钱志坚　陈开明主编

管理数学

［上册］

经济管理刊授联合大学教材

·经济管理出版社·

经济管理刊授联合大学教材

管理数学

（上　册）

钱志坚　陈开明 主编

经济管理出版社

经济管理刊授联合大学教材

管 理 数 学

（上　册）

钱志坚　陈开明　主编

*

经济管理出版社出版

（北京月坛北小街2号）

北京市新华书店总发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16　22印张　514,000字

1984年10月第1版　1984年10月北京第1次印刷

印数：1—50,000册

统一书号：4361·4　　定价：2.20元

出版说明

《管理数学》是经济管理刊授联合大学各有关专科的通用教材，同时也是各地经济管理干部学院厂长培训用教材。

本教材共分四篇，其内容是：

预备篇　初等数学复习

第一篇　微积分基础

第二篇　概率论与数理统计

第三篇　线性代数与线性规划

本教材每篇都由两部分组成：教材正文及辅导材料；辅导材料包括内容提要和习题详解。

《管理数学》目前按上、下两册出版，经教学使用后进行修订，再版时出一全册。

本教材由上海社会科学院钱志坚同志和上海复旦大学陈开明同志担任主编。

参加编写的同志有：

预备篇——龚益鸣（华东纺织工学院）

第一篇——陈尚霖（上海闸北区业余工大）

第二篇——厉无畏、左学金(上海社会科学院)

第三篇——朱纺文、吴立煦(上海财经学院)

经济管理刊授联合大学总校工业企业管理专科教研室沈鸿生、张汉亚两同志进行了最后的编辑与审定工作。

一九八四年二月

目　录

预备篇　初等数学复习

第一篇　微积分基础

预备篇　辅导材料

第一篇　辅导材料

预备篇　初等数学复习

第一章　方程与不等式

§1.1　一元二次方程

1　方程的形式

我们给出一个实例。

例1　某厂为了扩大生产，打算在一块空地上划出一块面积为120平方米的长方形区域安置新机器。如果此区域的长比宽必须多10米，那么该区域的长和宽各是多少米？

解　为解决这一问题，我们设这块区域的宽是x米，那么它的长就是$(x+10)$米。根据题目所给的条件，就可以列出下面的方程：

$$x(x+10)=120。$$

去括号并移项，得

$$x^2+10x-120=0,$$

这就是以x为未知量的一元二次方程。

一元二次方程的一般形式为：

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)。 \tag{1}$$

例如，方程$3x^2+5x-6=0$，$3x^2-81=0$，$4.3-6x^2=2.8$等都是一元二次方程；而$3x+4y=8$，$x^4+3x^3-1=0$等都不是一元二次方程。

2　求解公式

给定一元二次方程（1）后，进一步的问题是确定未知量取怎样的值才使（1）成立，这个值就称为方程（1）的**解**，也称方程（1）的**根**。

定理　对于一元二次方程（1），当$b^2-4ac\geqslant 0$时的解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。 \tag{2}$$

例2　求解一元二次方程

$$x^2-8x-9=0。$$

解　将上述方程改写为

$$x^2-8x=9。$$

为了使等号左边得到一个二项式的完全平方，注意到 $x^2-8x+4^2=(x-4)^2$，可以在等号两边同时加上 4^2，即

$$x^2-8x+4^2=9+4^2,$$

使方程化为

$$(x-4)^2=25。$$

两边开方得

$$x-4=5 \quad 或 \quad x-4=-5,$$

于是，方程的两个根是

$$x_1=5+4=9, \qquad x_2=-5+4=-1。$$

有了求解公式（2），我们一般不象例2那样求解，而是直接代入求解公式（2）得到所需结果。

例3 解方程 $x^2+2=2\sqrt{2}\,x$。

解 移项，得方程为

$$x^2-2\sqrt{2}\,x+2=0。$$

这里 $a=1$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=2$，代入（2）得

$$x=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}\pm0}{2},$$

即方程的两个根相同

$$x_1=x_2=\sqrt{2}。$$

例4 某厂年初将5000元存入银行，到第二年底，本息合计可得5512.5元，这两年平均年利率是多少？

解 设年利率是 x。容易明白到第二年底，本息合计可得 $5000(1+x)+5000\times(1+x)x=5000(1+x)^2$ 元。于是年利率 x 满足的方程为

$$5000(1+x)^2=5512.5。$$

求解这一简单方程时，若不用求解公式（2）反而方便。将方程改写为

$$(1+x)^2=1.1025,$$

两端开方，得

$$1+x=\pm\sqrt{1.1025}=\pm1.05,$$

从而解为

$$x_1=0.05, \qquad x_2=-2.05。$$

由于利率不为负数，所以只能取 x_1 值，即所求年利率为5%。

3 解的讨论

运用求解公式（2）时，要注意到必须有 $b^2-4ac\geqslant0$，否则方程就不存在实数解。为此，我们记 $\Delta=b^2-4ac$ 为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**判别式**。它直接决定了方程的根的性质。

