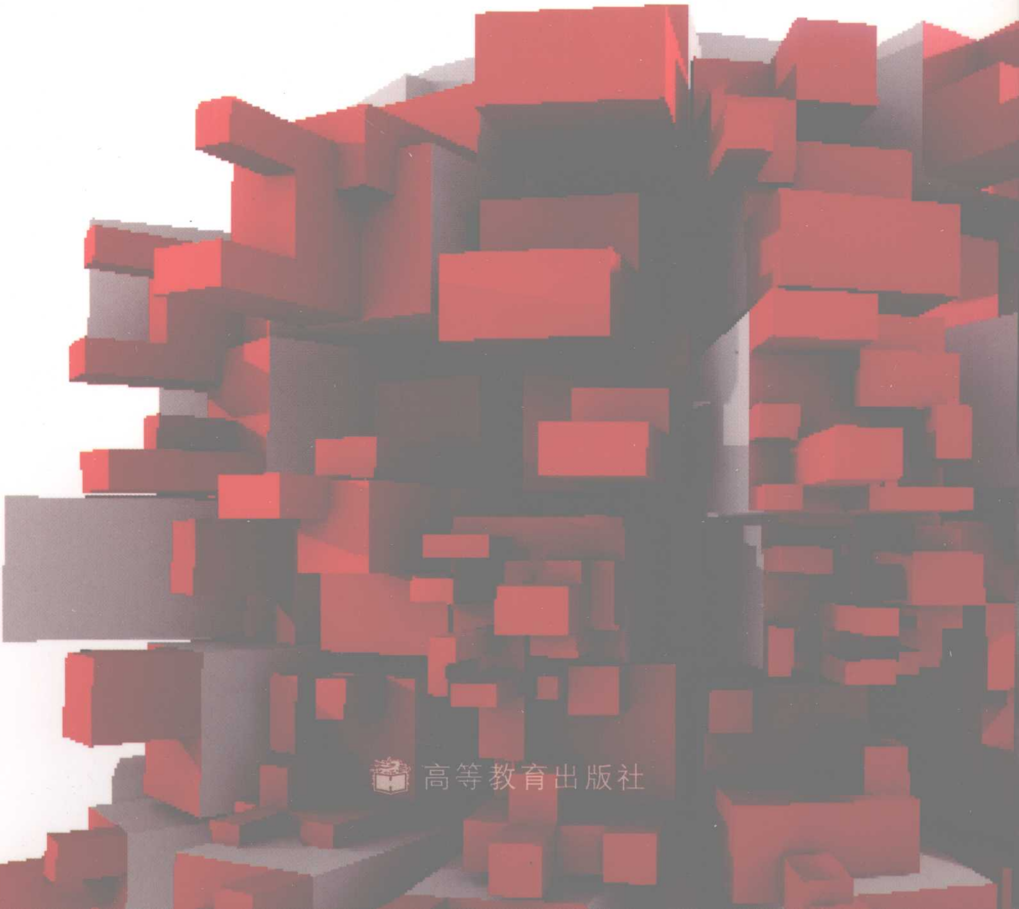
高等学校教材

组合数学

— 南基洙 —



高等教育出版社

高等学校教材

组合数学

南基洙

高等教育出版社

内容提要

本书介绍组合数学的基本内容。全书共10章，如组合计数方面的递归关系、母函数、容斥原理、Pólya定理等基本计数方法，存在性方面的抽屉原理、有限几何以及组合设计方面的正交拉丁方等。此外，书中还包含了许多有趣的例子和作者的一些研究成果。

本书可作为高等学校数学类专业和相关专业本科高年级学生和研究生的教材，也可作为中学教师和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/南基洙.—北京：高等教育出版社，2008.4
ISBN 978-7-04-023599-9

Ⅰ.组… Ⅱ.南… Ⅲ.组合数学—高等学校—教材 Ⅳ.O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第023866号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张申申
责任绘图 尹文军 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 金 辉
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168 1/32	**版　　次**	2008年4月第1版
印　　张	6.625	**印　　次**	2008年4月第1次印刷
字　　数	160 000	**定　　价**	10.40元

