严格按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写

基础知识理解与运用是考查重点

2005年

全国硕士研究生入学统一考试

理工类

数学

模拟自测试卷及解答

教育部考试中心《中国考试》杂志社 组编

—考研系列

朝華出版社

严格按照《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写

基础知识理解与运用是考查重点

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

理工类

数　　学

模拟自测试卷及解答

教育部考试中心《中国考试》杂志社　组编

朝华出版社

013-44
7569

图书在版编目(CIP)数据

2005年全国硕士研究生入学统一考试理工类数学模拟自测试卷及解答/
教育部考试中心《中国考试》杂志社组编.—北京:朝华出版社,2004.8
ISBN 7-5054-1041-5
Ⅰ.2... Ⅱ.教... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.013-44
中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第075954号

2005年全国硕士研究生入学统一考试理工类数学模拟自测试卷及解答

组　　编　教育部考试中心《中国考试》杂志社
策划编辑　田　辉　谭隆全
责任编辑　王　磊
责任印制　赵　岭
封面设计　东　方

出版发行　朝华出版社
地　　址　北京市车公庄西路35号　　　　邮政编码　100044
电　　话　(010)68433166/62263982/62268370(总编室)
　　　　　(010)68413840/68433213/62261657/62268982(发行部)
传　　真　(010)88415258/62267739(发行部)
印　　刷　北京建工印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　787×1092毫米　1/16　　　　字　　数　380千字
印　　张　15.5
版　　次　2004年8月第1版第1次印刷
装　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-1041-5/G·0476
定　　价　22.00元

使 用 说 明

为了加强对参加2005年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生复习的指导，强化模拟，实战训练，做好考前冲刺，按照**教育部**制订的《2005年全国硕士研究生入学统一考试政治理论考试大纲》和《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，**教育部考试中心《中国考试》杂志社**组织部分多年来参加大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这套《**2005年全国硕士研究生入学统一考试模拟自测试卷及解答**》系列丛书。

本套丛书包括《2005年全国硕士研究生入学统一考试**政治理论**模拟自测试卷及解答》、《2005年全国硕士研究生入学统一考试**理工类数学**模拟自测试卷及解答》、《2005年全国硕士研究生入学统一考试**经济类数学**模拟自测试卷及解答》共计3分册，每分册均精心设计和编写了12套模拟自测试卷及解答。

考生在答题时应注意以下几点：

1. 可在系统复习、全面复习的同时，结合本模拟自测试卷，以巩固复习效果。

2. 答题前应作好充分准备，找类似“考场的环境”答题，答题时应完全进入“考试状态”，使自己置身于“真正在考试”的环境中。必须在规定的时间内答完每份试卷。

3. 切忌边答题边看答案，即使碰上一看就会的题，也必须按要求答完。

4. 答完每份试卷后，应参照答案自己评分。有条件的考生，最好请老师或他人为自己评分。

5. 答题后，应根据得分情况，找出差距，及时查缺补漏，直至验收合格。只有这样，答题时才能思路畅通，有的放矢。

教育部考试中心

《中国考试》杂志社

2004年8月

目　录

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一模拟自测试卷(一)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0, f'(0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}} =$ e^{-2} ________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 满足 $xy'(x)=\sqrt{1-x^2}$,且 $y(1)=0$,则 $\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x =$ $-\pi/2$ ________.

(3) 设 Σ 为 yOz 平面上曲线 $L: 0\leqslant z\leqslant 1, y=1+z^2$ 绕 y 轴旋转一周所得的曲面,则 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着曲面 Σ 上过点 $(0,2,1)$ 与 y 轴正向一致的法线方向向量的方向导数为________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为三阶相似矩阵,$\lambda_1=1, \lambda_2=-2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,且 $\boldsymbol{B}$ 的行列式为 1,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

(5) 对某种电子装置的输出测量了 4 次,得到的观测值 X_1, X_2, X_3, X_4,设它们是相互独立的同服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$ 的随机变量,则概率 $P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)>1\}=$ ________.

(6) 设 X 服从区间 $(-1,1)$ 内的均匀分布,则 X 与 $Y=|X|$ 的相关系数为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.　　[　　]

(8) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\sin^2 f'(x)=\sin x$,且 $f'(0)=0$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　　[　　]

(9) 设直线 L 为 $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$,平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$,则

(A) L 平行于 π.　　(B) L 在 π 上.

