

微积分

主 编 夏建业 副主编 赵梅春 陈锡祯

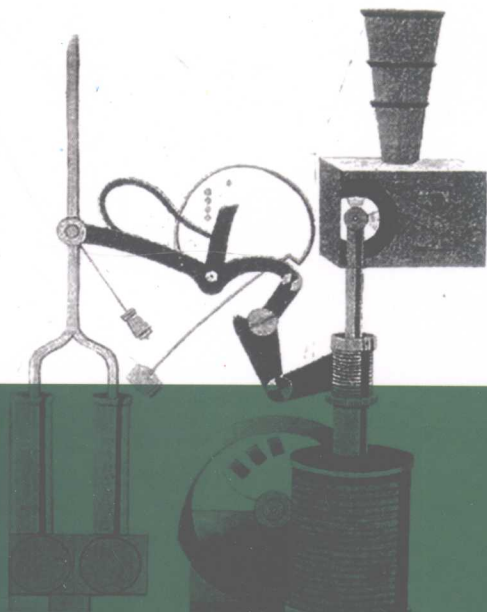


广东金融学院成人高等教育系列教材

weijifen



暨南大学
JINAN UNIVERSITY PRESS
出版社





广东金融学院成人高等教育系列教材

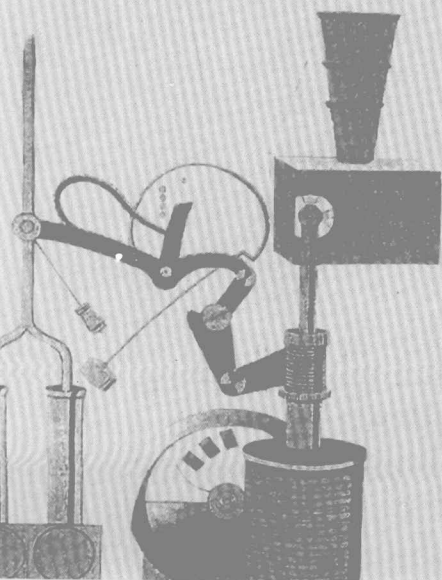
weijifen

微 积 分

■ 主 编 夏建业 副主编 赵梅春 陈锡祯



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州



图书在版编目 (CIP) 数据

微积分/夏建业主编; 赵梅春, 陈锡祯副主编. —广州: 暨南大学出版社, 2008. 8

(广东金融学院成人高等教育系列教材)

ISBN 978 - 7 - 81135 - 032 - 6

I. 微… II. ①夏… ②赵… ③陈… III. 微积分—成人教育: 高等教育—教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 084241 号

出版发行: 暨南大学出版社

地 址: 中国广州暨南大学
电 话: 总编室 (8620) 85221601
营销部 (8620) 85225284 85228291 85220693 (邮购)
传 真: (8620) 85221583 (办公室) 85223774 (营销部)
邮 编: 510630
网 址: <http://www.jnupress.com> <http://press.jnu.edu.cn>

排 版: 广州市天河星辰文化发展部照排中心
印 刷: 暨南大学印刷厂

开 本: 787mm × 960mm 1/16
印 张: 18.875
字 数: 346 千
版 次: 2008 年 8 月第 1 版
印 次: 2008 年 8 月第 1 次
印 数: 1—3000 册

定 价: 36.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题, 请与出版社总编室联系调换)

广东金融学院成人高等教育系列教材编委会名单

顾 问：王 华

主 任：廖振亮

副主任：吴 养 陈冉曦 周建民

委 员：（按姓氏笔画排列）

刘连生 刘社期 刘志玲 刘志梅 杨海青

杨 林 肖茂盛 吴国平 余信红 张友凯

陈国君 陈尹立 范忠宝 罗明忠 岳 龙

夏建业 徐润萍 黄河清 赖志成

总 序

经济的全球化发展,使得国际竞争的实质在很大程度上是各国科学技术力量的竞争、人才的竞争。发展教育事业,不断完善人们的知识结构、提高人们的知识水平已成为时代的要求。随着我国经济的迅速发展、产业结构的不断调整、传统产业部门的改造、新兴产业部门的建立,数以千万计的各种岗位劳动者需要通过边工作边学习的方式来调整自己的知识结构和提高自己的知识水平,以适应这种现代经济与社会发展的要求。我国成人高等教育的发展面临着可贵的机遇,也肩负着重大的历史使命。