物料号 23599-00

前　言

组合数学是一个既年轻又古老的数学分支。它研究离散对象在各种约束条件下的安排和配置问题。它与许多重要的数学分支，如数论、代数学和概率论等密切相关。它总是和实际问题相联系，所以组合数学比其他数学分支更容易引起人们的兴趣和注意。近年来，随着计算机数字技术的飞速发展，提出了一系列需要解决的问题，其中的许多问题都涉及组合数学理论。组合数学已经成为数字信息技术研究、发展中不可缺少的数学工具。组合数学的发展，对于促进数字信息技术能够更好、更快地发展具有重要的现实和理论意义。

本书是在作者近几年讲授组合数学讲稿的基础上形成的。作者在东北师范大学、大连理工大学为本科高年级学生、教师进修班和硕士研究生多次讲授这门课程。作者的初衷是想以组合数学为切入点，通过解决具体问题，向学生介绍组合数学的基本思想、方法和技巧，以使学生尽早、尽快地了解和掌握数学与应用数学所要研究的问题以及研究中所使用的方法和技巧，以激发学生的学习兴趣。

本书包含了学习组合数学的基本内容：如组合计数方面的递归关系、母函数、容斥原理、Pólya 定理等基本计数方法，存在性方面的抽屉原理、有限几何以及组合设计方面的正交拉丁方等。书中还包含了很多有趣的例子和作者本人的一些研究成果。另外，书中还添加了一些与组合数学密切相关的知识，如对称多项式和代数学基础等。这主要是基于作者在讲授本课程时有很多学生是非数学专业的。他们只接触过一点高等数学和线性代数知识，而没有系统学习过高等代数和近世代数（抽象代数）。另外，鉴于目

前国内多数高校都开设了图论选修课程，本书对于组合数学中非常重要的研究领域——图论，只是作了蜻蜓点水式的介绍。

本书取材遵循少而精的原则，力求叙述简明、说理详尽。全书共分10章，每章配备了少量的习题，以供读者巩固学过的理论和熟练掌握方法之用，其中有些习题是组合数学的基本理论内容，因为受制于有限的学时，将其列为习题。根据作者的经验，使用本书需40~50学时可完成教学任务。

在此，作者对在编写本书过程提出宝贵修改意见的审稿专家和编辑表示衷心感谢。由于作者水平有限，书中难免存在不少缺点和错误，希望读者斧正。

南基洙
大连理工大学创新园
2007年10月

目 录

第一章 引言

组合数学是一门历史悠久的数学分支,它发源于数学的消遣和游戏.不管是为了消遣,还是为了数学的美学兴趣,人们过去研究过的许多组合数学问题,对于今天的纯粹数学或应用数学来说都是非常重要的.特别是随着数字计算机技术的飞速发展,组合数学更成为现代数学中非常重要的一个研究分支,而且它的影响正在迅速扩大.

近年来计算机技术对于我们生活的影响越来越大.由于计算机计算速度的提升,它已经能够解决许多以前我们不敢想象的大规模的计算问题.但是计算机裸机并不能自己进行运算,它需要以相应的程序为基础,而这些程序的基础又往往是由一些组合算法构成的,因此组合数学在其中起着非常重要的作用.今天的组合数学已不仅仅应用于传统的数学应用领域,如物理学,也已应用在社会科学和生物学等一些新的领域.那么什么是组合数学?它又具体研究哪些问题呢?

组合数学所研究的就是将一组事物安排成各种各样模式的问题.它研究的既然是按照一定的规则来安排一些元素,那么,我们首先要考虑的问题就是符合规则的元素安排是否存在?其次,如果符合规则的元素安排存在,则按此规则安排的方法数是多少?再有,怎样才能把这样的安排求出来?最后,如果有按此规则的最优标准,则需要求出此最优的安排等.上述几个问题我们依次称为存在性问题、计数问题、构造问题和最优化问题.