(C) L 垂直于 π.　　(D) L 与 π 斜交.　　[　　]

(10) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且 $f(x)<g(x)$,则必有

(A) $f(-x)>g(-x)$.　　(B) $f'(x)<g'(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.　　(D) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.　　[　　]

(11) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为四个 n 阶方阵,且满足 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{E}$,则

(A) $\boldsymbol{ADBC}=\boldsymbol{E}$.　　(B) $\boldsymbol{BCDA}=\boldsymbol{E}$.

(C) $\boldsymbol{CDBA}=\boldsymbol{E}$.　　(D) $\boldsymbol{DACB}=\boldsymbol{E}$.　　[　　]

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n-3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解,则不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.　　[　　]

(13) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,记 $U=X-Y,V=X+Y$,则随机变量 U 和 V 必然

(A) 不独立.　　(B) 独立.

(C) 相关系数不为 0.　　(D) 相关系数为 0.　　[　　]

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,则对任意实数 x,有

(A)$F(x)+F(-x)=1$.　　(B)$F(a+x)+F(a-x)=1$.

(C)$F(x+a)+F(x-a)=1$.　　(D)$F(a-x)+F(x-a)=1$.　　[　　]

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 12 分)

计算 $\iint\limits_D |3x+4y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$.

(16)(本题满分 12 分)

设 $f(u)$ 有连续的二阶导数且 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$,求 $f(u)$.

(17)(本题满分 12 分)

设 S 是上半空间 $z>0$ 中任意光滑闭曲面,S 围成区域 Ω,函数 $u=rk(r)(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 在上半空间有连续的二阶偏导数,满足

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V,$$

求 $k(r)$.

(18)(本题满分12分)

设 $f(x)$ 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数,且满足 $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$.证明:$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数展开式中系数 $a_{2n}=0(n=1,2,\cdots)$.

(19)(本题满分10分)

求曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2+1$ 上任一点的切平面与曲面 $S: z=x^2+y^2$ 所围立体 Ω 的体积.

(20)(本题满分8分)

$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\alpha}_1=k\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=l\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=l\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,$l\neq 0$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分10分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3. \end{cases}$$

有无穷多解,而 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵,$\begin{pmatrix}1\\2a\\-1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}a\\a+3\\a+2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{pmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $1,-1,0$ 的三个特征向量,求 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 9 分)

设 $\xi=(X,Y)$ 服从在 D 上的均匀分布,其中 D 为 x 轴、y 轴及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形区域,求 $E(\xi)$ 和 $D(\xi)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是它的一个样本,令 $d=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$,试求 $E(d)$,$D(d)$.

2005年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一模拟自测试卷(一)答案及解析

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) $\underline{\quad e^{-2} \quad}$

[解析]

$$\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{2f(x)}\cdot\frac{2f(x)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)}{\sin x}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}}=e^{2f'(0)}=e^{-2}.$$

(2) $\underline{\quad -\frac{\pi}{4} \quad}$

[解析]

根据题设 $xy'(x)=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y(1)=0$,由分部积分法,有

$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=xy(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xy'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

[注] 本题若先求出 $y(x)$ 的表达式,再代入计算定积分,则计算过程将变得十分复杂.

(3) $\underline{\quad 0 \quad}$

[解析]

曲面 Σ 的方程为:$y=1+x^2+z^2$,过点 $(0,2,1)$ 且与 y 轴正向一致的法线方向向量为 $\boldsymbol{n}=\{0,1,-2\}$,其单位法向量为 $\boldsymbol{n}_0=\{0,\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\}$,于是所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,2,1)}\cdot 0+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,2,1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(0,2,1)}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=0+4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=0.$$

(4) $\underline{\quad -1 \quad}$

[解析]

由题设,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行列式相等,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=1$.

设 λ_3 为 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值,则有 $1=|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2\lambda_3$,于是 $\lambda_3=-\frac{1}{2}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,必可对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1.$

(5) $\underline{\quad 1-\frac{1}{2^4} \quad}$

[解析]

$$\begin{aligned}P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)>1\}&=1-P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)\leqslant 1\}\\&=1-P\{X_1\leqslant 1,X_2\leqslant 1,X_3\leqslant 1,X_4\leqslant 1\}\\&=1-P\{X_1\leqslant 1\}P\{X_2\leqslant 1\}P\{X_3\leqslant 1\}P\{X_4\leqslant 1\}\\&=1-\frac{1}{2^4}.\end{aligned}$$

(6) $\underline{\quad 0 \quad}$

[解析]

X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-1}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x=0,$$

于是 $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(X,|X|)=E(X|X|)=\int_{-1}^{1}x|x|\frac{1}{2}\mathrm{d}x=0.$

故相关系数为0.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.)