为了适应成人高等教育事业蓬勃发展的需要,打造我院成人高等教育品牌,实现“规模扩大、结构合理、效益显著”的奋斗目标,在学校领导和有关部门的大力支持下,经过周密筹划和积极准备,我院继续教育学院正式启动“成人高等教育系列教材”编写工作,计划用三年时间,聘请学校各专业长期从事成人教育的专家、学者,在总结我院成人教育教学经验的基础上,编写公共基础课和专业基础课教材及学习辅导书总计十五本左右,力求使这批教材从内容到形式真正符合成人学习的特点和要求。

第一批推出的“广东金融学院成人高等教育系列教材”包括以下七本:《计算机应用基础》、《计算机应用基础习题解答与上机实验》、《微积分》、《微积分辅导》、《中国特色社会主义理论体系论纲》、《经济应用文写作》、《经济应用文写作范例与练习》。

本系列教材吸收了同类教材的优点,具有简明扼要、条理清晰、深入浅出、通俗易懂的特点。在内容的选择上,本教材注意面向大多数学生,既确保落实教学大纲的基本要求,又具有适当的弹性,能够适应学生进一步提高的要求,也给授课教师留有较大的选择和发挥空间。

本系列教材的使用对象主要为成人高等教育的专科学生,同时,本系列教材也可作为其他层次成人教育学生的参考书。

广东金融学院成人高等教育系列教材编委会

2008年5月

前 言

“经济数学基础”是高等专科经济类各专业的重要基础课，该课由三大部分组成，分别是微积分、线性代数和概率论与数理统计。本教材是根据高等专科经济类专业的教学大纲编写而成，可供高等专科经济类各专业作教材之用，也可供干部培训或自学之用。

《微积分》是经济数学基础的基础，不论是经济类专业，还是理科专业，都必须学习微积分。微积分在宏观与微观经济分析、金融经济管理中是一个有力的工具，例如边际分析、弹性分析、最优决策、经济预测和宏观经济控制等。

考虑到高等专科教育的特点，本教材对于理论方面，根据必需、够用为度的原则，舍去一些不必要的理论及某些定理的证明。在阐述概念上力求深入浅出，在计算方法上力求举一反三，在应用上加强经济上的应用，淡化几何上的应用。同时，在内容取舍上还注意到与后继课程的联系。

本教材共分六章，主要内容是一元微分法、一元积分法和二元微积分简介。每章后面配有适当的习题，并在书后附有习题答案。

参加本教材编写的主要有夏建业、陈锡祯、赵梅春。其中，第一章和第二章由陈锡祯编写；第四章和第五章由赵梅春编写；第三章、第六章和附录由夏建业编写。第一章的习题由陈锡祯配备，第二章的习题由刘娟配备，第三章的习题由岳卫芬配备，第四章的习题由魏雪君配备，第五章的习题由胡蓉配备，第六章的习题由王响、何胜美配备。

本教材由夏建业负责统稿和定稿工作。

由于编者水平有限，时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以便日后进一步修改和完善。

本教材的编写得到广东金融学院应用数学系全体教师的大力支持，在此表示衷心的感谢！

编 者

2008 年 4 月

目 录

总 序	1
前 言	1
第一章 函数与极限	1
第一节 函数的概念	1
第二节 函数的简单性质	9
第三节 初等函数	12
第四节 几个常用的经济函数	16
第五节 极 限	20
第六节 无穷大量与无穷小量	26
第七节 极限的运算法则	30
第八节 两个极限存在的准则和两个重要极限	33
第九节 函数的连续性	37
习题一	45
综合习题一	49
第二章 导数与微分	53
第一节 导数的概念	53
第二节 导数的基本公式与运算法则	62
第三节 反函数与复合函数的导数	69
第四节 隐函数的求导法	74
第五节 高阶导数	79
第六节 微 分	81
习题二	87
综合习题二	91
第三章 导数的应用	94
第一节 微分中值定理	94
第二节 洛必达法则	100
第三节 函数的增减性	105
第四节 函数的极值	108