（1）若 $\Delta>0$ 时，则方程有两个不相等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

（2）若$\Delta=0$时，方程有两个相同的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

（3）若$\Delta<0$时，则方程没有实数根。

例5 不解下列各方程，判别它们的根的情况

（1）$4x^2+5x-4=0$；　　（2）$9x^2-6x+1=0$；

（3）$3y^2-4y+10=0$。

解 （1）$\Delta=5^2-4\times4\times(-4)=25+64>0$，

所以原方程有两个不相同的实数根。

（2）$\Delta=(-6)^2-4\times9\times1=36-36=0$，

所以原方程有两个相同的实数根。

（3）$\Delta=(-4)^2-4\times3\times10=16-120<0$，

所以原方程没有实数根。

例6 m是什么数值的时候，方程$4y^2+(m-1)y+9=0$有两个相同的实数根。

解 只有在

$$\Delta=(m-1)^2-4\times4\times9=0$$

的时候，方程才有两个相同的实数根。上式即

$$(m-1)^2=144=12^2$$

两端开方并整理，得

$$m=13\quad\text{或}\quad m=-11。$$

4　化为一元二次方程求解

有一些方程，本身不是一元二次方程，但通过等式变形（如在等式两端同加或同减、同乘或同除一数或一整式），往往可以变为一元二次方程。

但必须注意，经过等式变形，所得新方程的根有可能比原方程多，也有可能比原方程少。前者称为出现增根，后者称为漏根或失根。如果新方程的根与原方程一致，就称这二个方程是**同解方程**。

先看增根与失根的实例。

对于方程

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=1+\frac{2}{x-2}\tag{3}$$

两边同乘x^2-4，整理后得新方程

$$x^2-3x+2=0。\tag{4}$$

利用求解公式，可得方程（4）的两个根为$x_1=1$和$x_2=2$。代入（3）验证，其中$x_1=1$能满足，而$x_2=2$却不能满足，即$x_2=2$为增根，因而方程（3）和（4）不是同解方程。

又如，对于方程

$$x(x-3)=4(x-3), \qquad (5)$$

两边同除以 $x-3$，得

$$x=4。$$

但是，方程（5）除了有 $x=4$ 一个根外，还有一个根 $x=3$，它在方程变形中被丢失了，产生了失根问题。

其实，增根与失根是不难检查的，一般，若在等式两端作相同的四则运算，只有当等式两边同乘或同除的一个整式可能为零时，才可能出现增根或失根，否则都是同解的。

如将方程（3）化为方程（4），是在（3）两端乘以整式x^2-4，而（4）的根 $x=2$ 恰使 $x^2-4=0$，从而成为增根。将方程（5）化为 $x=4$，是在（5）两端除以整式 $x-3$，而失根 $x=3$ 恰使 $x-3=0$。

一般地，将方程变为新方程后，如用了两端同乘一个整式的等式变形，则应检查所得根是否使这一个整式为零，是则为增根，否则便是原方程的根。类似地，如果使用两端同除一整式的运算，应检查使整式等于零的 x 值是否是原方程的根。

另外，如果在方程两端用了同时平方的等式变形，则应考察是否有增根；如果在方程两端用了同时开方的等式变形，则应考察是否有失根。

例 7 解方程 $\dfrac{4x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}=1-\dfrac{1}{x+2}$。

解 在方程两边都乘以 $(x+2)(x-2)$ 得

$$4x-2(x+2)=x^2-4-(x-2)。$$

整理后，得

$$x^2-3x+2=0。$$

解这个方程，得

$$x_1=1, \quad x_2=2。$$

现作检验。把 $x=1$ 代入 $(x+2)(x-2)$，它不等于零，所以 $x=1$ 是原方程的根；把 $x=2$ 代入 $(x+2)(x-2)$，它等于零，所以 $x=2$ 是增根。

于是原方程有唯一的一个实根 $x=1$。

例 8 某工厂贮存 350 吨煤，由于改进炉灶和烧煤技术，每天能节约 2 吨煤，使贮存的煤比原计划多用 20 天，贮存的煤原计划用多少天？每天烧多少吨？

解 设原计划每天烧 x 吨煤，那么实际每天烧 $(x-2)$ 吨煤。根据题意，得方程

$$\frac{350}{x-2}-\frac{350}{x}=20。$$

在方程两边同乘 $x(x-2)$，整理后得

$$x^2-2x-35=0。$$

解这个方程得

$$x_1=-5, \qquad x_2=7。$$

经检验，$x_1=-5$，$x_2=7$ 都是原方程的根，但每天烧煤量不可能为负数，所以只取 $x=7$，即每天烧煤 7 吨；又因$\dfrac{350}{7}=50$，所以原计划用 50 天。

