



严格按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写

基础知识理解与运用是考查重点

2005年

全国硕士研究生入学统一考试

理工类

数 学

模拟自测试卷及解答

教育部考试中心《中国考试》杂志社 组编

44



朝華出版社

严格按照《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写

基础知识理解与运用是考查重点

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

理工类

数 学

模拟自测试卷及解答

教育部考试中心《中国考试》杂志社 组编

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

2005年全国硕士研究生入学统一考试理工类数学模拟自测试卷及解答/  
教育部考试中心《中国考试》杂志社组编. —北京:朝华出版社,2004.8

ISBN 7-5054-1041-5

I. 2... II. 教... III. 高等数学—研究生—入学考试—解题  
IV. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第075954号

## 2005年全国硕士研究生入学统一考试理工类数学模拟自测试卷及解答

组 编 教育部考试中心《中国考试》杂志社

策划编辑 田 辉 谭隆全

责任编辑 王 磊

责任印制 赵 岭

封面设计 东 方

出版发行 朝华出版社

地 址 北京市车公庄西路35号

邮政编码 100044

电 话 (010)68433166/62263982/62268370(总编室)

(010)68413840/68433213/62261657/62268982(发行部)

传 真 (010)88415258/62267739(发行部)

印 刷 北京建工印刷厂

经 销 全国新华书店

开 本 787×1092毫米 1/16

字 数 380千字

印 张 15.5

版 次 2004年8月第1版第1次印刷

装 别 平

书 号 ISBN 7-5054-1041-5/G·0476

定 价 22.00元

版权所有 翻印必究·印装有误 负责调换

# 使用说明

为了加强对参加 2005 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生复习的指导,强化模拟,实战训练,做好考前冲刺,按照教育部制订的《2005 年全国硕士研究生入学统一考试政治理论考试大纲》和《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,教育部考试中心《中国考试》杂志社组织部分多年来参加大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这套《2005 年全国硕士研究生入学统一考试模拟自测试卷及解答》系列丛书。

本套丛书包括《2005 年全国硕士研究生入学统一考试政治理论模拟自测试卷及解答》、《2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工类数学模拟自测试卷及解答》、《2005 年全国硕士研究生入学统一考试经济类数学模拟自测试卷及解答》共计 3 分册,每分册均精心设计和编写了 12 套模拟自测试卷及解答。

考生在答题时应注意以下几点:

1. 可在系统复习、全面复习的同时,结合本模拟自测试卷,以巩固复习效果。
2. 答题前应作好充分准备,找类似“考场的环境”答题,答题时应完全进入“考试状态”,使自己置身于“真正在考试”的环境中。必须在规定的时间内答完每份试卷。
3. 切忌边答题边看答案,即使碰上一看就会的题,也必须按要求答完。
4. 答完每份试卷后,应参照答案自己评分。有条件的考生,最好请老师或他人为自己评分。
5. 答题后,应根据得分情况,找出差距,及时查缺补漏,直至验收合格。只有这样,答题时才能思路畅通,有的放矢。

教育部考试中心  
《中国考试》杂志社  
2004 年 8 月





## 目 录

2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(一) .....	(1)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(一)答案及解析 .....	(5)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(二) .....	(12)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(二)答案及解析 .....	(16)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(三) .....	(23)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(三)答案及解析 .....	(27)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(四) .....	(34)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(四)答案及解析 .....	(38)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(五) .....	(44)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(五)答案及解析 .....	(48)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(六) .....	(54)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(六)答案及解析 .....	(58)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(七) .....	(65)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(七)答案及解析 .....	(69)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(八) .....	(75)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(八)答案及解析 .....	(79)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(九) .....	(86)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(九)答案及解析 .....	(90)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(十) .....	(97)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(十)答案及解析 .....	(101)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(十一) .....	(107)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(十一)答案及解析 .....	(111)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(十二) .....	(117)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学一模拟自测试卷(十二)答案及解析 .....	(121)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(一) .....	(126)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(一)答案及解析 .....	(130)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(二) .....	(137)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(二)答案及解析 .....	(141)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(三) .....	(148)