第五节 曲线的凹向与拐点·····	114
第六节 函数的最值及其应用·····	116
第七节 边际分析与弹性分析·····	118
习题三·····	126
综合习题三·····	128
第四章 不定积分 ·····	131
第一节 原函数与不定积分·····	132
第二节 换元积分法·····	138
第三节 分部积分法·····	146
第四节 几种特殊的可积分类型·····	153
习题四·····	160
综合习题四·····	165
第五章 定积分 ·····	169
第一节 定积分的概念与性质·····	169
第二节 微积分基本公式·····	181
第三节 定积分的换元积分法·····	187
第四节 定积分的分部积分法·····	190
第五节 定积分的应用·····	193
第六节 广义积分与 Γ 函数·····	203
习题五·····	211
综合习题五·····	214
第六章 二元微积分简介 ·····	219
第一节 空间解析几何简介·····	219
第二节 多元函数的概念·····	225
第三节 二元函数的极限与连续·····	227
第四节 偏导数·····	228
第五节 二元函数的全微分·····	235
第六节 二元函数的极值·····	237
第七节 二重积分·····	243
习题六·····	264
综合习题六·····	268
附录一 初等数学公式 ·····	272
附录二 基本初等函数图像及基本性质 ·····	275
附录三 习题答案 ·····	277

第一章 函数与极限

○ 本章学习要点

- (1) 掌握函数的定义, 会求函数的定义域及函数值, 特别是分段函数的定义域.
- (2) 掌握反函数、复合函数、初等函数的概念.
- (3) 掌握函数极限的定义; 理解左、右极限的定义; 会求分段函数在分界点的左、右极限. 熟练掌握极限的四则运算法则, 以及两个重要极限的公式.
- (4) 了解函数连续性的概念、初等函数的连续性; 会求函数的间断点.
- (5) 知道几个常用的经济函数, 实际中会建立一些简单经济问题的函数关系.
- (6) 了解无穷小量与无穷大量的定义, 以及它们的关系; 掌握无穷小量的性质.
- (7) 了解闭区间连续函数的一些简单性质.

函数是微积分中最重要的基本概念之一, 也是微积分研究的主要对象. 本章主要介绍变量与变量之间相互关系的函数及其函数的极限. 有关函数的概念、表示法、性质及一些基本函数等方面的知识, 在中学已有介绍. 本章只做总结性概括与复习, 并做适当补充与提高, 以便今后应用. 函数的极限是研究变量的变化对另一个变量所产生的影响, 微分与积分都是以极限作为它的理论基础, 它是贯穿整个微积分学的重要工具.

第一节 函数的概念

为了研究的方便, 我们先来介绍在微积分的研究过程中, 经常会遇到的几个基本术语和概念.

一、常量与变量

在研究或观察自然、社会和经济现象的过程中, 经常会涉及各种各样的

量. 尽管它们杂乱纷繁, 但是归结起来却只有以下两类:

(1) 在研究或观察过程中, 始终保持不变的量, 如甲、乙两地的距离、地基坚实的楼房高度、匀速直线运动的速度、某个商店的某种商品在某一天的单价等, 这种量称之为常量. 在数学上, 人们常用英文字母 a, b, c 等来表示常量.

(2) 在研究或观察过程中, 不时发生变化(即可取不同值)的量, 如行驶汽车上的存油量、一年中某商品的销售量、正在行驶的汽车与目的地的距离等, 这种量称之为变量. 在数学上, 人们常用英文字母 x, y, z 等来表示变量.

值得注意的是: ① 一个量究竟是常量还是变量, 完全由研究或观察过程的具体条件来决定. 同一个量, 在这个过程中是常量, 而在另一过程中却可能是变量. 比如速度, 在匀速运动中, 它是常量; 在匀加速运动中, 它却是变量. ② 常量与变量是相对的, 它们在一定条件下是可以相互转化的. 比如物理学中的重力加速度, 在小范围内它是常量, 而在大范围内它却是变量. 又如, 一根铝制的筷子的长度, 在某一小时或更短的时间范围内, 它是个常量; 可是在一天或者一月、一年的时间范围内, 它却是个变量, 因为它的长度会随气温等因素而变化.