(7) 应选(D)

[解析]

举反例说明.比如 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$, $f(x)=2\mathrm{e}^{-|x|}$, $g(x)=3\mathrm{e}^{-|x|}$,则有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,同时有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}2\mathrm{e}^{-|x|}=0$ 存在.

但若取 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-|x|}+x$, $f(x)=2\mathrm{e}^{-|x|}+x$, $g(x)=3\mathrm{e}^{-|x|}+x$,则有 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.故应选(D).

(8) 应选(C)

[解析]

由已知关系式,知 $f''(0)=0$,且 $f'''(x)=\cos x-2\sin[f'(x)]\cdot f''(x)$,

从而 $f'''(0)=1>0$,即 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内单调递增.在 $x=0$ 的左侧, $f''(x)$ 为负;在 $x=0$ 的右侧, $f''(x)$ 为正,故 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) 应选(C)

[解析]

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-28\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}$,从而有 $\boldsymbol{l}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$,此直线 L 垂直于平面 π.

(10) 应选(C)

[解析]

由题设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $f(x_0)<g(x_0)$,而

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x).$

从而(C)成立.对(A)、(B)、(D)可举反例说明不成立.

对(A),取 $f(x)=x^2-1, g(x)=x^2, f(x)<g(x)$,但

$$f(-x)=x^2-1, g(-x)=x^2, f(-x)<g(-x);$$

对(B),取 $f(x)=-e^{-x}, g(x)=e^{-x}, f(x)<g(x)$,但

$$f'(x)=e^{-x}, g'(x)=-e^{-x}, f'(x)>g'(x);$$

对(D),取 $f(x)=1, g(x)=2, f(x)<g(x)$,但

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x, \int_0^x g(t)\mathrm{d}t=2x, \text{若 } x<0, \text{则} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t>\int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

(11) 应选(B)

[解析]

由 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{E}$ 知,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{BCD}$ 互为逆矩阵,从而 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BCD}=\boldsymbol{BCD}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

故选(B).

(12) 应选(B)

[解析]

由 $1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$ 知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关,不能作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,故应选(B).

(13) 应选(D)

[解析]

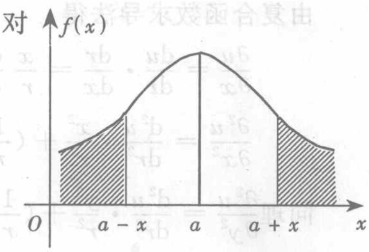
由于 $\mathrm{cov}(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=E(UV)=E(X-Y)(X+Y)=E(X^2)-E(Y^2)=0$,

从而有 $\rho=\dfrac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=0$,故选(D).

(14) 应选(B)

[解析]

由于 $X\sim N(a,\sigma^2)$,故 X 的密度函数 $f(x)$ 的图形关于 $x=a$ 对称,且



$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

故 $$F(a+x)=\int_{-\infty}^{a+x} f(t)\mathrm{d}t,$$

$$F(a-x)=\int_{-\infty}^{a-x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{a+x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t,$$

$$F(a+x)+F(a-x)=\int_{-\infty}^{a+x} f(t)\mathrm{d}t+\int_{a+x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1.$$

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)[解析]

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则 $D: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1$,于是

$$\iint_D |3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}|3\cos\theta+4\sin\theta|\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\left|\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right|\mathrm{d}\theta=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}|\sin(\theta+\theta_0)|\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\sin\theta_0=\frac{3}{5},\cos\theta_0=\frac{4}{5}$,由周期函数的积分性质,有

原式$=\frac{5}{3}\int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0}|\sin t|\,dt=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt=\frac{10}{3}\int_0^{\pi}\sin t dt=\frac{20}{3}.$

(16)[解析]

令 $u=e^x\sin y$,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y=uf'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos yf'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)u^2+f'(u)u,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\sin yf'(u)+e^x\cos yf''(u)\frac{\partial u}{\partial y}=-uf'(u)+f''(u)e^{2x}\cos^2 y,$$

所以$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}.$

由已知条件,得 $f''(u)e^{2x}=e^{2x}f(u)$,即 $f''(u)-f(u)=0$.

此二阶常系数方程的特征方程是 $\lambda^2-1=0$,特征根 $\lambda=\pm1$,故 $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$.