2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(三)答案及解析 .....	(152)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(四) .....	(158)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(四)答案及解析 .....	(162)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(五) .....	(167)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(五)答案及解析 .....	(171)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(六) .....	(176)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(六)答案及解析 .....	(180)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(七) .....	(186)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(七)答案及解析 .....	(190)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(八) .....	(196)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(八)答案及解析 .....	(200)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(九) .....	(205)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(九)答案及解析 .....	(209)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(十) .....	(215)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(十)答案及解析 .....	(219)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(十一) .....	(224)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(十一)答案及解析 .....	(228)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(十二) .....	(233)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二模拟自测试卷(十二)答案及解析 .....	(237)
(97) .....	附编及解答(八)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(98) .....	(六)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(99) .....	附编及解答(六)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(97) .....	(十)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(101) .....	附编及解答(十)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(101) .....	(十一)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(111) .....	附编及解答(十一)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(117) .....	(二十)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(151) .....	附编及解答(二十)卷自测题一学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(156) .....	(一)卷自测题二学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(130) .....	附编及解答(一)卷自测题二学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(137) .....	(二)卷自测题二学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(141) .....	附编及解答(二)卷自测题二学数工数知考一统学人主交研士研国全中
(148) .....	(三)卷自测题二学数工数知考一统学人主交研士研国全中



## 2005 年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学一模拟自测试卷(一)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处有  $f(0)=0, f'(0)=-1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} [1+2f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{-2}$ .

(2) 设函数  $y=y(x)$  满足  $xy'(x)=\sqrt{1-x^2}$ , 且  $y(1)=0$ , 则  $\int_0^1 y(x)dx = \frac{1}{2}$ .

(3) 设  $\Sigma$  为  $yOz$  平面上曲线  $L: 0 \leq z \leq 1, y=1+z^2$  绕  $y$  轴旋转一周所得的曲面, 则  $u(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$  沿着曲面  $\Sigma$  上过点  $(0, 2, 1)$  与  $y$  轴正向一致的(依 81 代部本) (61)法线方向向量的方向导数为 \_\_\_\_\_.

(4) 设  $A, B$  为三阶相似矩阵,  $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$  为  $A$  的两个特征值, 且  $B$  的行列式为 1, 则行列式  $|A+E| =$  \_\_\_\_\_.

(5) 对某种电子装置的输出测量了 4 次, 得到的观测值  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , 设它们是相互独立的同服从正态分布  $N(1, \sigma^2)$  的随机变量, 则概率  $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4) > 1\} =$  \_\_\_\_\_.

(6) 设  $X$  服从区间  $(-1, 1)$  内的均匀分布, 则  $X$  与  $Y=|X|$  的相关系数为 \_\_\_\_\_.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设对任意的  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零.  
(C) 一定不存在. (D) 不一定存在. [ ]

(8) 设函数  $f(x)$  满足关系式  $f''(x) + \sin^2 f'(x) = \sin x$ , 且  $f'(0) = 0$ , 则

- (A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值.  
(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值.  
(C) 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点.  
(D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值, 点  $(0, f(0))$  也不是曲线  $y=f(x)$  的拐点. [ ]

(9) 设直线  $L$  为  $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ , 平面  $\pi$  为  $4x-2y+z-2=0$ , 则

- (A)  $L$  平行于  $\pi$ . (B)  $L$  在  $\pi$  上.  
(C)  $L$  垂直于  $\pi$ . (D)  $L$  与  $\pi$  斜交. [ ]

(10) 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且  $f(x) < g(x)$ , 则必有

- (A)  $f(-x) > g(-x)$ . (B)  $f'(x) < g'(x)$ .  
(C)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . (D)  $\int_0^x f(t)dt < \int_0^x g(t)dt$ . [ ]

(11) 设  $A, B, C, D$  为四个  $n$  阶方阵, 且满足  $ABCD = E$ , 则

- (A)  $ADBC = E$ . (B)  $BCDA = E$ .  
(C)  $CDBA = E$ . (D)  $DACB = E$ . [ ]

(12) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $r(A) = n-3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的三个线性无关的解, 则不是  $Ax = 0$  的基础解系的是



(A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1.$

(B)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1.$

(C)  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$

(D)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3.$

(13) 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布, 记  $U = X - Y, V = X + Y$ , 则随机变量  $U$  和  $V$  必然

(A) 不独立.