二、区间与邻域

1. 区间

研究变量首先要确定变量的取值范围, 在本书中如无特殊说明, 变量的取值都是实数. 实数与数轴上的点一一对应(这里不再重述这一对应关系), 因此直接把实数与数轴上的对应点统称为“点 a ”. 变量在其变化过程中所有可能的一切取值, 构成了实数集 R 的一个子集 D . 而最常见的变量的取值范围是区间及其并集.

有限区间:

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数的集合称为开区间, 记作 (a, b) .

(2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数的集合称为闭区间, 记作 $[a, b]$.

(3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切实数的集合称为半开半闭区间, 记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$.

以上四种区间统称为以 a, b 为端点的有限区间.

无限区间:

数集 $\{x \mid x > a\}$, $\{x \mid x \geq a\}$, $\{x \mid x < b\}$ 以及 $\{x \mid x \leq b\}$ 都叫做无限区间, 分别记作 $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$. 这些区间对应于数轴上是一条射线.

实数集 R 本身也可以用区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示.

例1 用区间表示下列不等式

$$(1) |x - 2| \leq 1; (2) |2x + 1| > 2$$

解 (1) $|x - 2| \leq 1$ 的解集为

$$\begin{aligned}\{x \mid |x - 2| \leq 1\} &= \{x \mid -1 \leq x - 2 \leq 1\} \\ &= \{x \mid 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]\end{aligned}$$

(2) $|2x + 1| > 2$ 的解集为

$$\begin{aligned}\{x \mid |2x + 1| > 2\} &= \{x \mid 2x + 1 < -2 \text{ 或 } 2x + 1 > 2\} \\ &= \{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\} \\ &= \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\end{aligned}$$

2. 邻域

邻域也是一种区间. 由于它是微积分的一个常用概念, 一般区间无法取代它的作用, 因此有必要对它进行专门的介绍. 所谓“点 x_0 的邻域”, 实质上就是一个以点 x_0 为中心的开区间, 并以 $U(x_0, \delta)$ 记之. 数学上常用的邻域有以下两种:

(1) 有心邻域: 以 x_0 为中心, 长度等于 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 叫做点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$. 即

$$\begin{aligned}U(x_0, \delta) &= \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} \\ &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\end{aligned}$$

(2) 无心邻域: 在微积分中还常常用到集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 这是从点 x_0 的邻域中除去点 x_0 本身所得的集合, 叫做点 x_0 的去心邻域, 记作 $U_0(x_0, \delta)$. 即

$$\begin{aligned}U_0(x_0, \delta) &= \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} \\ &= \{x \mid x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\} \\ &= (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\end{aligned}$$

三、函数的概念

研究自然现象或技术过程时, 所需处理的变量往往不止一个, 而且各个变量的变化不是孤立的, 而是相互联系的. 变量之间的相互关系大多表现为函数

关系. 为了揭示变量之间的这种依赖性, 我们先来考察几个实际例子.

例2 一辆汽车以每小时50千米的速度在公路上做匀速行驶. 在这个过程中, 汽车所走的路程 s 与行驶的时间 t 都是变量. 由物理学的计算公式可知, 它们之间的关系为

$$s = 50t \quad t \in [0, +\infty)$$

当 t 在区间 $[0, +\infty)$ 内任取一个值时, 均可由上式所示的规则得到一个 s 的值与之对应. 比如, 当 $t = 6$ 时, 通过规则“50倍 t ”就得到 $s = 50 \times 6 = 300$ 与 $t = 6$ 对应……

例3 某洗衣机厂记录了某种型号洗衣机的销售情况, 并将销售量 y (单位: 台)与销售价格 z (单位: 元/台)列表如下:

表 1 - 1

价格	50	80	100	150
销售量	12 500	10 500	8 500	6 500

显然, 当 x 在价格集合 $\{50, 80, 100, 150\}$ 中任取一个值(如 $x = 80$)时, 均可按表 1 - 1 所示的对应规则(价格下方的数字是该价格下的销售量)唯一地确定一个销售量 y 的值($y = 10\,500$)与之对应. 将上述两个例子所揭示的变量之间的这种依赖(或对应)关系予以抽象, 并加以概括, 就得到下面的定义.