(17)[解析]

由高斯公式,得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz,$$

由 Ω 的任意性,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad(z>0),$$

由复合函数求导法得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}\frac{du}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2 u}{dr^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{du}{dr}.$$

同理$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2 u}{dr^2}\cdot\frac{y^2}{r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\frac{du}{dr},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2 u}{dr^2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)\frac{du}{dr}.$$

于是$\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=e^r.$

这是可降阶的二阶线性方程,两边乘 r^2 得

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=r^2e^r,$$

积分得 $r^2\frac{du}{dr}=\int r^2e^rdr=r^2e^r+2e^r(1-r)+C_1,$

$$\frac{du}{dr}=e^r+2e^r\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\right)+\frac{C_1}{r^2},$$

再积分得 $u(r)=e^r-\frac{2}{r}e^r-\frac{C_1}{r}+C_2,$

因此 $k(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r}e^r - \frac{2}{r^2}e^r - \frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{r}$.

(18)[解析]

由于 $f(x)$ 为偶函数,所以

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x\right].$$

对于右端前一个积分,令 $x = \frac{\pi}{2} - t$,后一个积分,令 $x = \frac{\pi}{2} + t$,则

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - t)\cos(n\pi - 2nt)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} + t)\cos(n\pi + 2nt)\mathrm{d}t\right] \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - t)\cos(2nt)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} + t)\cos(2nt)\mathrm{d}t\right] \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(\frac{\pi}{2} - t) + f(\frac{\pi}{2} + t)\right]\cos(2nt)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由题设 $f(\frac{\pi}{2} - t) + f(\frac{\pi}{2} + t) = 0$,所以 $a_{2n} = 0, n = 1,2,\cdots$.

(19)[解析]

(Ⅰ)先求切平面方程. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Σ 上任意点,则 $z_0 = x_0^2 + y_0^2 + 1$,Σ 在点 M_0 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{2x_0, 2y_0, -1\}$,切平面方程是

$$z = z_0 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \text{ 即 } z = 1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y.$$

(Ⅱ)求切平面与 S 的交线及切平面与 S 所围立体 Ω 在 xOy 平面的投影区域.

切平面与 S 的交线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y. \end{cases}$

在 xOy 平面的投影是

$$x^2 + y^2 = 1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y \text{ 即} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1.$$

它围成的区域记为 D,即 Ω 在 xOy 平面的投影区域.

(Ⅲ)求 Ω 的体积 V.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(1 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0x + 2y_0y) - (x^2 + y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \{1 - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\xlongequal[v = y - y_0]{u = x - x_0} \pi - \iint_{u^2 + v^2 \leqslant 1} (u^2 + v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

(20)[解析]

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$,用 $\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E}$ 左乘有

$$k_1(\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3(\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0},$$

即 $\quad k_2 l\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3 l\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$,也即 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$.

再用 $\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E}$ 左乘,得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0}$,

由 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$,故必有 $k_3 = 0$,进而可推得 $k_2 = 0, k_1 = 0$,

由定义知,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(21)[解析]

化增广矩阵为阶梯形,有

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\2&a+4&-5&6\\-1&-2&a&-3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&a&-7&0\\0&0&a+1&0\end{array}\right).$$

由于方程组有无穷多解,得 $a=-1$ 或 $a=0$.

当 $a=-1$ 时,三个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$ 线性相关,不合题意,舍去;

当 $a=0$ 时,$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ 线性无关,是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,故 $a=0$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$,有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$,

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}$.

(22)[解析]

由二维均匀分布的定义,知 (X,Y) 的联合分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

X 与 Y 的边缘分布密度分别为

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2-2x, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}y, & 0<y<2,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

于是,有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x^2(2-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{1}{18}$.

同理 $EY=\dfrac{2}{3},DY=\dfrac{2}{9}$.

因此 $E(\xi)=(EX,EY)=(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}),D(\xi)=(DX,DY)=(\dfrac{1}{18},\dfrac{2}{9})$.

(23)[解析]

$$E(d)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\mid X_i-\mu\mid=E\mid X-\mu\mid=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x-\mu\mid \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且与 X 同分布，所以

$$D(d) = \frac{1}{n^2}D\Big[\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\Big] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i-\mu|$$

$$= \frac{1}{n}D|X-\mu| = \frac{1}{n}\big[E|X-\mu|^2-(E|X-\mu|)^2\big]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[DX-\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\Big)^2\Big] = \frac{1}{n}\Big(\sigma^2-\frac{2}{\pi}\sigma^2\Big) = \Big(1-\frac{2}{\pi}\Big)\frac{\sigma^2}{n}.$$