1. 洛书的构造

相传在四千多年前的中国,大禹为了治理好滔天的洪水,领导人民日夜奔忙,三过家门而不入.在大禹治好那汹涌澎湃的洪水之后,就有一龙马自河中跃出,献给大禹一幅河图,另外在洛河里也有一神龟,背驮了洛书献给大禹.据传这两部书中都包含了治国安邦、平治天下的大道理.以至于在《论语》中,圣人孔子因为当时的世风日下,人心不古,而感叹"河不出图".

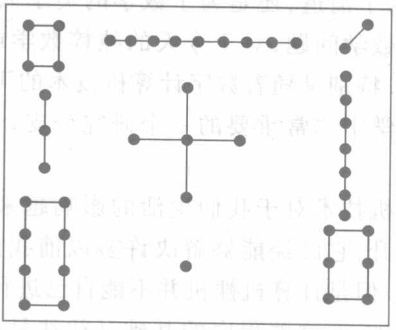


图 1.1

如果洛书(图 1.1)上的每个圆点代表 1,则我们把洛书的图形用阿拉伯数字写出来就是图 1.2 中的 3×3 正方形阵列.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1.2

我们容易验证其中每行、每列、对角线及斜对角线上三个数字的和都是 15.现在我们就来说明上面的图是如何得到的.

首先,作出 $(2\times3-1)\times(2\times3-1)$ 的“方形”,然后按“对角线”的形式依次添入 1 至 9,如图 1.3 所示.

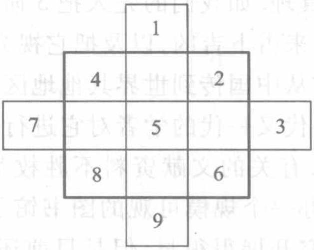


图 1.3

其次,将凸出在“中心” 3×3 的“方形”以外的数字向其对称的方向移动 3 个格,如图 1.4 和图 1.5 所示.

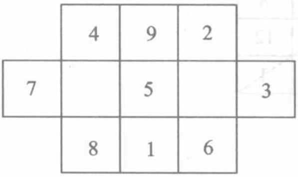


图 1.4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1.5

上面构造洛书的方法记载在我国宋朝大数学家杨辉撰写的《续古摘奇算经》上. 杨辉称这种图为“纵横图”,他是世界上第一个在这方面进行了深入研究的数学家. 后来国外的许多数学家也先后研究了杨辉研究过的这种洛书,并且将其进行了推广,即把 $1,2,\cdots,n^2$ 这 n^2 个自然数放进由 n^2 个小正方形组成的正方形方阵里,而且要求纵、横、对角线及斜对角线上数字的和都相等,满足这些条件的方阵被称之为“ n 阶纵横图”,在国外称其为“ n 阶魔方阵”或“ n 阶幻方”.

在中国古代，由于3阶幻方中配置的9个数是如此的均衡和完美，它产生了极大的美学冲击，以至使我们的先人认为其中包含了某种至高无上的真理. 如我们的先人把3阶幻方和“九宫说”等同起来、用3阶幻方来占卜吉凶，以及把它视为举行国事大典的建筑格局等等. 自幻方从中国传到世界其他地区之后，引起了人们的广泛兴趣和重视，一代又一代的学者对它进行了不懈的研究，取得了非常丰富的成果，有关的文献资料不胜枚举——“单单是关于幻方的著作就足够办一个规模可观的图书馆了”(J. R. Newman). 虽然关于幻方的研究开展得很早，但是目前还没有一般的普遍适用的方法. 有些想知道的结论也不是十分清楚，如 n 阶幻方的个数等. 在此我们仅就幻方的构造问题作一简单的介绍.