定义 1.1 设某变化过程中有两个变量 x 与 y , D 是一个非空数集, 如果对于变量 x 在数集 D 中所取的每一个值, 按照一定的对应规律 f , 变量 y 都有确定的值与之对应, 则称变量 y 是定义在数集 D 上的变量 x 的函数. 记作

$$y = f(x), x \in D \quad (1.1)$$

并称变量 x 为自变量, 变量 y 为 x 的函数(或称因变量). 自变量 x 的取值范围 D , 称为函数的定义域, 记作 $D(f)$. 对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值, 记作

$$y_0 \text{ 或 } f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0} \quad (1.2)$$

称为当 $x = x_0$ 时 $y = f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$, 称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 $Z(f)$.

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应规则. 对应规则也常常用 h , g , φ 等表示.

为了更好地理解函数的定义, 现特作如下说明:

(1) 定义中的符号“ f ”, 表示变量 x 与 y 直接的某种对应规则, 或者说它

是把定义域 D [或 $D(f)$] 中的元素 x 变为值域 $Z(f)$ 中元素 y 的一个运算法则.

例如, 在函数 $y = f(x) = 2x^2 + 2x - 5$ 中, 符号“ f ”就是一个“把 D 中的 x 变为 $Z(f)$ 中的元素 y ”的一个对应法则. 其具体含义就是把“ $2 \cdot [\text{自变量}]^2 + 2 \cdot [\text{自变量}] - 5$ ”.

比如, 当 $x = \sqrt{3}$ 时, 其对应的函数值为

$$f(\sqrt{3}) = 2 \cdot (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} - 5 = 1 + 2\sqrt{3}$$

当 $x = a - 1$ 时, 其对应的函数值为

$$f(a - 1) = 2(a - 1)^2 + 2(a - 1) - 5 = 2a^2 - 2a - 5$$

为了方便, 关于 y 与 x 的函数关系, 在没有明示函数符号时, 也可将此函数直接写为 $y(x)$. 如 $y = x^2 - 3$, 为了计算上的方便, 有时也可直接写为 $y(x) = x^2 - 3$. 只不过这里的 y 既可视作因变量, 也可视为“对应规则”.

(2) 由于函数的定义域 $D(f)$ 和对应规则 f 确定以后, 其值域 $Z(f)$ 也随之确定, 因此, 定义域和对应规则就成了决定函数的两个要素, 而与变量所采用的字母名称无关.

例如, 为求正方形的面积表达式. 甲: 设边长为 x , 面积为 y , 得

$$y = x^2 \quad (x > 0)$$

乙: 设边长为 z , 面积为 s , 得

$$s = z^2 \quad (z > 0)$$

由于这两个函数的定义域相同[都是 $(0, +\infty)$], 对应规则也相同(都是 $[\text{自变量}]^2$), 所以它们是同一个函数. 正是由于上述原因, 数学上常把函数 $f(x)$ 、 $f(z)$ 等均称为函数 f , 而把 $f(a)$ 称为函数 f 在 $x = a$ 时的值.

例 4 关系式 $y = x$ 与关系式 $y = \sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数.

解 这两个函数定义域相同, 但对应关系不同. 第二个函数可表示为 $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 所以不是相同的函数.

例 5 关系式 $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 与关系式 $y = x + 2$ 是否为相同的函数.

解 第一个函数的定义域为 $x \neq 2$ 的实数, 而第二个函数的定义域是全体实数. 它们的定义域不同, 故不是相同的函数.

注意:

(1) 给定一个 y 与 x 的关系式不一定是函数.

(2) 函数决定于对应关系 f 与定义域 $D(f)$ 两个要素, 两个函数相同当且仅当这两个要素都相同.

例 6 设某商品的单价为 k (k 在一定的条件下是一常量), 你所买的商品的

数量为 x , 你所付的款为 y , y 与 x 的关系为 $y = kx$. x 的取值由实际情况来确定. 若为笔或笔记本, x 的取值是非负整数. 在反映实际问题的函数关系中, 自变量 x 具有非常具体的实际意义, 这种函数的定义域应由 x 所表示的实际意义来确定.