§1.2 二元与三元一次方程组

1 方程组的形式

一次方程又叫做线性方程，把几个一次方程联立在一起就构成了**线性方程组**。

在线性方程组中，如有 n 个不相同的未知量，则该方程组就叫做 n 元线性方程组。在此我们只讨论方程个数和未知量个数相同的二元或三元线性方程组。

含有二个方程的**二元线性方程组**，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1 \\ a_2x+b_2y=d_2。\end{cases}$$

含有三个方程的**三元线性方程组**，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3。\end{cases}$$

所谓方程组的解，就是指方程组中每一个变量分别取的一个合适的值，使得方程组中各个等式成立。

例如，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x+4z=7 \\ 2x+3y+z=9 \\ 5x-9y+7z=8, \end{cases} \tag{1}$$

容易验证，若取

$$\begin{cases} x=5 \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=-2, \end{cases} \tag{2}$$

方程组（1）中三个等式全成立，所以（2）是（1）的一组解。

2 利用消元法求解

求解线性方程组的基本方法是消元法，先观察下面的例子。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x-2y=-1 & (3) \\ 2x+5y=12。 & (4) \end{cases}$$

解 我们试图利用方程（3）和（4）消去未知量 x。为此，我们从第一个方程（3）中求得

$$x=\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}, \tag{5}$$

再代入第二个方程（4），便得到不包含未知量 x 的方程

$$2\left(\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}\right)+5y=12。$$

解这个一元方程，得出未知量 y 的解为

$$y=2。$$

再把 $y=2$ 代入 x 的表达式（5），便得

$$x=\frac{2}{3}\times 2-\frac{1}{3}=1。$$

所以，原方程组的解是

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2。\end{cases}$$

例 1 给出的消元方法称为**代入消元法**。为了消去方程组中的某一未知量，先选定一个方程（例 1 中取（3）），从中将该未知量用其他未知量表出（例 1 中为（5）），然而再代入其它方程，就消去了该未知量。这种做法在三元时也可运用。

例 2 用代入消元法解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=3 & (6) \\ x-2y+z=0 & (7) \\ 3x+y+3z=7。 & (8) \end{cases}$$

解 设我们先消去未知量 x。为此，选定方程（7），从中得出

$$x=2y-z。\qquad (9)$$

将（9）代入其余二个方程（6）和（8），就成为二元一次方程

$$\begin{cases} 7y-7z=3 \\ y=1 \end{cases}$$

它的解为

$$y=1,\qquad z=\frac{4}{7}。$$

再代入（9）又可求得

$$x=\frac{10}{7},$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=\frac{10}{7} \\ y=1 \\ z=\frac{4}{7}。\end{cases}$$

例 1 和例 2 做法的实质，是在方程组中先选定一个方程，然后分别用这一方程与方程组中其它方程一一消去某个预定的未知量。抓住了这一点，在消元的方式上还可以灵活些，试看下例。

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 9x+2y=15 & (10) \\ 3x+4y=10。 & (11) \end{cases}$$

解 若先消去 y。由于（10）、（11）中有关 y 的项分别为 $2y$ 和 $4y$，所以，只要在（10）的两端同乘以 2，再与（11）两端分别相减，便可消去 y。这一做法记为（10）×2－（11），得

$$15x=20。$$

这就得到$x=\frac{4}{3}$；再代入（11），得

$$3\times\frac{4}{3}+4y=10,$$

从而解出$y=\frac{3}{2}$。于是方程组的解是

$$\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{3}{2}。\end{cases}$$

象这样，把方程组中某些方程各自乘上适当的倍数，再作加减运算以达到消元目的的做法，称为**加减消元法**。

例 4 用加减消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x+4z=7 & (12) \\ 2x+3y+z=9 & (13) \\ 5x-9y+7z=8 & (14) \end{cases}$$

解 由于（12）中不包含y，所以，只要从（13）、（14）中消去y，再得到一个不含y的方程就可以了。利用（13）×3＋(14)，得

$$11x+10z=35。\qquad (15)$$

现在考察由（12）、（15）联立的不含y的二元线性方程组。利用(12)×5－(15)×2，再消去z，得

$$-7x=-35。$$

从而$x=5$。代入（12）得

$$15+4z=7,$$

即又求得$z=-2$。再把$x=5$和$z=-2$代入（13），得

$$10+3y-2=9,$$

即$y=\frac{1}{3}$。于是，方程组的解是

$$\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{1}{3} \\ z=-2。\end{cases}$$