(B) 独立.

(C) 相关系数不为 0.

(D) 相关系数为 0.

(14) 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(a, \sigma^2)$ , 其分布函数为  $F(x)$ , 则对任意实数  $x$ , 有

(A)  $F(x) + F(-x) = 1.$

(B)  $F(a+x) + F(a-x) = 1.$

(C)  $F(x+a) + F(x-a) = 1.$

(D)  $F(a-x) + F(x-a) = 1.$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 12 分)

计算  $\iint_D |3x + 4y| dx dy$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

(16)(本题满分 12 分)

设  $f(u)$  有连续的二阶导数且  $z = f(e^x \sin y)$  满足方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$ , 求  $f(u)$ .

(17)(本题满分 12 分)

设  $S$  是上半空间  $z > 0$  中任意光滑闭曲面,  $S$  围成区域  $\Omega$ , 函数  $u = rk(r)$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) 在上半空间有连续的二阶偏导数, 满足

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy = \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV,$$

求  $k(r)$ .





(18)(本题满分 12 分)

设  $f(x)$  是区间  $[-\pi, \pi]$  上的偶函数, 且满足  $f(\frac{\pi}{2} + x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$ . 证明:  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的傅里叶级数展开式中系数  $a_{2n} = 0 (n = 1, 2, \dots)$ .

(19)(本题满分 10 分)

求曲面  $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 1$  上任一点的切平面与曲面  $S: z = x^2 + y^2$  所围立体  $\Omega$  的体积.

(20)(本题满分 8 分)

$A$  是  $n$  阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $n$  维列向量, 且  $\alpha_1 \neq 0, A\alpha_1 = k\alpha_1, A\alpha_2 = l\alpha_1 + k\alpha_2, A\alpha_3 = l\alpha_2 + k\alpha_3, l \neq 0$ , 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

(21)(本题满分 10 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3. \end{cases}$$

有无穷多解, 而  $A$  是 3 阶矩阵,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a+3 \\ a+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-2 \\ -1 \\ a+1 \end{pmatrix}$  分别是  $A$  关于特征值  $1, -1, 0$  的三个特征向量, 求  $A$ .



(22)(本题满分 9 分)

(18)(本题满分 10 分)

18. 设  $\xi = (X, Y)$  服从在  $D$  上的均匀分布, 其中  $D$  为  $x$  轴、 $y$  轴及直线  $x + \frac{y}{2} = 1$  所围成的三角形区域, 求  $E(\xi)$  和  $D(\xi)$ .

(23)(本题满分 9 分)

(19)(本题满分 10 分)

19. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是它的一个样本, 令  $d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$ , 试求  $E(d)$ ,  $D(d)$ .

(20)(本题满分 10 分)

20. 设  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $n$  维列向量,  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 且  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , 求  $\alpha, \beta, \gamma$  的秩.

(21)(本题满分 10 分)

(本题满分 10 分)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + (a+4)y - 2z = 0 \\ x - 2y + az = -3 \end{cases}$$

21. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ a+3 \\ a+2 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求  $\alpha, \beta, \gamma$  的秩.

A 为, 量向面



## 2005 年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学一模拟自测试卷(一) 答案及解析

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1)  $e^{-2}$

[解析]

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + 2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + 2f(x)]^{\frac{1}{2f(x)} \cdot \frac{2f(x)}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{\sin x}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}} = e^{2f'(0)} = e^{-2}.$$

(2)  $-\frac{\pi}{4}$

[解析]

根据题设  $xy'(x) = \sqrt{1-x^2}$  及  $y(1) = 0$ , 由分部积分法, 有

$$\int_0^1 y(x) dx = xy(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xy'(x) dx = - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

[注] 本题若先求出  $y(x)$  的表达式, 再代入计算定积分, 则计算过程将变得十分复杂.

(3) 0

[解析]

曲面  $\Sigma$  的方程为:  $y = 1 + x^2 + z^2$ , 过点  $(0, 2, 1)$  且与  $y$  轴正向一致的法线方向向量为  $\mathbf{n} =$

$\{0, 1, -2\}$ , 其单位法向量为  $\mathbf{n}_0 = \{0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\}$ , 于是所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,2,1)} \cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(0,2,1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(0,2,1)} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

(4)  $\frac{1}{2}$

[解析]

由题设,  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的行列式相等,  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = 1$ .