四、函数的定义域

函数的定义域指的是能使函数表达式有意义的全体自变量的值的集合. 寻求此类函数的定义域时, 应遵循以下规律:

- (1) 分式的分母不等于 0;
- (2) 负数不能开偶次方;
- (3) 零和负数没有对数;
- (4) 正弦、余弦的绝对值不超过 1.

例 7 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \arcsin \frac{x+1}{3}$ 的定义域.

解 x 必须满足不等式 $x^2 - 1 > 0$, 解集为 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, 即 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

又由 $\left| \frac{x+1}{3} \right| \leq 1$ 的解集为 $\{x \mid -4 \leq x \leq 2\}$, 即 $[-4, 2]$.

所求函数的定义域为(用区间表示) $[-4, -1) \cup (1, 2]$.

五、分段函数

例 8 某汽车公司一郊区专线汽车的票价 y 可表示为路程 x 的函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 5 \\ 3, & 5 < x \leq 8 \\ 4, & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

这是一个分段函数. 火车、长途汽车的票价与路程也有类似的函数关系.

例 9 设银行活期存款的年利率为 r_0 , 一年定期存款的年利率为 r_1 , 某人存入银行 a 元, 设 y 为存款时间 t 的本利和.

$$y(t) = \begin{cases} a(1 + \frac{r_0}{12}t), & 0 < t < 12 \\ a(1 + r_1), & t = 12 \\ a(1 + r_1) + a[1 + \frac{r_0}{12}(t - 12)], & 12 < t < 24 \end{cases}$$

在日常生活中经常会遇到上面两例那样表示的函数, 邮局邮资的计算也是如此, 我们称这样的函数为分段函数. 分段函数的定义域被分为若干个互不相交的区间, 在不同的区间或区间的端点上, 函数值由不同的解析表达式计算, 区间的端点为分界点.

例 10 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & 1 < |x| < 2 \end{cases}$ 的定义域.

解 这是一个分段函数, 解不等式 $|x| < 1$ 和 $1 < |x| < 2$, 得 $(-1, 1)$ 和 $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

所以函数的定义域是 $(-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$.

注意: 虽然分段函数在定义域内不同的子区间上有不同的解析式, 但它是同一函数关系式, 其定义域是各子区间的并集.

六、函数的表示法

由函数的定义可知, 变量之间的对应规则 f 是确定函数的要素之一, 至于这个 f 是什么形式, 定义本身并未加以限制. 在通常情况下, 表示函数的方法, 有下面三种:

(1) 公式法: 这是一个用数学式子来表示变量之间对应关系的方法. 如例 1 中的 $s = 50t$ [$t \in [0, +\infty)$], 就是这种方法.

(2) 列表法: 这是一个用表格来表示变量之间对应关系的方法. 如例 3 中的表 1-1, 就是这种方法.

(3) 图像法: 这是一个用图像来表示变量之间对应关系的方法.

七、隐函数

有一些函数的因变量是用自变量表达式表示出来的, 这类函数称为显函数. 例如 $y = \sin x$, $y = x^2$ 等. 而有些函数, 它们的因变量与自变量的对应规则是用一个方程

$$F(x, y) = 0 \quad (1.3)$$

表示的, 这类函数称为隐函数. 如 $x^2 + y^2 = r^2$.

八、反函数

在函数 $y = f(x)$ 中, x 是自变量, y 是因变量, 然而在同一变化过程中存在着函数关系的两个变量究竟哪一个是自变量, 哪一个是因变量, 并不是绝对的, 要视问题的具体要求而定.

例如: 某商品在销售中, 市场价格为 a 元, 如果想从销售量 x 来确定销售

总收入 y , 则 x 是自变量, y 是因变量, 其函数关系为

$$y = ax \quad (1.4)$$

相反, 想从商品销售总收入确定销售量, 就得把 y 取作自变量, 把 x 作为因变量:

$$x = \frac{y}{a} \quad (1.5)$$

从(1.5)可知, 对于每一个 y , 都有唯一的一个 x 与之对应, 我们把(1.5)式叫做函数(1.4)式的反函数.

1. 反函数的定义

把以上分析的思维形式加以抽象, 就得到下面的定义.