容易验证图 1.6 构成 4 阶幻方.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 1.6

在图 1.6 中将对角线及斜对角线上的数字对称换位后，我们可以得到按顺序添成的图 1.7：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

图 1.7

现在我们利用杨辉使用过的方法构造 5 阶纵横图(见图

1.8～图 1.11)：

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

图 1.8

			6		2			
		11		7		3		
	16		12	25	8		4	
21		17		13		9		5
	22		18	1	14		10	
		23		19		15		
			24		20			

图 1.9

		11	24	7	20	3		
	16		12	25	8		4	
21		17		13		9		5
	22		18	1	14		10	
		23	6	19	2	15		

图 1.10

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图 1.11

我们可以利用构造 3 阶、5 阶幻方的方法来构造奇数阶幻方，从而 $n(=2k+1)$ 阶幻方存在.

对于偶数阶幻方的构造方法，我们将分两种情形进行介绍. 首先，考虑阶数 $n=4k$ 时的构造方法——对角线方法. 此时我们完全可以仿照前面 4 阶幻方的构造技巧，构造 $n=4k$ 阶幻方. 在此仅以 8 阶幻方为例说明对角线构造方法.

下面的图 1.12 可以说明 8 阶幻方是如何得到的.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图 1.12

在图 1.12 中将主对角线及斜对角线上的元素对称换位，短线上的元素逆时针方向移动 8 个格，则可以得到按数字顺序添画的图 1.13：

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

图 1.13

下面我们介绍阶数 $n=4k+2$ 时幻方的构造方法. 在研究幻方的历史中，一个很有意思的现象是，人们很早就掌握了奇数阶和阶数 $n=4k$ 的幻方的构造方法，而阶数 $n=4k+2$ 的幻方的构造方法直到 1918 年才由数学家 R. Strachey 给出.

在此我们仅以 6，10 阶为例说明构造的方法. 容易验证下面的图 1.14 是一个 6 阶幻方.

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

图 1.14

下面我们说明上面的6阶幻方是如何得到的.

首先,将 6×6 的方格图形分成4个区域: A,B,C,D ,其中的每个区域由 3×3 的方格组成,如图1.15.

	A			C	
	D			B	

图1.15

其次,令 $a=\frac{n}{2}=\frac{6}{2}=3$,然后分别用数字 $1,\cdots,3^2=9$; $3^2+1=10,\cdots,2\times3^2=18$; $2\times3^2+1=19,\cdots,3\times3^2=27$; $3\times3^2+1=28,\cdots,4\times3^2=36$ 构造3阶幻方添入 A,B,C,D 4个区域,见图1.16.

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

图1.16

最后,第一步,在 A 区的中间一行选定第2个元素,在 A 区其

他行选定第一个元素;第二步,在 D 区选定与 A 区相应位置的元素;第三步,调换 A 区和 D 区中选定的对应元素,见图 1.17.

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

图 1.17

让我们再看一下 10 阶幻方的构造过程.

首先,分区,每个区域是由 5×5 的方格组成,见图 1.18.

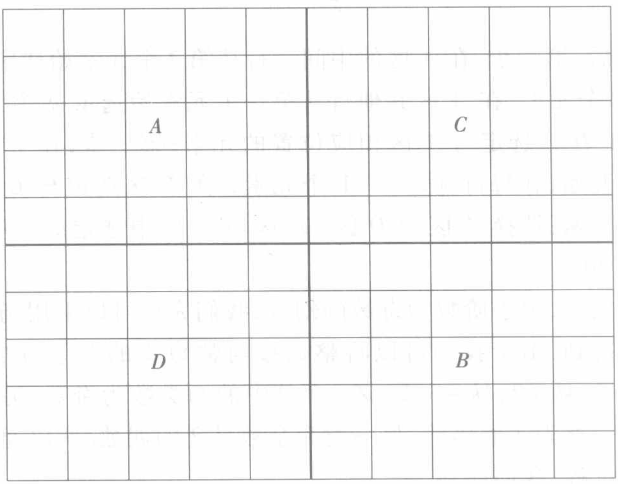


图 1.18