设  $\lambda_3$  为  $\mathbf{A}$  的另一特征值, 则有  $1 = |\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2\lambda_3$ , 于是  $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ .

由于  $\mathbf{A}$  有三个不同的特征值, 必可对角化, 即存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{于是 } \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{E}) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{故 } |\mathbf{A} + \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1.$$

(5)  $1 - \frac{1}{2^4}$



[解析]

$$\begin{aligned}
 P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4) > 1\} &= 1 - P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4) \leq 1\} \\
 &= 1 - P\{X_1 \leq 1, X_2 \leq 1, X_3 \leq 1, X_4 \leq 1\} \\
 &= 1 - P\{X_1 \leq 1\}P\{X_2 \leq 1\}P\{X_3 \leq 1\}P\{X_4 \leq 1\} \\
 &= 1 - \frac{1}{2^4}.
 \end{aligned}$$

(6) 0

[解析]

$X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$E(X) = \int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x dx = 0,$$

于是  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, |X|) = E(X|X|) = \int_{-1}^1 x|x| \cdot \frac{1}{2} dx = 0$ .

故相关系数为 0.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.)

(7) 应选(D)

[解析]

举反例说明. 比如  $\varphi(x) = e^{-|x|}$ ,  $f(x) = 2e^{-|x|}$ ,  $g(x) = 3e^{-|x|}$ , 则有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 同时有  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-|x|} = 0$  存在.

但若取  $\varphi(x) = e^{-|x|} + x$ ,  $f(x) = 2e^{-|x|} + x$ ,  $g(x) = 3e^{-|x|} + x$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在. 故应选(D).

(8) 应选(C)

[解析]

由已知关系式, 知  $f''(0) = 0$ , 且  $f'''(x) = \cos x - 2\sin[f'(x)] \cdot f''(x)$ ,

从而  $f'''(0) = 1 > 0$ , 即  $f''(x)$  在  $x=0$  的某邻域内单调递增. 在  $x=0$  的左侧,  $f''(x)$  为负; 在  $x=0$  的右侧,  $f''(x)$  为正, 故  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

(9) 应选(C)

[解析]

直线  $L$  的方向向量为  $l = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -28i + 14j - 7k$ , 平面  $\pi$  的法向量为  $n =$

$\{4, -2, 1\}$ , 从而有  $l \parallel n$ , 此直线  $L$  垂直于平面  $\pi$ .

(10) 应选(C)

[解析]

由题设  $f(x), g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x_0) < g(x_0)$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0),$$

故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .



从而(C)成立.对(A)、(B)、(D)可举反例说明不成立.

对(A),取  $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x^2, f(x) < g(x)$ ,但

$$f(-x) = x^2 - 1, g(-x) = x^2, f(-x) < g(-x);$$

对(B),取  $f(x) = -e^{-x}, g(x) = e^{-x}, f(x) < g(x)$ ,但

$$f'(x) = e^{-x}, g'(x) = -e^{-x}, f'(x) > g'(x);$$

对(D),取  $f(x) = 1, g(x) = 2, f(x) < g(x)$ ,但

$$\int_0^x f(t) dt = x, \int_0^x g(t) dt = 2x, \text{若 } x < 0, \text{则 } \int_0^x f(t) dt > \int_0^x g(t) dt.$$

(11) 应选(B)

[解析]

由  $ABCD = E$  知,  $A$  与  $BCD$  互为逆矩阵,从而  $A \cdot BCD = BCD \cdot A = E$ .

故选(B).

(12) 应选(B)

[解析]

由  $1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) + 1 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) + 1 \cdot (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$  知,向量组  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$  线性相关,不能作为  $Ax = 0$  的基础解系,故应选(B).

(13) 应选(D)

[解析]

由于  $\text{cov}(U, V) = E(UV) - EU \cdot EV = E(UV) = E(X - Y)(X + Y) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$ ,

从而有  $\rho = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = 0$ , 故选(D).