定义 1.2 设 $y = f(x)$ 为给定的一个函数, 如果对其值域 $Z(f)$ 中的每一个值 y 都可以通过关系式 $y = f(x)$ 在其定义域 $D(f)$ 中有唯一的一个 x 值与之对应, 则得到一个定义在 $Z(f)$ 以 y 为自变量, x 为因变量的函数, 我们称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为

$$x = f^{-1}(y) \quad (1.6)$$

习惯上把 x 作为自变量, y 作为因变量, 因此将(1.6)式记为 $y = f^{-1}(x)$, 此时的定义域 $D(f^{-1}) = Z(f)$, 值域 $Z(f^{-1}) = D(f)$.

要注意的是 $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系, 所以它们的图形是同一曲线, 而 $y = f^{-1}(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 中将 x, y 交换得到的, 所以它们的图形关于 $y = x$ 对称, $y = f^{-1}(x)$ 与曲线 $y = f(x)$ 也是关于 $y = x$ 对称的.

2. 反函数存在的条件

根据定义 1.2 中的两个函数之说, 不难看出, 并非所有函数的反函数都存在. 比如, 从函数 $y = x^2$ 中解出 x , 就得 $x = \pm\sqrt{y}$; 这样, 任给一个 y 值, 就有两个 x 的值与之对应; 这一事实说明尽管 $y = x^2$ 是函数, 但是它的反解式 $x = \pm\sqrt{y}$ 却并非函数. 那么, 一个函数 f 具备什么条件, 才存在反函数呢? 由定义 1.2 的两个函数之说, 函数 $y = x^2$ 中的对应规则 f 必须一一对应. 也就是说, 在 $D(f)$ 中任给一个 x , 在 $Z(f)$ 中只有一个 y 与之对应; 反之, 在 $Z(f)$ 中任给一个 y , 在 $D(f)$ 中也只有一个 x 与之对应. 把这个条件反映在几何上, 就得到下面的反函数存在定理.

定理 1.1 若函数 $y = f(x)$, $x \in D(f)$ 是严格单调增加(或减少)的, 则存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, $y \in Z(f)$, 且反函数也是严格单调增加(或减少)的.

3. 反函数的求法

遵照习惯, 今后在求反函数时, 一律按下述步骤进行:

(1) 从直接函数 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$, 并判定它是否为函数(即给一个 y 值, 是否只能确定一个 x 值).

(2) 当 $x = f^{-1}(y)$ 是函数时, 再将 x 与 y 互换, 得到函数 $y = f^{-1}(x)$, 这就是所求的反函数.

例 11 求 $y = 2x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 2x + 1$, 可以求出

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2},$$

所以 $y = 2x + 1$ 的反函数为 $y = \frac{x-1}{2}$.

由反函数的定义可知, 如果函数 $y = f(x)$ 有反函数, 则 x 与 y 必定是一一对应的. 因为 $y = f(x)$ 是函数, 故对于每一个 $x \in D(f)$, 必有唯一的 $y \in Z(f)$ 与之对应, 同样, 其反函数 $x = f^{-1}(y)$, 对于任一 $y \in Z(f)$ 必有唯一的 $x \in D(f)$ 与之对应. 利用这种关系很容易判断一个函数是否有反函数.

例 12 考察函数 $y = x^2$ 是否存在反函数.

解 对于任一 $y \in (0, +\infty)$ 有两个不同 x 的值与 y 对应, 即 x 与 y 不是一一对应的, 所以它没有反函数. 但是, 如果我们把定义域限制在 $[0, +\infty)$, 则有反函数 $x = \sqrt{y}$, 同样把定义域限制在 $(-\infty, 0]$, 则有反函数 $x = -\sqrt{y}$.

例 13 求 $y = e^x$ 的反函数.

解 因为 $y = e^x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是严格单调增加的, 因而它有反函数 $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, 且反函数也是严格单调增加的.

第二节 函数的简单性质

任何一个函数, 它都具有其自身的性质. 对于众多函数来说, 就可能出现一些函数具有这些性质, 而另一些函数具有另外一些性质的情况. 本节主要讨论与几何图形有关的某些函数的性质.

一、函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$.

(1) 若对于所有的 $x \in D(f)$ 有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2) 若对于所有的 $x \in D(f)$ 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为奇函数. 奇函数的图形关于原点对称.