 }27a^4-b^3=0$$

综上可知，当 $27a^4-b^3=0$ 时，$f(x)$ 有重根.

例 2 求 $f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+17x^3+6x^2-20x+8$ 的根.

解 方法一 $f'(x)=7x^6+12x^5-30x^4-32x^3+51x^2+12x-20$

用辗转相除法，得

$$(f(x),f'(x))=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$$

于是

$$q(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$$

$$=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

由于 $f(x)$ 与 $q(x)$ 有相同的不可约因式 $x-1$，$x+2$. 可见 $f(x)$ 有根 1、-2.

再用综合除法

1	1	2	-6	-8	17	6	-20	8
		1	3	-3	-11	6	12	-8
1	1	3	-3	-11	6	12	-8	0
		1	4	1	-10	-4	8	
1	1	4	1	-10	-4	8	0	
		1	5	6	-4	-8		
1	1	5	6	-4	-8	0		
		1	6	12	8			
1	1	6	12	8	0			
		1	7	19				
	1	7	19	27				

可见 1 是 $f(x)$ 的四重根，-2 是 $f(x)$ 的三重根 .

方法二　$f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式，故它的有理根都是整数，且都是常数项的因子 . 常数项 8 的因子为 ±1，±2，±4，±8.

$f(x)$ 的系数之和为零，所以，1 是 $f(x)$ 的有理根，用综合除法检验可以知道，1 是 $f(x)$ 的四重根且

$$f(x)=(x-1)^4(x^3+6x^2+12x+8)$$

令 $g(x)=x^3+6x^2+12x+8$，因为 $g(x)$ 的各项系数都是正数，所以，$g(x)$ 没有正根，又 $g(1)=27$，$g(-1)=1$. $g(x)$ 可能的有理根在 -2，-4，-8 中，只有 $u=-2$ 时，两个商

$$\frac{g(1)}{1-u},\frac{g(-1)}{1+u}$$

才都是整数 . 用综合除法试验可知，-2 是 $g(x)$ 的三重根，故 $f(x)$

$=(x-1)^4(x+2)^3$，即 1 是 $f(x)$ 的四重根，-2 是 $f(x)$ 的三重根．

例 3　证明：数域 F 上的 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数整除的充分必要条件是

$$f(x)=a(x-b)^n$$

这里 a,b 是 F 中的数．

证明　充分性　因为 $f(x)=a(x-b)^n$，易知 $f'(x)=na(x-b)^{n-1}$，所以 $f'(x)\mid f(x)$.

必要性　因为 $f'(x)\mid f(x)$，可令 $f(x)=af'(x)(x-b)$，所以

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=a(x-b)$$

由重因式的分离知 $f(x)$ 只含有 $x-b$ 形式的不可约因式，所以 $f(x)=a(x-b)^n$.

6. 余数定理的应用．

余数定理表明可以采用综合除法确定多项式 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 时的值 $f(\alpha)$ 或验证 α 是 $f(x)$ 的单根或重根，这比直接将 α 代入 $f(x)$ 计算要方便得多．

例 1　证明　如果 $(x-1)\mid f(x^n)$，那么 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

证明　因为 $(x-1)\mid f(x^n)$，所以 1 是 $f(x^n)$ 的根，于是

$$f(1^n)=f(1)=0，即 (x-1)\mid f(x)$$

故存在多项式 $g(x)$，使得：

$$f(x)=(x-1)g(x)，从而有 f(x^n)=(x^n-1)g(x^n)，此即$$

$$(x^n-1)\mid f(x^n)$$

例 2　证明：如果 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么 $(x-1)\mid f_1(x)$，$(x-1)\mid f_2(x)$.

证明　设 x^2+x+1 的两个根为 α,β，其中 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

由于

$$(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$$