(14) 应选(B)

[解析]

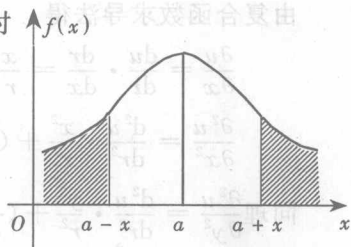
由于  $X \sim N(a, \sigma^2)$ , 故  $X$  的密度函数  $f(x)$  的图形关于  $x = a$  对称,且

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{故 } F(a+x) = \int_{-\infty}^{a+x} f(t) dt,$$

$$F(a-x) = \int_{-\infty}^{a-x} f(t) dt = \int_{a+x}^{+\infty} f(t) dt,$$

$$F(a+x) + F(a-x) = \int_{-\infty}^{a+x} f(t) dt + \int_{a+x}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$



三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) [解析]

作极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 则  $D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_D |3x + 4y| dx dy &= \int_0^{2\pi} |3 \cos \theta + 4 \sin \theta| d\theta \int_0^1 r \cdot r dr \\ &= \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3}{5} \cos \theta + \frac{4}{5} \sin \theta \right| d\theta = \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} |\sin(\theta + \theta_0)| d\theta, \end{aligned}$$





其中  $\sin\theta_0 = \frac{3}{5}$ ,  $\cos\theta_0 = \frac{4}{5}$ , 由周期函数的积分性质, 有

$$\text{原式} = \frac{5}{3} \int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0} |\sin t| dt = \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = \frac{10}{3} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{20}{3}.$$

(16) [解析]

令  $u = e^x \sin y$ , 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) e^x \sin y = u f'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) u^2 + f'(u) u,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \sin y f'(u) + e^x \cos y f''(u) \frac{\partial u}{\partial y} = -u f'(u) + f''(u) e^{2x} \cos^2 y,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) e^{2x}.$$

由已知条件, 得  $f''(u) e^{2x} = e^{2x} f(u)$ , 即  $f''(u) - f(u) = 0$ .

此二阶常系数方程的特征方程是  $\lambda^2 - 1 = 0$ , 特征根  $\lambda = \pm 1$ , 故  $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$ .

(17) [解析]

由高斯公式, 得

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz,$$

由  $\Omega$  的任意性, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (z > 0),$$

由复合函数求导法得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{du}{dr}.$$

$$\text{同理 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \frac{du}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \frac{du}{dr}.$$

$$\text{于是 } \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = e^r.$$

这是可降阶的二阶线性方程, 两边乘  $r^2$  得

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = r^2 e^r,$$

$$\text{积分得 } r^2 \frac{du}{dr} = \int r^2 e^r dr = r^2 e^r + 2e^r(1-r) + C_1,$$

$$\frac{du}{dr} = e^r + 2e^r \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{C_1}{r^2},$$

$$\text{再积分得 } u(r) = e^r - \frac{2}{r} e^r - \frac{C_1}{r} + C_2,$$

$$\text{因此 } k(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r}e^r - \frac{2}{r^2}e^r - \frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{r}.$$

(18)[解析]

由于  $f(x)$  为偶函数, 所以

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx \right].$$

对于右端前一个积分, 令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 后一个积分, 令  $x = \frac{\pi}{2} + t$ , 则

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos(n\pi - 2nt) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cos(n\pi + 2nt) dt \right] \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos(2nt) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cos(2nt) dt \right] \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \right] \cos(2nt) dt. \end{aligned}$$

由题设  $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 0$ , 所以  $a_{2n} = 0, n = 1, 2, \dots$ .

(19)[解析]

(I) 先求切平面方程. 设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是  $\Sigma$  上任意点, 则  $z_0 = x_0^2 + y_0^2 + 1$ ,  $\Sigma$  在点  $M_0$  的法向量  $\mathbf{n} = \{2x_0, 2y_0, -1\}$ , 切平面方程是

$$z = z_0 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \text{ 即 } z = 1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y.$$

(II) 求切平面与  $S$  的交线及切平面与  $S$  所围立体  $\Omega$  在  $xOy$  平面的投影区域.

$$\text{切平面与 } S \text{ 的交线 } \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y. \end{cases}$$

在  $xOy$  平面的投影是

$$x^2 + y^2 = 1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y \text{ 即 } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1.$$

它围成的区域记为  $D$ , 即  $\Omega$  在  $xOy$  平面的投影区域.