3　求解公式

下面给出用行列式记号表示的线性方程组的求解公式。首先介绍行列式记号。

将四个数a_1，a_2，b_1，b_2排成两行（横排叫行）两列（纵排叫列）的式子

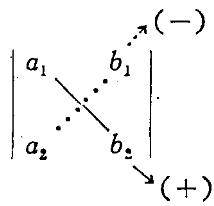
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}。$$

我们规定这个式子表示一个数$a_1b_2-a_2b_1$，称它为一个**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

四个数 a_1，a_2，b_1，b_2 称为行列式的元素。

二阶行列式的值可借用下图记忆：



即行列式的值是主对角线（图中用实线表示）两元素乘积与带有符号“−”的次对角线（图中用虚线表示）两元素乘积之代数和。

例 5 求下列二阶行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$，　(2) $\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$，

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -14 \end{vmatrix}$，　(4) $\begin{vmatrix} m & 2n \\ m+n & -n \end{vmatrix}$。

解

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5-(-2)\times10=35,$

(2) $\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 20\times0-\frac{1}{2}\times15=\frac{15}{2},$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} = 3\times(-14)-(-6)\times7=0,$

(4) $\begin{vmatrix} m & 2n \\ m+n & -n \end{vmatrix} = m\cdot(-n)-(m+n)\cdot2n=-3mn-2n^2$。

类似地，可用下式定义九个数 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2，c_3 组成的**三阶行列式**：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

例 6 求下列三阶行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，　(2) $\begin{vmatrix} m & n & m-n \\ 3 & -n & m+n \\ m+3 & 0 & 2m \end{vmatrix}$。

解

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\times1\times(-2)+(-2)\times0\times1-2\times(-2)\times3$

$-2\times1\times1-(-2)\times(-2)\times2-3\times0\times3=-4$。

(2) $\begin{vmatrix} m & n & m-n \\ 3 & -n & m+n \\ m+3 & 0 & 2m \end{vmatrix} = m(-n)(2m)+3\times0\times(m-n)$

$+(m+3)n(m+n)-(m+3)(-n)(m-n)-3n\cdot2m-m\times0$

$\times(m+n)=0$。

下面给出线性方程组的求解公式。

定理 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1 & (16) \\ a_2x+b_2y=d_2, & (17) \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

则当$D\neq0$时，必存在唯一解

$$x=\frac{D_x}{D},\qquad y=\frac{D_y}{D}。\tag{18}$$

证明 设二元线性方程组存在解，则

$(16)\times b_2-(17)\times b_1$:　　$(a_1b_2-a_2b_1)x=d_1b_2-d_2b_1$,

$(16)\times a_2-(17)\times a_1$:　　$(a_2b_1-a_1b_2)y=d_1a_2-d_2a_1$,

所以

$$x=\frac{d_1b_2-d_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{d_2a_1-d_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}\tag{19}$$

将(19)直接代入(16)、(17)进行验证可知，(19)确为方程组的解，从而为唯一解。利用行列式定义，由(19)得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{D_x}{D},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{D_y}{D},$$

从而定理得证。

例 7 解方程组

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 2x+5y-12=0 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3\times5-2\times(-2)=19\neq0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 12 & 5\end{vmatrix}=(-1)\times5-12\times(-2)=19,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 12\end{vmatrix}=3\times12-2\times(-1)=38,$$

利用（18）方程组有唯一解

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{19}{19}=1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{38}{19}=2。$$

例 8 解关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases}mx+y=m+1\\ x+my=2m。\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=(m+1)(m-1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\ 2m & m\end{vmatrix}=m(m+1)-2m=m(m-1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m & m+1\\ 1 & 2m\end{vmatrix}=2m^2-(m+1)=(2m+1)(m-1),$$

所以，当 $m\neq\pm1$ 时，由于 $D\neq0$，按（18）方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=\dfrac{m}{m+1}\\ y=\dfrac{2m+1}{m+1}。\end{cases}$$

当 $m=-1$ 时，$D=0$。方程组变为

$$\begin{cases}-x+y=0\\ x-y=-2,\end{cases}$$

这两个方程矛盾，所以方程组无解。

当 $m=1$ 时，$D=0$。这时方程组变成只有一个方程

$$x+y=2。$$

因而

$$x=t,\qquad y=2-t\qquad（t\text{ 可取任何实数值}）$$

都是方程组的解，即方程组有无穷多个解。

对于三元线性方程组也有类似的结果

定理 对于三元线性方程组