(III) 求  $\Omega$  的体积  $V$ .

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y) - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \iint_D \{1 - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\} dx dy \\ &= \frac{u = x - x_0}{v = y - y_0} \pi - \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} (u^2 + v^2) dudv = \pi - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

(20)[解析]

设  $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ , 用  $\mathbf{A} - k\mathbf{E}$  左乘有

$$k_1(\mathbf{A} - k\mathbf{E})\mathbf{a}_1 + k_2(\mathbf{A} - k\mathbf{E})\mathbf{a}_2 + k_3(\mathbf{A} - k\mathbf{E})\mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$

即  $k_2\lambda\mathbf{a}_1 + k_3\lambda\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ , 也即  $k_2\mathbf{a}_1 + k_3\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ .

再用  $\mathbf{A} - k\mathbf{E}$  左乘, 得  $k_3\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ ,

由  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ , 故必有  $k_3 = 0$ , 进而可推得  $k_2 = 0, k_1 = 0$ ,

由定义知,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关.



(21)[解析]

化增广矩阵为阶梯形,有

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & a+4 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & a & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & a & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

由于方程组有无穷多解,得  $a = -1$  或  $a = 0$ .

当  $a = -1$  时,三个特征向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  线性相关,不合题意,舍去;

当  $a = 0$  时,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  线性无关,是  $A$  的特征向量,故  $a = 0$ .

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{从而 } A = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

(22)[解析]

由二维均匀分布的定义,知  $(X, Y)$  的联合分布密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

 $X$  与  $Y$  的边缘分布密度分别为

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} 2-2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}y, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

于是,有

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x) dx = \int_0^1 (2-2x) dx = \frac{1}{3},$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_1(x) dx = \int_0^1 x^2 (2-2x) dx = \frac{1}{6},$$

$$\text{故 } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{18}.$$

$$\text{同理 } EY = \frac{2}{3}, DY = \frac{2}{9}.$$

$$\text{因此 } E(\xi) = (EX, EY) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), D(\xi) = (DX, DY) = \left(\frac{1}{18}, \frac{2}{9}\right).$$

(23)[解析]

$$E(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E |X_i - \mu| = E |X - \mu| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



$$\begin{aligned} & \frac{\frac{x-\mu}{\sigma} = t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ & = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma. \end{aligned}$$

由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立且与  $X$  同分布, 所以

$$\begin{aligned} D(d) &= \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D|X_i - \mu| \\ &= \frac{1}{n} D|X - \mu| = \frac{1}{n} [E|X - \mu|^2 - (E|X - \mu|)^2] \\ &= \frac{1}{n} \left[DX - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma\right)^2\right] = \frac{1}{n} \left(\sigma^2 - \frac{2}{\pi} \sigma^2\right) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} B & SA \\ A & O \end{pmatrix}$$

(3) 设  $A, B, C$  是两两独立且不能同时发生的随机事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = p$ , 则

(6) 已知随机变量  $X$  服从自由度为  $n$  的  $t$  分布, 则随机变量  $X^2$  服从的分布为

合并取一音只, 中取个四的出各题小, 每小 3 分, 总分 32 分, 每小题 4 分, 共 8 小题 (本大题共 2 大题)

(7) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且有  $f'(x) = f(x)$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内

- (8) 下列论断正确的基
- (A)  $2x+1$  (B)  $x+1$  (C)  $x$  (D)  $e^x$

(9) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内具有连续的二阶导数, 且  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) < 0$ , 则

- (A) 点  $x_0$  为  $f(x)$  的极大点 (B) 点  $x_0$  为  $f(x)$  的极小点 (C) 当  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$  时,  $(x_0, f(x_0))$  为拐点 (D) 当  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$  时,  $(x_0, f(x_0))$  为拐点

(10) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛

(11) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛

(12) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  收敛

(13) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛

(14) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$  收敛

(15) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3}$  收敛

(16) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^4}$  收敛

(17) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^5}$  收敛

(18) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^6}$  收敛

(19) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^7}$  收敛

(20) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^8}$  收敛